MATEMATIKA „A”

10. évfolyam

14. modul

Számtani és mértani közép, nevezetes egyenlőtlenségek

Készítette: Vidra Gábor

A modul célja	A számtani közép ismétlése, a számtani és a mértani közép összefüggésének ismerete. Feladatok megoldása, a hasonlóság anyagában található mértani közép tételek alkalmazásának elmélyítése.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Hasonlóság, statisztika, másodfokú kifejezések azonos átalakításai, négyzetgyökvonás azonosságai. Függvények, differenciálszámítás.
A képességfejlesztés fókuszai	Pontos szövegértés, szövegelemzés, a metakogníció fejlesztése. Következtetés a speciális, a konkrét megfigyelésektől az általános esetre, az induktív gondolkodás fejlesztése. A valós számok és a számegyenes pontjai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. A szélsőérték fogalmának elmélyítése a számtani és a mértani közép közötti összefüggés segítségével, amely az alulról, illetve a fölülről történő becslés képességét is fejleszti. A lehetséges alkalmazások megkeresése, a tanult új ismeret beillesztése a korábbi ismeretek rendszerébe, a rendszerező szemlélet alakítása.

AJÁNLÁS

A modul órakerete lehetőséget ad a következő, a tanulócsoport tudásszintjétől függő célok teljesítésére:

- a számtani és a mértani közép fogalmának és kapcsolatuknak az ismerete, ábrázolása számegyenesen;
- algebrai egyenlőtlenségek megoldása a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával;
- szélsőérték feladatok megoldása a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával (függvények, geometria);
- szélsőérték feladatok megoldása függvényvizsgálattal;

- szélsőérték feladatok megoldása másodfokú kifejezés azonos átalakításával.

Mint látható, a modul feldolgozása során lehetőségünk van kitekinteni a középszint követelményrendszeréből. A középszintű érettséginek nem követelménye a szélsőérték feladatok megoldása, ezért annak számonkérését nem javasoljuk. A függvényvizsgálat előfordul a vizsgán, a függvényvizsgálattal kapcsolatos mintapélda és feladatok feldolgozását javasoljuk.

TÁMOGATÓ RENDSZER

A tanári modulhoz tartozik egy tanórákon használható, elméletet és mintapéldákat tartalmazó bemutató. Ez egyrészt Power Point programmal kivetíthető, másrészt fóliára nyomtatva írásvetítővel megjeleníthető. Ezen kívül készíthetünk diákjainknak feladatlapokat a tanári anyagot felhasználva.

ÓRABEOSZTÁS

Óraszám	**Óracím**
1.	Számtani közép, mértani közép
2.	Feladatok mértani középre
3.	A számtani és a mértani közép közötti összefüggés
4.	Feladatok számtani és mértani közép közötti összefüggésre

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Középszint: Két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalma, kapcsolatuk, használatuk.

Emelt szint: Ismerje n szám számított középértékeit (aritmetikai, geometriai, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételeket. Bizonyítsa, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, ha $a, b \in \mathbb{R}^{+}$. Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény**
I. Közepek			
1	Bevezetés, ráhangolódás: középértékek	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás. Frontális munka.	Bemutató
2	Számtani közép és hibája		Bemutató, 1. mintapélda
3	Számolás mértani középpel		Bemutató, 2–5. mintapélda
4	Feladatok megoldása (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok.	1–14. feladatok

II. A számtani és mértani közép közötti összefüggés			
1.	Az összefüggés tapasztalati megismerése (csoportmunka)	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Bemutató, 6. mintapélda
2.	A számtani és mértani közép közti összefüggés alkalmazása (frontális)	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Bemutató, 6–11. mintapélda
3.	Feladatok megoldása (csoportmunka, differenciáltan)		15–30. feladatok

I. Közepek

Sok adat (számsokaság) jellemzői között szerepel a legnagyobb és a legkisebb adat, a minta terjedelme (a legnagyobb és a legkisebb elem különbsége), a középmennyiségek (különböző átlagok, közepek) és az adatok középmennyiségek körüli elhelyezkedésére, szétszórtságára jellemző szórás.

Eddigi tanulmányaink során megismerkedtünk néhány középértékkel a statisztika témakörében:

- **Számtani közép vagy átlag**:

  ***a* és *b* valós számok számtani közepe** $A=\frac{a+b}{2}$**,** vagyis két szám átlagát (összegük felét) a két szám számtani közepének nevezzük.

- **Módusz**: a számsokaság leggyakoribb adata.
- **Medián**: páratlan számú adat esetén a **rendezett minta** középső eleme, páros számú adat esetén a két középső átlaga.

A számtani közép tehát azonos a köznapi értelemben használt átlag fogalmával. Több szám esetén a két száméhoz hasonlóan számoljuk ki a számtani középüket: a számok összegét elosztjuk a számok darabszámával:

$$A=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$, ahol a_1 , a_2 , …, a_n valós számok.

A számtani közép azonban nem minden esetben jellemzi megfelelően az adatokat. Vizsgáljuk meg a következő példát.

Mintapélda$_1$

Egy cégnél 8 ember 90 ezer, 1 ember 140 ezer, és 1 ember 500 ezer forintot keres havonta. Mennyi az átlagkereset?

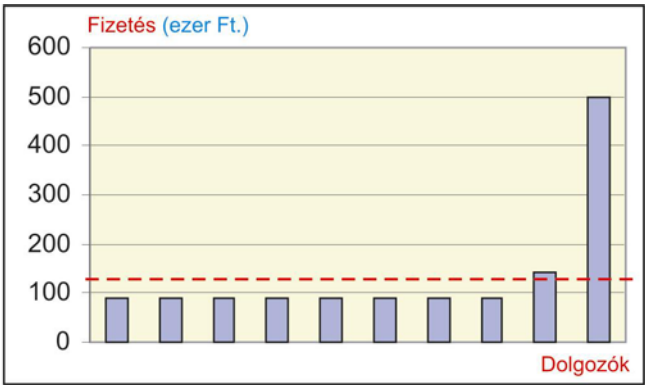
Megoldás:

$$\frac{8\cdot 90000+140000+500000}{10}=136000.$$

Ez aligha vigasztalja azokat, akik csak 90 ezer forintot keresnek. Érdemes lenne kiegészíteni a szórás nagyságával:

$$\sigma = \sqrt{\frac{8 \cdot (136000 - 90000)^2 + (136000 - 140000)^2 + (136000 - 500000)^2}{10}} \approx 122\,246\,.$$

A szórás nagyságrendje is mutatja az adatok elhelyezkedését. Kiegészíthetjük azzal a megjegyzéssel is, hogy a dolgozók 80%-ának a fizetése az átlagkereset alatt van. Jól szemlélteti a problémát a keresetekből készített oszlopdiagram is.



Tapasztalataink szerint **az átlagot a kiugró adatok elrontják**, ezért szükség van további, az adatsokaságot jellemző, átlag jellegű adatokra (közepekre). Ilyen például a mértani közép.

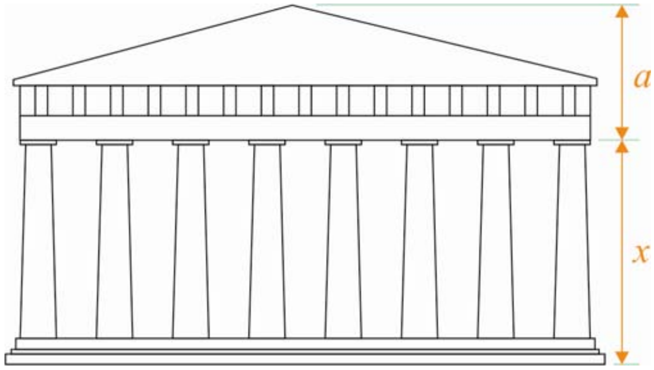
> *a* és *b* pozitív számok **mértani közepe**: $G = \sqrt{a \cdot b}$, vagyis két pozitív szám szorzatának négyzetgyökét a két szám mértani közepének nevezzük.

A medián, módusz, számtani és mértani közép mellett *egyéb középértékeket* is ismerünk:

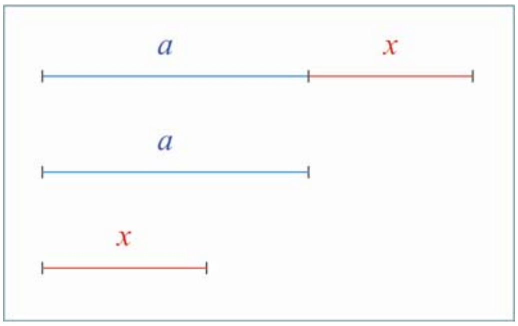
- *Harmonikus közép* (H): $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$ ($a,b>0$), az algebrai átalakításokat elvégezve $H = \frac{2ab}{a+b}$.
  A harmonikus közép jól használható például átlagsebesség vagy áramkörökkel kapcsolatos számításoknál.
- *Négyzetes közép*: $N = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ (a,b valós számok) A négyzetes közepet olyan adatok jellemzésére szoktuk használni, amelyek átlaga nulla.

A mértani közép értelmezhető több szám esetén is, de erre most nem térünk ki. A számtani közepet *A*-val jelöljük (aritmetikai közép), a mértani közepet *G*-vel (geometriai közép).

Módszertani megjegyzés: Az aranymetszés előfordult a kilencedikes anyagban. Kiadhatjuk kiselőadás vagy projektek témájának ennek újbóli feldolgozását, vagy az aranymetszés történetével, alkalmazásával kapcsolatos (például internetes) kutatást.



A mértani közép az aranymetszéssel is kapcsolatba hozható. Egy szakaszt akkor osztunk fel az aranymetszés szabálya szerint, ha a hosszabb és a rövidebb szakasz hosszának aránya ugyanannyi, mint az egész és a nagyobb szakasz hosszának az aránya:



$$\frac{a}{x}=\frac{a+x}{a} \quad\Rightarrow\quad a^2=ax+x^2 \quad\Rightarrow\quad a^2=x(a+x).$$

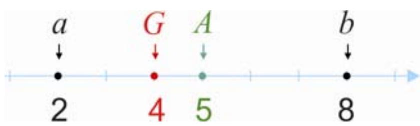
Innen $a=\sqrt{x\cdot(a+x)}$, azaz észrevehetjük, hogy a hosszabb szakasz éppen a rövidebb és az egész szakasz hosszának mértani középarányosa.

Mintapélda$_2$

Számítsuk ki két szám, 2 és 8 számtani és mértani közepét, és ábrázoljuk a közepeket a számegyenesen!

Megoldás:

$$A=\frac{2+8}{2}=5 \qquad G=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$$



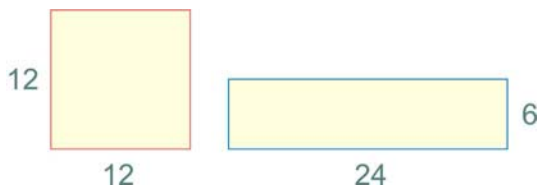
Mintapélda$_3$

Adott egy téglalap, amelynek oldalai 24 és 6 egység. Mekkora a vele egyenlő területű négyzet oldala?

Megoldás:

A téglalap területe: $T=6\cdot 24=144$.

A négyzet területe: $T=x^2$, $x=12$.



Éppen $x=\sqrt{6\cdot 24}$, vagyis a négyzet oldala a téglalap oldalainak mértani közepe.

Mintapélda$_4$

Határozzuk meg azt a két pozitív számot, amelyek számtani közepe 10, mértani közepe 8.

Megoldás:

Jelöljük x és y-nal a keresett számokat!

A számtani közép: $\frac{x+y}{2}=10$, innen $x+y=20$.

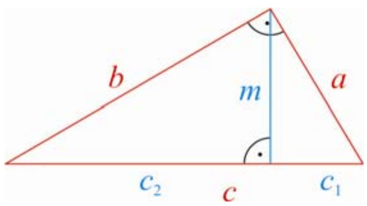
A mértani közép: $\sqrt{x\cdot y}=8$, innen $x\cdot y=64$.

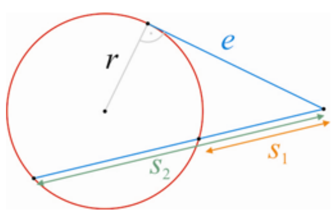
Ebből adódik a $0=x^2-20x+64$ másodfokú egyenlet, amelyet megoldva $x_1=16$ és $x_2=4$. y értékei: $y_1=20-16=4$, $y_2=20-4=16$.

Ellenőrzés után a feladatot a válasz leírásával zárjuk: *a keresett számok 4 és 16.*

A mértani középpel már többször találkoztunk geometriai problémák esetében is, például a hasonlóságnál tanultuk a következőket:

- **Magasságtétel:** a derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szeletre bontja, amelyek mértani közepe a magasság.
- **Befogótétel:** a derékszögű háromszögben a befogó megegyezik az átfogónak, és az adott befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepével.
- **Érintő és szelőszakaszok tétele:** egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakasz mértani közép a pontból húzott szelő és a szelőnek a ponttól a körig terjedő darabja között.





$m=\sqrt{c_1\cdot c_2}$

$a=\sqrt{c\cdot c_1}$

$e=\sqrt{s_1\cdot s_2}$

Módszertani megjegyzés: A következő mintapélda jobb képességű tanulóknak ajánlott.

Mintapélda$_5$

Az *ABC* háromszög *BC* oldalának *C*-n túli meghosszabbításán levő *D* pontra igaz, hogy az *ABC* szög egyenlő a *CAD* szöggel. Bizonyítsuk be, hogy *AD* mértani közepe a *CD* és *BD* szakaszoknak!

Megoldás:

Először igazoljuk, hogy az *ACD* háromszög hasonló a *BAD* háromszöghöz.

Mindkét háromszög egyik szöge β (*ABD* valamint *DAC* szögek), s mindkét háromszögnek van egy $\alpha+\beta$ nagyságú szöge (*ACD* és *BAD* szögek).

Felírva a megfelelő oldalak arányát:

$\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{AD}$, amit átrendezve $AD=\sqrt{CD\cdot BD}$, vagyis az állítást igazoltuk.

Feladatok

1. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! (A: számtani közép, G: mértani közép.)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)
a	100	15	*2*	*128*	12	120	*8*	*3*	*0,2*	*5*
b	125	20	14	208	*18,75*	*83,33*	*32*	*12*	*1,8*	*45*
A	*112,5*	*17,5*	8	168	*15,375*	*101,67*	20	7,5	1	25
G	*111,8*	*17,32*	*5,29*	*163,17*	15	100	16	6	0,6	15

Módszertani megjegyzés: A szürke cellák értéke kiszámolandó.A g) – j) feladatok a mintapéldában bemutatott megoldás szerint másodfokú egyenletrendszerre visszavezethetők. Egyes esetekben az eredmény közelítő érték.

2. Egy busz a menetidejének első harmadát 60 km/h, fennmaradó részét 90 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az átlagsebessége?

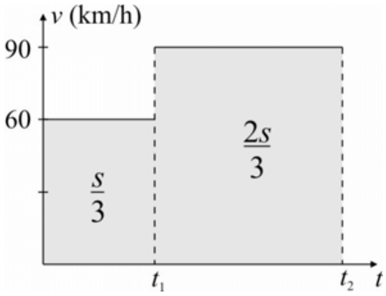
Megoldás:

Az út első harmadára $s_1=60\cdot\frac{t}{3}=20\cdot t$, a fennmaradó részére $s_2=90\cdot\frac{2t}{3}= \; =60\cdot t$.

Az átlagsebesség $\frac{s_1+s_2}{t}=\frac{20t+60t}{t}=80$ (km/h.)

3. Egy autó az út harmadát 60 km/h, kétharmadát 90 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az átlagsebessége?

Megoldás:

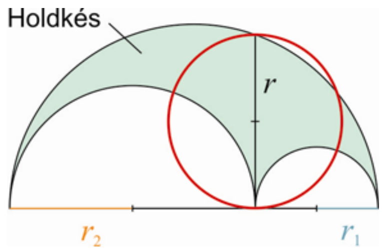


A sebesség--idő koordináta-rendszerben a felrajzolt grafikon alatti területek segítségével $\frac{s}{3} = 60 \cdot t_1$, ahonnan

$t_1 = \frac{s}{180}$, **valamint**

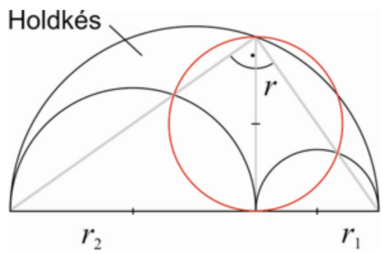
$$\frac{2s}{3} = 90 \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow s = 135 \cdot (t_2 - t_1) = 135 \cdot t_2 - 135 \cdot \frac{s}{180}.$$

Átrendezve: $1{,}75 \cdot s = 135 \cdot t_2$. Az átlagsebesség $\frac{s}{t_2} = \frac{135}{1{,}75} \approx 77{,}1$ km/h.



4. Az alábbi feladat Arkhimédész *Lemmák* c. könyvében található: fejezd ki a holdkés területét *r*-rel! (A holdkés az ókorban használt vágóeszköz volt.)

Megoldás:



A segédvonalak berajzolása után az ábra szerint Thalész tétele miatt derékszögű háromszöget kapunk. r_1 és r_2 segítségével felírva a holdkés területét kapjuk: $T = \frac{(r_1 + r_2)^2 \pi}{2} - \left(\frac{r_1^2 \pi}{2} + \frac{r_2^2 \pi}{2} \right) = r_1 \cdot r_2 \cdot \pi$. A magasságtétel szerint $2r = \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2} = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$, vagyis $r = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Ezt *T*-be visszahelyettesítve, a holdkés területe $r^2 \pi$.

5. Egy derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 10 és 16 cm-es darabokra osztja. Mekkora a háromszög területe és befogói?

Megoldás:

A szokásos jelölésekkel a magasságtétel szerint $m=\sqrt{10\cdot 16}\approx 12{,}65$ cm. A terület $T=\frac{m\cdot c}{2}==\frac{12{,}65\cdot(10+16)}{2}\approx 164{,}4\ \text{cm}^2$. A befogótétel szerint a befogók: $a=\sqrt{10\cdot(10+16)}\approx 16{,}12$ cm, és $b=\sqrt{16\cdot(10+16)}\approx 20{,}40$ cm.

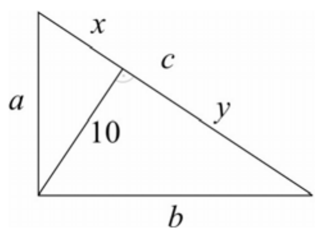
6. Egy derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 3 cm és 5 cm nagyságú részekre osztja. Mekkora a háromszög területe és kerülete?

Megoldás:

A szokásos jelölésekkel a magasságtétel szerint $m=\sqrt{3\cdot 5}\approx 3{,}87$ cm. A terület $T=\frac{m\cdot c}{2}==\frac{3{,}87\cdot(3+5)}{2}\approx 15{,}48\ \text{cm}^2$. A befogótétel szerint a befogók: $a=\sqrt{3\cdot(3+5)}\approx 4{,}90$ cm, és $b=\sqrt{5\cdot(3+5)}\approx 6{,}32$ cm. A kerület $K=6{,}32+4{,}90+8=19{,}22$ cm.

7. Egy derékszögű háromszögben a befogók aránya 1,5. Az átfogóhoz tartozó magasság 10 cm. Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?

Megoldás:



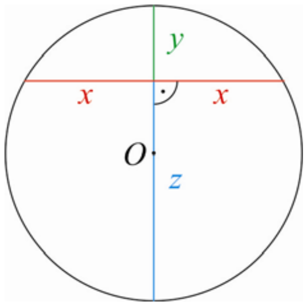
A befogótétel szerint a befogókra felírható: $a=\sqrt{x(x+y)}$, és $b=\sqrt{y(x+y)}$. Hányadosuk $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{y(x+y)}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, ahonnan $\frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}=1{,}5^2=2{,}25$, vagyis $x=2{,}25y$. A magasságtétel szerint $m=\sqrt{x\cdot y}$, ahonnan $100=xy=2{,}25y^2$. Innen $y\approx 6{,}67$ és $x=15$ a keresett szakaszok.

8. Mekkora a derékszögű háromszög köré írható kör sugara, ha a befogók aránya 3 : 4, és az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szeletre bontja, amelyek különbsége 4 cm?

Megoldás:

A befogótétel szerint az a és b befogóra, valamint az x és y átfogó-szeletekre $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{y(x+y)}}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{x}{y}$, amiből $x=y\frac{a^2}{b^2}=\frac{9}{16}y$. A két szelet különbségére

$4 = y - x = y - \frac{9}{16}y = \frac{7}{16}y$. Ebből $y = \frac{64}{7} \approx 9{,}14$ cm, $x = y - 4 \approx 5{,}14$ cm. A köré írható kör sugara az átfogó hosszának a fele: $r = \frac{x+y}{2} \approx 7{,}14$ cm.



9. Az ábra jelöléseit felhasználva igazold, hogy $x^2 = y \cdot z$!

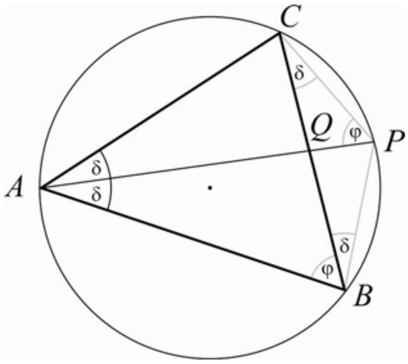
Megoldás:

Ha az x hosszúságú szakaszok végpontjait az átmérő végpontjaival összekötjük, a Thalész-tétel miatt a körvonalnál derékszögek keletkeznek. Ezeknek a derékszögű háromszögeknek a magassága x, amely az átfogót y és z darabokra osztja. A magasságtétel miatt az összefüggés fennáll.

10. Egy körhöz egy adott pontból húzunk egy szelőt, és kiszámítjuk a szelőszakaszok szorzatát. Húzható-e még egy olyan szelő a körhöz, amelyre a szelőszakaszok szorzata ugyanennyi?

Megoldás:

Az érintő és szelőszakaszok tétele miatt bárhogy húzunk is szelőt a körhöz, a szelőszakaszok szorzata mindig ugyanannyi (ti. az érintőszakasz négyzete).



11. Az ABC háromszög A csúcsból kiinduló szögfelezőjének a köré írt körrel alkotott metszéspontja P, BC oldallal alkotott metszéspontja Q. Mutasd meg, hogy BP mértani közepe az AP és az QP szakasznak!

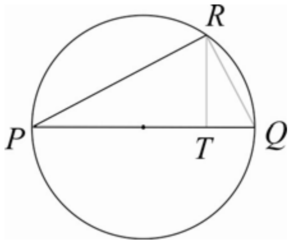
Megoldás:

Először bebizonyítjuk, hogy APB háromszög és BPQ háromszögek hasonlók. Az ábrán azonos betűkkel jelölt szögek egyenlők (egyenlő íveken nyugszanak). A külsőszög-tétel miatt BQP szög nagysága $\delta + \varphi$, így mindkét háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge.

A megfelelő oldalak arányát felírva: $\frac{BP}{AP} = \frac{PQ}{BP}$, amit átrendezve kapjuk az állítást: $BP = \sqrt{AP \cdot PQ}$.

12. Bizonyítsd be, hogy a kör PR húrja mértani közepe a P-ből induló átmérőnek, és a húr ezen átmérőjére eső merőleges vetületének!

Megoldás:



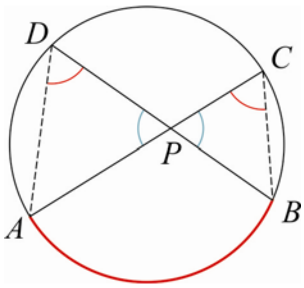
Az ábra szerinti jelölésekkel a Thalész-tétel miatt PRQ háromszög derékszögű. Derékszögű háromszögre érvényes a befogótétel, $PR=\sqrt{PQ\cdot PT}$, ami épp a kívánt állítás.

13. Igazold Pitagorasz tételét a befogótételek felhasználásával!

Megoldás: $a^2+b^2=c\cdot c_1+c\cdot c_2=c\cdot(c_1+c_2)=c^2$.

14. Igazold, hogy a körben egy P belső ponton átmenő húrokat P két olyan szakaszra bontja, amelyek mértani közepe minden P-n átmenő húr esetén egyenlő.

Megoldás:



Legyen AC és BD két tetszőleges, P ponton áthaladó húr. D és C-nél egyenlők a szögek, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek. P-nél egyenlő csúcsszögek találhatók, így $DPA\triangle\sim CPB\triangle$. A megfelelő oldalak arányából $\frac{PC}{DP}=\frac{PB}{PA}$, ahonnan $PC\cdot PA=PB\cdot DP$.

II. A számtani és mértani közép közötti összefüggés

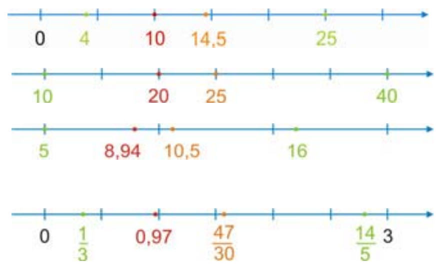
Mintapélda$_6$

Számítsuk ki a következő számok számtani és mértani közepeit, és ábrázoljuk számegyenesen a számokat és a közepeket! Milyen összefüggést találunk két szám számtani és mértani közepe között?

a) 4 és 25; b) 10 és 40; c) 5 és 16; d) $\frac{1}{3}$ és $\frac{14}{5}$; e) 7,2 és 7,2.

Megoldás:

	a	b	A	G
a)	4	25	14,5	10
b)	10	40	25	20
c)	5	16	10,5	8,94
d)	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{47}{30} \approx 1{,}57$	0,97
e)	7,2	7,2	7,2	7,2

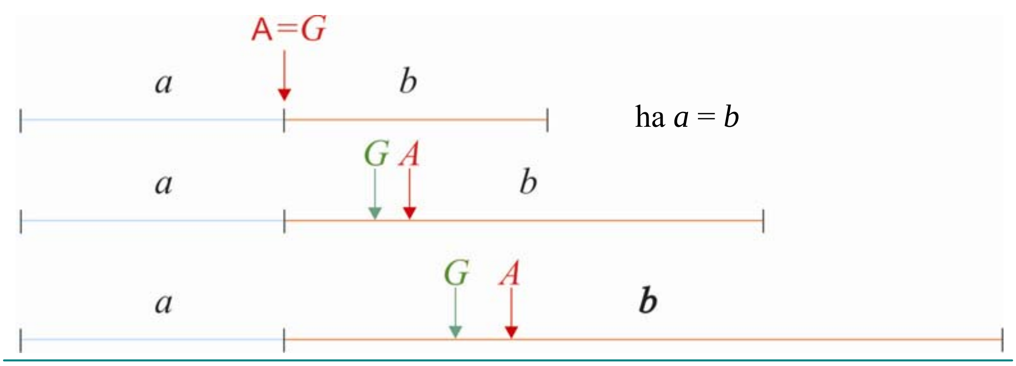


Azt tapasztaltuk, hogy a számtani közép nemkisebb a mértani középnél, és mindkét közép a két szám által meghatározott intervallumba esik.

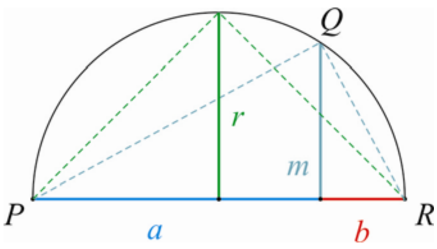
Két pozitív szám mértani közepe nem nagyobb, mint a két szám számtani közepe:

$$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}.$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő.



Két pozitív szám (*a* és *b*) számtani és mértani közepét ábrán is szemléltethetjük.



Rajzoljuk meg az *a*+*b* hosszúságú szakasz Thalész-körét. Az ábra jelöléseivel: $r = \frac{a+b}{2}$, és a *PQR* derékszögű háromszögben a magasságtétel szerint $m = \sqrt{a \cdot b}$,

vagyis a kör sugara *a* és *b* számtani közepe, az *m*-mel jelölt szakasz *a* és *b* mértani közepe. Mivel az *m* hosszúságú szakasz a kör sugaránál nem lehet hosszabb, érvényes az $m \le r$ egyenlőtlenség, vagyis $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$. Az egyenlőség akkor teljesül, ha $m = r$, vagyis a két szakasz egyenlő hosszú: $a = b$.

A számtani és a mértani közép közötti összefüggést a gyakorlatban **változó mennyiségek esetén becslésre** (egyenlőtlenség felírására), és **szélsőérték-feladatok megoldására** használjuk. Ehhez az kell, hogy vagy az összeg vagy a szorzat állandó legyen.

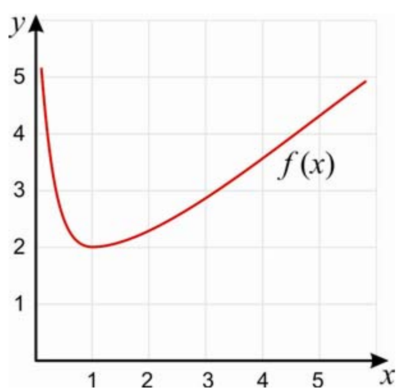
Módszertani megjegyzés: A szélsőérték-feladatok megoldása nem tartozik a középszintű érettségi követelményei közé. Csak a matematika iránt fogékony tanulóknak ajánljuk. A másodfokú kifejezés átalakítása és a szélsőérték vizsgálata azonban középszintű követelmény.

Mintapélda$_7$

Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (x>0)függvény 2-nél kisebb értéket nem vesz fel.

Megoldás:

A számtani és a mértani közép közötti összefüggés szerint: $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \ge \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1}$, innen $x + \frac{1}{x} \ge 2$.



Ezt az állítást gyakran így fogalmazzuk meg: egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.

Mintapélda$_8$

120 méter hosszú kerítéssel legfeljebb mekkora területű téglalap alakú telket lehet körülkeríteni?

Megoldás:

Legyen a és b a két oldal. Ekkor a kerület $2(a+b)=120$, vagyis $a+b=60$. Teljesül az összeg állandóságának feltétele, ezért becsülhetünk a számtani és mértani közép közötti összefüggéssel: $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{a\cdot b}\le 30\quad\Rightarrow\quad a\cdot b\le 900$.

Tehát legfeljebb 900 m^2 területű telket lehet körbekeríteni.

A legnagyobb érték 900, ami $a=b=30$ esetében, vagyis négyzet alakú teleknél lehetséges.

Megjegyzés: A feladat megoldható másodfokú függvény szélsőértékének vizsgálatával is. Az $a+b=60$ összefüggésből $b=60-a$. A téglalap területe $T=ab=60a-a^2$. A teljes négyzetté kiegészítés módszerét alkalmazva $T=-\left(a^2-60a\right)=-\left[(a-30)^2-900\right]=$ $=-(a-30)^2+900$. A másodfokú függvény minimuma az $M(30;900)$ pontban, azaz az a = 30m. Tehát a maximális terület 900 m^2. Természetesen a = 30m esetén b = 30m adódik.

Mintapélda$_9$

Legalább mennyi kerítésre van szükség egy 120 m^2-es, téglalap alakú telek körbekerítéséhez?

Megoldás:

Legyen a és b a két oldal hossza. A kerítés hossza a kerület, vagyis $2(a+b)$. A számtani és mértani közép közötti összefüggést felírva

$$\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\quad\Rightarrow\quad 4\sqrt{a\cdot b}\le 2(a+b)\quad\Rightarrow\quad 4\sqrt{a\cdot b}\le K\quad\Rightarrow\quad 4\sqrt{120}\le K\quad\Rightarrow\quad 43{,}82\le K$$

Tehát legalább körülbelül 44 méter kerítés kell.

Megjegyzés:

1. A kerítés $a=b=\sqrt{120}\approx 11$ m oldalhosszú négyzet esetén a legkisebb.
2. Ebben a feladatban a függvényvizsgálat középiskolában nem szereplő matematikai ismereteket igényel.

Mintapélda$_{10}$

Mekkora a maximális területe annak a téglalapnak, amelynek kerülete 40 cm? Mekkorák ekkor a téglalap oldalai?

Megoldás:

A feladat hasonlít az egyik előző mintapéldára, de most megoldjuk két másik módszerrel is. Jelölje *x* és *y* a két oldalt!

1. *Megoldás:*

x és *y* pozitív számok, ezért $\sqrt{x \cdot y} \le \frac{x+y}{2} \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} \le 10 \Rightarrow x \cdot y \le 100$. Tehát legfeljebb 100 cm^2 lehet a terület. Egyenlőség (legnagyobb érték) abban az esetben fordul elő, ha $x = y = 10$ cm.

Egyéb megoldások:

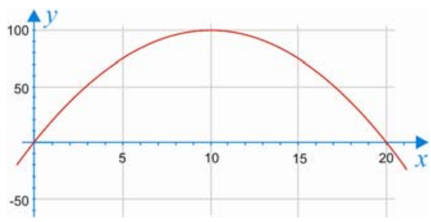
A kerületből $2(x+y)=40$, ahonnan $x+y=20$, $y=20-x$. Ezt a területbe helyettesítve $T = x \cdot (20-x) = -x^2 + 20x$. A feladat nem más, mint megkeresni, hogy milyen *x* esetén lesz a másodfokú kifejezés értéke a legnagyobb. Ez két módszerrel: nevezetes azonosság vagy függvényvizsgálat felhasználásával is meghatározható.

2. *Megoldás:*

Alakítsuk át a terület képletét úgy, hogy teljes négyzet szerepeljen benne:

$T = -x^2 + 20x = -(x^2 - 20x) = -[(x-10)^2 - 100] = 100 - (x-10)^2$. Ez a kifejezés $x = 10$ esetén veszi fel a legnagyobb értékét, ami 100.

3. *Megoldás:*



Határozzuk meg a kifejezés zérushelyeit, és vázoljuk fel a másodfokú kifejezéshez tartozó parabolát!

A zérushelyeket a $-x^2 + 20x = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk: 0 és 20. A parabola szimmetriája miatt a legnagyobb értékét a két zérushely között, éppen középen, azaz a $\frac{0+20}{2}$ helyen veszi fel, vagyis $x = 10$ esetén.

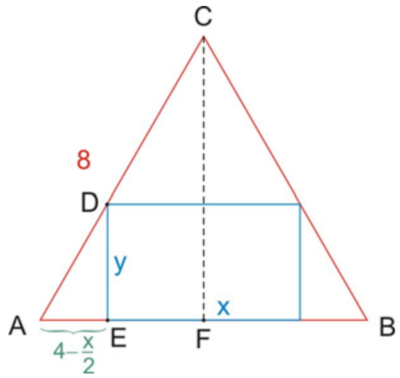
Tehát a maximális terület 100 cm^2, és 10 cm oldalú négyzet esetén teljesül.

Megjegyzés: a szélsőérték vizsgálata differenciálszámítással is történhet. Ez az emelt szintű érettségi anyaga.

Mintapélda$_{11}$

Szerkessz 8 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget! Mekkorák az oldalai a háromszögbe írható téglalapok közül annak, amelynek területe a lehető legnagyobb? A kiszámítás után szerkeszd meg a háromszögbe a kapott téglalapot!

Megoldás:



Jelölje x és y a téglalap oldalait az ábra szerint, a téglalap területe $T = x \cdot y$, ahol $0 < x < 8$. Az ADE derékszögű háromszög egyik szöge 60°, ezért

$$DE = AE \cdot \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}\left(4 - \frac{x}{2}\right).$$

$T = x \cdot \sqrt{3}\left(4 - \frac{x}{2}\right) = 4\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x(8-x)$ másodfokú kifejezés maximális értékét a két zérushely (0 és 8) számtani közepénél veszi fel, vagyis $x = 4$ esetén. Ekkor $y = \sqrt{3}\left(4 - \frac{4}{2}\right) = 2\sqrt{3}$. A terület $T = 8\sqrt{3}$.

Megszerkesztése könnyű, mert az AB oldal negyedelő pontjait kell megszerkeszteni.

Módszertani megjegyzés: A feladatok között találunk hasonló példákat.

Feladatok

15. Szerkeszd meg a következő hosszúságú szakaszok számtani és mértani közepét!

a) 4 cm és 6 cm; b) 3 cm és 9 cm; c) 5 cm és 8 cm.

Megoldás: Thalész tételét és a magasságtételt (vagy a befogótételt) használjuk.

16. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 5 cm. Legfeljebb mekkora lehet a területe, és a legnagyobb terület esetén mekkorák a háromszög oldalai?

1. megoldás: függvényelemzéssel.

Jelölje x és $(5-x)$ a két befogó hosszát. Ekkor a terület $T(x) = \frac{1}{2}x \cdot (5-x)$. A kifejezéshez tarozó parabolának maximuma van, és a szimmetria miatt épp a zérushelyek számtani közepénél, azaz $x = 2{,}5$ esetén. Ekkor $T(2{,}5) = 3{,}125\ \mathrm{cm}^2$, a befogók hossza 2,5 cm, az átfogó $2{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}54$ cm.

2. megoldás: számtani és mértani közép segítségével.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva $\sqrt{x \cdot (5-x)} \le \frac{x + (5-x)}{2} \Rightarrow x \cdot (5-x) \le \frac{25}{4}$. Az egyenlőtlenséget 2-vel osztva kapjuk, hogy $T \le \frac{25}{8}\ \mathrm{cm}^2$. Legnagyobb a terület akkor, ha a két szám egyenlő: $x = 5 - x$, ahonnan a háromszög befogóinak hossza 2,5 cm, átfogója $2{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}54$ cm.

17. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 40 cm. Legfeljebb mekkora lehet a területe, és a legnagyobb terület esetén mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

Jelölje x és $(40-x)$ a két befogó hosszát. $T = \frac{x \cdot (40-x)}{2}$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva $\sqrt{x \cdot (40-x)} \le \frac{x + (40-x)}{2} \Rightarrow x \cdot (40-x) \le 400$. Az egyenlőtlenséget 2-vel osztva kapjuk, hogy $T \le 200\ \mathrm{cm}^2$. Legnagyobb terület abban az esetben lehetséges, ha a két szám egyenlő: $x = 40 - x$, ahonnan a háromszög befogóinak hossza 20 cm, átfogója $20 \cdot \sqrt{2} \approx 28{,}28$ cm.

18. Egy rakétát függőlegesen felfelé lövünk ki $v_0 = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ kezdősebességgel. Milyen magasra repül a rakéta, ha repülési magasságát az $y = v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2$ képlet alapján határozhatjuk meg (*t* az indulástól számított idő). Mikorra állítsuk a robbanást meghatározó időzítőt, ha a pálya legmagasabb pontján kell robbantani? $\left(g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$.

Megoldás:

Behelyettesítve az adatokat, az $y = 40 \cdot t - 5 \cdot t^2 = -5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t)$ kifejezést kapjuk. Ezt átalakítva $y = -5 \cdot \left[(t-4)^2 - 16\right] = 80 - 5 \cdot (t-4)^2$. Ez $t = 4$ s esetén maximális, és a maximális magasság 80 méter. Az időkapcsolónak 4 s múlva kell bekapcsolnia, 80 m magasságban.

19. Egy rakétát függőlegesen felfelé lövünk ki $v_0 = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel. Milyen magasra repül a rakéta, ha repülési magasságát az $y = v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2$ képlet alapján határozhatjuk meg (*t* az indulástól számított idő). Mikorra állítsuk a robbanást meghatározó időzítőt, ha a pálya legmagasabb pontján kell robbantani? $\left(g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$.

Megoldás:

Behelyettesítve az adatokat, az $y = 30 \cdot t - 5 \cdot t^2 = -5 \cdot \left(t^2 - 6 \cdot t\right)$ kifejezést kapjuk. Ezt átalakítva $y = -5 \cdot \left[(t-3)^2 - 9\right] = 45 - 5 \cdot (t-3)^2$. Ez $t = 3$ s esetén maximális, és a maximális magasság 45 méter. Az időzítőt 3 s-ra kell beállítani.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok az emelt szintű érettségi követelményrendszerére épülnek. Átvételüket csak érdeklődő diákoknak javasoljuk.

20. Igazoljuk, hogy $a > 0$ esetén fennáll a $2 \le \frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}}$ egyenlőtlenség!

Megoldás:

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva

$\sqrt{\left(a^2 + 1\right) \cdot 1} \le \frac{a^2 + 1 + 1}{2} = \frac{a^2 + 2}{2}$. Ezt átrendezve kapjuk a kívánt állítást.

21. Igazoljuk, hogy $a > 0$ esetén fennáll a $2 \le \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}}$ egyenlőtlenség!

Megoldás:

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva

$\sqrt{\left(a^2 + 2\right) \cdot 1} \le \frac{a^2 + 2 + 1}{2} = \frac{a^2 + 3}{2}$. Ezt átrendezve kapjuk a kívánt állítást.

22. Igazold, hogy pozitív *x, y, a* és *b* számok esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

a) $x \cdot y \le \frac{x^2+y^2}{2}$; b) $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$; c) $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Megoldás:

a) Következik abból, ha a számtani és mértani közép közti összefüggésbe *a* helyére x^2, *b* helyére y^2-et helyettesítünk.

b) Induljunk ki abból, hogy bármely két pozitív *a* és *b* számra $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \le \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}$, vagyis $2 \le \frac{a^2+b^2}{ab}$. *a* és *b* pozitívak, így $2ab \le a^2+b^2$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalához $2ab$-t adva $4ab \le (a+b)^2$, amit átrendezve kapjuk az állítást.

c) Induljunk ki abból, amit igazolni kell, és emeljük négyzetre: $\frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$. Ebből $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$, azaz $a^2+b^2+2ab \le 2a^2+2b^2$. Átrendezve $0 \le a^2+b^2-2ab$, vagyis a $0 \le (a-b)^2$ érvényes egyenlőtlenséget kapjuk. Az átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért az állítást igazoltuk.

Módszertani megjegyzés: Az ilyen feladatoknál célravezető módszer a bizonyítandó egyenlőtlenségből kiindulva, annak ekvivalens átalakításaival igaz összefüggést kihozni, mint azt a c) megoldása mutatja.

23. Határozd meg az $f(x) = x + \frac{5}{x}$ $(x > 0)$ függvény minimális értékét! Milyen *x* esetén minimális a függvény értéke?

Megoldás:

Felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget $\frac{x+\frac{5}{x}}{2} \ge \sqrt{x \cdot \frac{5}{x}}$, vagyis $f(x) \ge 2\sqrt{5}$. Legkisebb értékét akkor veszi fel, ha $x = \frac{5}{x}$, aminek megoldása $x > 0$ miatt $x = \sqrt{5}$.

24. a) Egy 20 cm hosszúságú szakaszt két részre osztunk, és mindkét részre írunk egy négyzetet. Mekkora részekre kell osztani a szakaszt, hogy a négyzetek területének összege a lehető legkisebb legyen?

b)Oldd meg a feladatot általánosan is, amikor a szakasz hossza *a* egység!

Megoldás:

b) Legyen *x* és *y* a két rész, ekkor $y = a - x$. A területek összege $T = x^2 + y^2 =$

$= x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$. Ezt teljes négyzetté alakítva $T = 2\left(x^2 - ax\right) + a^2 =$

$= 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] + a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$. T értéke $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$ esetén minimális

A minimális érték $T_{\min} = \frac{a^2}{2}$.

Az a) esetben ugyanez a gondolatmenet konkrét számokkal végigszámolható, 10-10 cm-es szakaszokra kell osztani a szakaszt, a minimális terület 200 cm^2.

Módszertani megjegyzés: A feladatot az emelt szintre készülő diákok megoldhatják a számtani és a négyzetes közép segítségével is. A $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenséget négyzetre emeljük: $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$. Innen $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$, ahol $T = x^2 + y^2$, és $x + y = a$, azaz $T \geq \frac{a^2}{2}$. Tehát $T = \frac{a^2}{2}$ a minimális terület, mely a két változó egyenlősége esetén áll fenn, azaz $x = y = \frac{a}{2}$.

25. Egy 40 cm hosszúságú szakaszt két részre osztunk, és mindkét részre írunk egy szabályos háromszöget. Mekkora részekre kell osztani a szakaszt, hogy a háromszögek területének összege a lehető legkisebb legyen? Oldd meg a feladatot általánosan is, amikor a szakasz hossza *a* egység!

Megoldás:

Legyen *x* és *y* a két rész, ekkor $y = a - x$. A területek összege

$T = x^2\frac{\sqrt{3}}{4} + y^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[x^2 + (a-x)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[2x^2 - 2ax + a^2\right]$. Ezt átalakítva

$$T=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[2\left(x^2-ax\right)+a^2\right]=2\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right]+a^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

T értéke $x=\frac{a}{2}$ esetén minimális, a minimális érték $T_{\min}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Ugyanez a gondolatmenet konkrét számokkal végigszámolható, 20-20 cm-es szakaszokra kell osztani a szakaszt, a minimális terület $200\sqrt{3}\approx 346{,}41\ \text{cm}^2$.

Módszertani megjegyzés: A feladatot emelt szintre készülő diákok megoldhatják a számtani és a négyzetes közép segítségével is.

26. A 600 m^2 területű, téglalap alakú telkeknek …

a) legalább mekkora lehet az átlója?

b) legalább mekkora lehet a kerülete?

Megoldás:

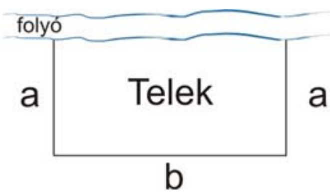
Jelölje *a* és *b* a két oldalt. Ekkor $ab=600$.

a) Az átló $\sqrt{a^2+b^2}$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva, felhasználva a négyzetgyök függvény monoton növekedését becsülhetjük a kifejezést: $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$. Ezt négyzetre emelve $4ab\le a^2+b^2+2ab$, vagyis $2ab\le a^2+b^2$, ahonnan az átlóra a $\sqrt{2ab}\le\sqrt{a^2+b^2}$ becslés adódik. A telek átlója legalább $\sqrt{1200}\approx 34{,}64$ méter hosszú.

b) A $2(a+b)$ kerületre egyszerűbb a becslést megadni: $2(a+b)\ge 4\sqrt{ab}$, vagyis a kerület legalább 97,98 méter hosszú.

27. 300 méteres kerítéssel 3 oldalról akarunk egy téglalap alakú telket körbe keríteni. Adj becslést a telek legnagyobb területére!

Megoldás:



Legyen *a* és *b* a téglalap két oldala. Ekkor $2a+b=300$, vagyis $b=300-2a$. A telek területe:

$T = ab = a(300 - 2a) = 300a - 2a^2 = 2a(150 - a)$. Most a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség nem használható (nem állandó $2a$ és $150–a$ összege). A terület függvény két zérushelye 0 és 150, A maximális értéket ezek számtani közepénél veszi fel a függvény, így $a = \frac{0+150}{2} = 75$. Ekkor $b = 300 - 2 \cdot 75 = 150$, a terület $T = 75 \cdot 150 = 11250\,\mathrm{m}^2$. A telek területe tehát legfeljebb 11250 m^2, ami két 75 m és egy 150 m hosszú oldal esetén valósul meg.

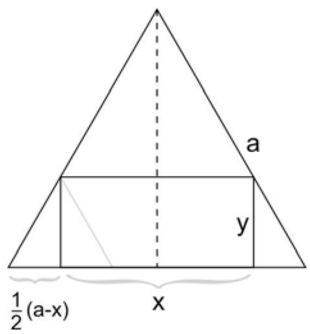
28. 450 méteres kerítéssel 3 oldalról akarunk egy téglalap alakú telket körbe keríteni. Adj becslést a telek legnagyobb területére!

Megoldás:

Legyen a és b a téglalap két oldala. Ekkor $2a + b = 450$, vagyis $b = 450 - 2a$. A telek területe: $T = ab = a(450 - 2a) = 450a - 2a^2 = 2a(225 - a)$. A területfüggvény két zérushelye 0 és 225. A maximális értéket ezek számtani közepénél veszi fel a függvény, így $a = \frac{0+225}{2} = 112{,}5$. Ekkor $b = 225$, a terület $T = 112{,}5 \cdot 225 = 25312{,}5\,\mathrm{m}^2$. A telek területe tehát legfeljebb 25312,5 m^2, ami két 112,5 m és egy 225 m hosszú oldal esetén valósul meg.

29. Mekkorák a szabályos háromszögbe írható maximális területű téglalap oldalai, ha a háromszög oldala … a) 24 cm; b) a.

Megoldás:



b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$. A terület $T = xy = \frac{\sqrt{3}}{2}x(a - x) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[-(x^2 - ax)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right]$. Ez $x = \frac{a}{2}$ esetén

maximális, és ekkor $y = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

a) a helyére 24-et helyettesítve a téglalap oldalai 12 cm és $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm.

Módszertani megjegyzés: A feladat gyakorlásképpen megoldható szabályos háromszög helyett egyenlőszárú derékszögű háromszöggel is.

Kislexikon

***a* és *b* pozitív számok számtani közepe** (átlaga) $A = \frac{a+b}{2}$, mértani közepe $G = \sqrt{a \cdot b}$.

Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség: két pozitív szám mértani közepe nem nagyobb, mint számtani közepe. A számtani és a mértani közép akkor és csakis akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő.

Tétel: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

Módszertani megjegyzés: Emelt szinten szükség van a többi középértékre is.

A számtani és a mértani közép mellett használjuk a következő közepeket is:

- harmonikus közép (*H*): $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$, az algebrai átalakításokat elvégezve $H = \frac{2ab}{a+b}$.

  négyzetes közép (*N*): $N = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Az egyenlőtlenségek közötti kapcsolat: $H \le G \le A \le N$.