

MATEMATIKA „A”

10. évfolyam

9. modul

Hegyesszögek szögfüggvényei

Készítette: Vidra Gábor, Lénárt István

A modul célja	Szögfüggvények bevezetése hegyesszögek esetén, alapvető trigonometriai feladatok.
Időkeret	10 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Hasonlóság, forgásszög szögfüggvényei, trigonometrikus függvények.
A képességfejlesztés fókuszai	Egyszerű feladatok derékszögű háromszögekben. Zsebszámológép biztos használatának elsajátítása. A valóságos tárgyak méretei, és azok geometriai modellje közötti arány becslése. Síkidomok kerületének, területének, térbeli alakzatok felszínének becslése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek továbbfejlesztése. A geometriai feladatok algebrai eszközökkel történő megoldási képességének fejlesztése. Geometriai fogalmak segítségével az absztrakciós képesség fejlesztése.

A modulhoz kapcsolódó érettségi követelmények

Trigonometrikus egyenletek

Középszint

Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő feladatokat megoldani

Trigonometria

Középszint

- Tudja hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszög oldalarányaival definiálni, ismereteit alkalmazza feladatokban.
- Tudja és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye, pitagoraszói összefüggés.
- Tudjon hegyes szögek esetén szögfüggvényeket kifejezni egymásból.
- Ismerje és alkalmazza a nevezetes szögek (30° , 45° , 60°) szögfüggvényeit.

Emelt szint

Tudjon szögfüggvényeket kifejezni egymásból.

Kerület, terület**Középszint**

- Ismerje a kerület és a terület szemléletes fogalmát.
- Háromszög területének kiszámítása különböző adatokból: $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$; $t = \frac{ab \sin \gamma}{2}$.
- Nevezetes négyszögek területének számítása.
- Szabályos sokszögek kerületének és területének számítása.
- Kör, körcikk, körszelet kerülete, területe.
- Kerület- és területszámítási feladatok.

Ajánlás

A modulba sok feladat és alkalmazás került. Ez lehetőséget ad a differenciálásra a tanulócsoporthoz képeinek figyelembevételével. Ha szükséges, a tanórák átcsoportosíthatók (például a 2–3. illetve 6–7. óra anyagai összevonhatók, és így nyerünk a modul végére két feladatmegoldó órát). A középszintű érettségiben nem jellemző a nehezebb trigonometrikus feladatok kitűzése, azokat emelt szintre készülő vagy érdeklődőbb tanulóknak ajánljuk.

Javasoljuk a Polydron, plexi testek és hasonló szemléltetőeszközök használatát tanórákon. Feladhatjuk tanulóinknak projekt munkában, hogy gyűjtsenek a kereskedelemben kapható, nem téglatest alakú csomagolásokat, és határozzák meg ezek jellemző szögeit (például alaplappal és oldal-lappal hajlásszögét).

Támogató rendszer

A modulhoz tartoznak projektor segítségével kivetíthető bemutatók, amelyek használhatók új anyag feldolgozásakor vagy összefoglalás során. Fejezetenként egy-egy prezentáció készült, amely tartalmazza az elméleti anyagokat és a mintapéldákat (megoldással). Használatukkal megoldható, hogy a tanulói munkafüzetet csak feladatmegoldáshoz használjuk, ezért ahol a modulvázlatban *tanulói munkafüzet* szerepel, ott helyette *bemutató* is értendő (külön nem tüntettük fel). Csoportmunka során is használhatók, amennyiben a csoportoknak a feladatkitűzés egyszerre történik. Ezen kívül készíthetünk diákjainknak feladatlapokat a tanári anyagot felhasználva (egy feladatlapot el is készítettünk az első témakör mintapéldáiból).

Órabeosztás

Óraszám Óracím

1. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciói
2. – 3. Egyszerű feladatok szögfüggvények használatára
4. Összefüggések a szögfüggvények között
5. Feladatok megoldása
6. Nevezetes szögek szögfüggvényei
7. Feladatok nevezetes szögekre
8. Sokszögekkel kapcsolatos feladatok
9. Körrel kapcsolatos feladatok
10. Egyenlettel megoldható feladatok szögfüggvények alkalmazására

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciói.			
1	Bevezetés, ráhangolódás: hasonlóság szögtartósága, történeti vonatkozások)	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve I.
2	Definíciók	Frontális munka.	
3	A definíciók alkalmazása alapfeladatokban (mintapéldák csoportmunkában)	Számolás, kombinatív gondolkodás, számológép használata. Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok.	1–5. mintapélda, 9.1 feladatlap
4	Feladatok megoldása (csoportmunka)		1–28. feladatok közül válogatunk

II. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között.			
1.	Az összefüggések megismerése (javasolt módszer: szakértői mozaik, csoportmunka)	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás. Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, rendszerezés.	Tanulók könyve II.
2.	Mintapéldák az összefüggések alkalmazására (frontális).	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	6–7. mintapélda
3.	Feladatok megoldása (csoportmunka, differenciáltan)		30–33. feladat

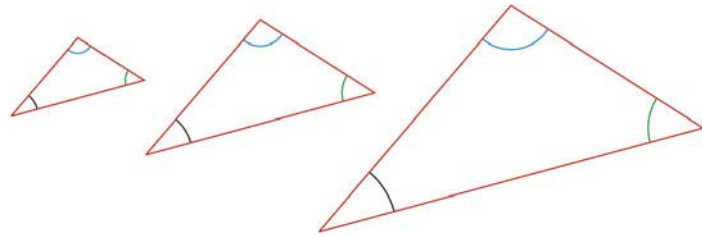
III. Nevezetes szögek szögfüggvényei.			
1.	Az összefüggések megismerése (frontális)	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve III.
2.	Mintapélda az összefüggések alkalmazására (frontális).		8. mintapélda
3.	Feladatok megoldása (csoportmunka, differenciáltan)	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás. A geometriai feladatok algebrai eszközökkel történő megoldási képességének fejlesztése. A valóság problémáinak modellezése. Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, rendszerezés.	34–45. feladatok közül válogatunk

IV. A szögfüggvények alkalmazásai.			
1.	Alapvető alkalmazások (javasolt módszer: szakértői mozaik, csoportmunka): trigonometrikus területképlet, köré írt kör sugara, szabályos sokszögek kerülete, területe, vektorok hajlásszöge.	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás. A geometriai feladatok algebrai eszközökkel történő megoldási képességének fejlesztése.	9., 10., 12., 13. mintapélda
2.	Feladatok megoldása (csoportmunka, differenciáltan)	A valóság problémáinak modellezése. Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, rendszerezés.	46–87. feladatok közül válogatunk

V. Szögfüggvények a gömbön (kiegészítő anyag)			
1.	Oldalak szögfüggvényei	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve, gömbkészlet
2.	Gömbi Pitagorasz-tétel		
3.	Feladatok megoldása		

I. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciói

Ha egy háromszöget nagyítunk vagy kicsinyítünk, a szögei nem változnak. Az aránytartás következtében a megfelelő oldalak aránya szintén állandó. Ebből arra következtethetünk, hogy a



háromszögben a szögek és az oldalak aránya között kapcsolat van. A trigonometria (háromszögtan) foglalkozik a háromszögek adatainak, a szögek és oldalak kapcsolatával.

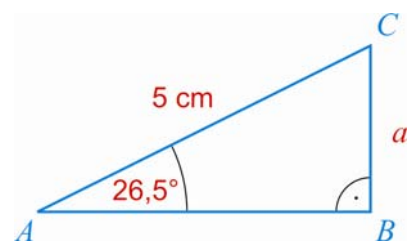
A szögek és távolságok kapcsolatát már az ókorban is tanulmányozták és használták Kína, India területén csakúgy, mint Egyiptomban az építkezéseknél. Kr. e. 3-400 körül már használtak hűrtáblázatokat, sőt szinusztáblázatokat is. Az első évszázadban hegyesszögekhez tartozó hűrok hosszát foglalták táblázatba, félfokként, és ismerték a két szög összegének és különbségének szögfüggvényeire vonatkozó képleteket (ma az emelt szintű érettségi tananyaga).

A trigonometria alapja a szögfüggvények definíciói. A hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszögben értelmezzük, és ezeket a definíciókat később kiterjesztjük más szögekre is (nem hegyesszögekre).

A hegyesszögek szinusza

Egy aluljáróból 17 méter hosszú, egyenes rámpa vezet fel a járda szintjére, és a rámpa egyenesen, $26,5^\circ$ -ban emelkedik a vízszinteshez képest. Ezekből az adatokból meghatározható, hogy milyen mélyen van az aluljáró. Segítségül hívjuk a valóság modelljét: jelen esetben az eredetihez hasonló derékszögű háromszöget.

Szerkesszünk egy $26,5^\circ$ -os derékszögű háromszöget például 5 cm-es átfogóval. A két háromszög szögei páronként egyenlők, ezért a két háromszög hasonló, tehát a megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Ha lemérjük az ABC háromszög $26,5^\circ$ -os



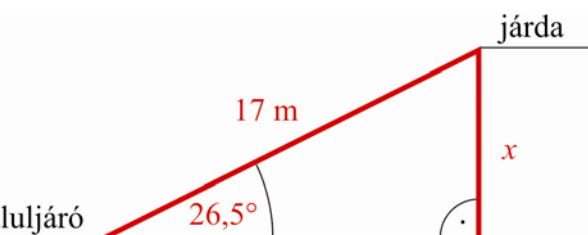
szöggel szemközti befogóját, akkor $a \approx 2,2$ cm-t kapunk. A keresett oldal hosszát x -szel jelölve:

$$\frac{x}{17} = \frac{a}{5}, \text{ innen } x \approx \frac{2,2 \cdot 17}{5} \approx 7,5 \text{ méter.}$$

Segítségül bármilyen $26,5^\circ$ -os derékszögű háromszöget hívhattunk volna, mert a szöggel szemközti befogó és az átfogó aránya a hasonlóság miatt állandó. Ezt a hányadost a hegyesszög szinuszának nevezzük, és jelen esetben 4 tizedesjegyre közelítő értéke $\approx 0,4462$.

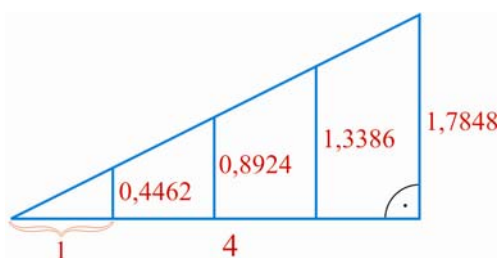
A szöggel szemközti befogó, az átfogó és a hegyesszög között a **szinusz** szögfüggvény teremti meg a kapcsolatot. A $26,5^\circ$ -os szög szinusza közelítőleg $0,4462$. Ez a szorzó-

szám adja meg, hogy egy ehhez hasonló háromszögben az átfogót mennyivel kell megszorozni, hogy megkapjuk a szöggel szemközti befogót: $\sin 26,5^\circ = \frac{x}{17}$, ahonnan $x = 17 \cdot \sin 26,5^\circ \approx 7,59$ méter.



Egy α hegyesszög szinusza az α szögű derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa.

$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$



$$\sin 26,5^\circ \approx \frac{0,4462}{1} = \frac{0,8924}{2} = \frac{1,3386}{3} = \frac{1,7848}{4} = \dots$$

A szögek szögfüggvényeinek értékét legegyszerűbben **zsebszámológép** segítségével tudjuk meghatározni. Számológépet használunk akkor is, amikor azt kell meghatároznunk, hogy egy adott szögfüggvényértékhez mekkora szög tartozik.

Jelenleg sokféle tudományos számológépet találunk a piacon. Leggyakoribbak a normál és a DAL típusúak. A normál típusúaknál előbb a számokat visszük be, majd a műveleteket választjuk ki a megfelelő gombokkal. A DAL típusú kalkulátoroknál a képleteket olyan módon visszük be a gépbe, ahogyan azt a papírra leírjuk (például kezel törtet, és a szorzásjelet sem kell bevinni, ha zárójeles kifejezést szorzunk).

A DAL típusú számológépeknél a műveletet előre jelezzük: $\boxed{\sin} 26,5^\circ \boxed{=}$

A normál típusúaknál a szögfüggvény értékét így határozzuk meg: $26,5 \boxed{\sin}$

„Visszakereséshez” ugyanezeket a billentyűket használjuk: a $\boxed{2ndF}$ vagy \boxed{Shift} billentyűvel elérhető második (\sin^{-1}) funkciójukat:

DAL gépen: $\boxed{2ndF} \boxed{\sin^{-1}} 26,5^\circ \boxed{=}$, normál típusú gépen: $26,5^\circ \boxed{2ndF} \boxed{\sin^{-1}}$.

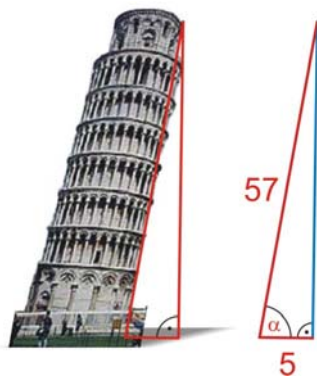
A szögek mértékegységei között a számológépen található \boxed{DRG} vagy \boxed{RAD} gombbal válhatunk. Amennyiben D üzemmódot jelöl a kijelző, a megadott adatokat a számológép foknak értelmezi. R esetében radiánnak, G esetén újfoknak.

A hegyesszögek koszinusza

A szög **szinusza** a derékszögű háromszögben a **szöggel szemközti** befogót és az átfogót kapcsolja össze. Hasonlóan egy szög **koszinusza** összekapcsolja a **szög melletti** befogót az átfogóval.



Az 57 méter magas pisai ferde torony árnyéka 5 méter délben. Ezekből az adatokból a koszinusz szögfüggvény segítségével kiszámíthatjuk, hogy mekkora szöget zár be a talajjal a torony. A szemléltetés kedvéért kicsit még jobban eldöntöttük a tornyot.



$$\cos \alpha = \frac{5}{57}$$

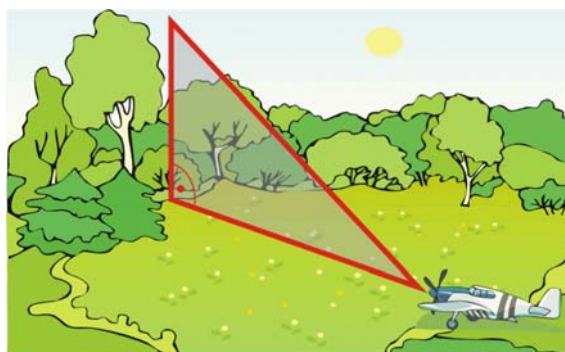
Zsebszámológéppel számolva:
 $\alpha \approx 85^\circ$.

Egy α hegyesszög koszinusza az α szögű derékszögű háromszögben az α szög melletti befogó és az átfogó hányadosa.

$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

A hegyesszögek tangense, kotangense

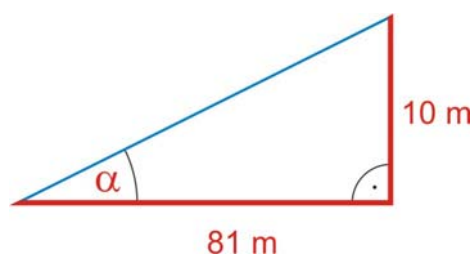
Egy permetező repülőgép olyan helyen áll, ahol gyorsítás után a fákig 81 méter szabad út áll rendelkezésre a felszálláshoz. A 81 méter alatt 10 méter magasra kell emelkednie. A pilótának felszálláskor az emelkedés szögét be kell állítania. Mekkora a kérdéses szög?



A feladatban a derékszögű háromszög két befogója és a hegyesszög közötti kapcsolatot a **tangens** szögfüggvény

teremti meg: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{81}$, ahonnan $\alpha \approx 7,04^\circ$. Ha a befo-

gók arányát fordítva írjuk fel, a szög **kotangensét** kapjuk.



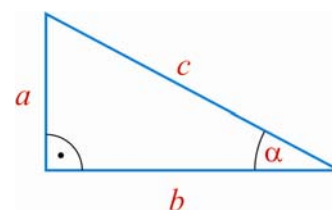
Egy α hegyesszög tangense az α szögű derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti és az α melletti befogó hányadosa.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

Egy α hegyesszög kotangense az α szögű derékszögű háromszögben az α szög melletti és az α szöggel szemközti befogó hányadosa.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

Összefoglalva: a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciói derékszögű háromszögben:



$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}} = \frac{b}{a}$$

A szögfüggvények értékeit általában négy tizedesjegyre kerekítjük, a fokokban megadott szögeket egy tizedesjegyre.

Régebben *szinusz-* és *koszinusz-táblázatokból* határozták meg a szögfüggvények értékét (a függvénytáblázatban is találunk ilyen jellegű táblázatokat), ma *számológépet* (kalkulátort) használunk. Vegyük észre, hogy **a szögfüggvényértékeknek nincs mértékegysége**, hiszen két távolság hányadosaként értelmeztük azokat.

Mintapélda₁

Határozzuk meg zsebszámológéppel $52^\circ 12'$ szögfüggvényeit!

Megoldás:

Egyes számológépeken nem kell átváltani a $12'$ -et fokká, külön billentyű található a fokperces adatbevitelre (DMS vagy $^\circ''''$ jelzéssel). Akinek nem ilyen a számológépe, előtte át kell váltani a $12'$ -et fokká: $\frac{12}{60} = 0,2^\circ$; $12' = 0,2^\circ$, és $52,2^\circ$ -ot kell beütnie a gépbe.

A számológép kiadja az eredményt: 0,790155.

$\sin 52^\circ 12'$



4 tizedesjegyre kerekítve $\sin 52^\circ 12' = 0,7902$.

Hasonlóan, a többi szögfüggvényérték: $\cos 52^\circ 12' = 0,6129$; $\operatorname{tg} 52^\circ 12' = 1,2892$.

A számológépen nincsen gomb, amivel ki tudnánk számolni $\operatorname{ctg} 52^\circ 12'$ értékét. A definíciókból azonban kiderül, hogy egy szög tangense és kotangense egymás reciproka, ezért

$$\operatorname{ctg} 52^\circ 12' = \frac{1}{\operatorname{tg} 52^\circ 12'} = 0,7757.$$

Megjegyzések:

DAL típusú számológépeken a művelet nyomógombja után a számok begépelése és az egyenlőségjel használata adja a szöget.

Amennyiben a szöget ívmértékben (radiánban) adják meg, a **RAD** billentyűvel állíthatjuk át a számológépet ívmértékre.

Mintapélda₂

Az emelkedő előtti közlekedési táblára 12%-ot írtak. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes irányú haladáshoz képest a lejtő emelkedése 12%. Hány fokos a lejtő emelkedési szöge?

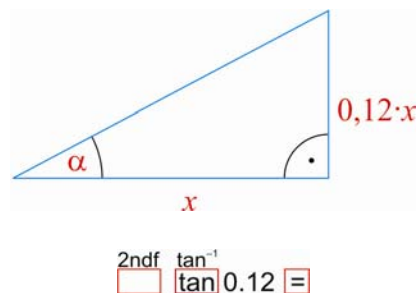


Megoldás:

Az adatok felhasználásával vázlatot készítünk. Kérdés: α nagysága. A megadott oldalak és α között a kapcsolatot a tangens szögfüggvény teremti meg:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,12 \cdot x}{x} = 0,12.$$

Visszakeresve: a szög $6,8428^\circ$, kerekítve $6,8^\circ$.

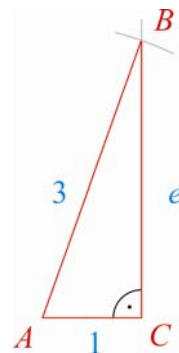
**Mintapélda₃**

Szerkessz olyan hegyesszöget, amelynek koszinusza $\frac{1}{3}$!

Megoldás:

Egy szög koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hányadosa, ezért e két távolság aránya 1:3. A megoldás az ABC derékszögű háromszög megszerkesztésére vezethető vissza, melynek egyik befogója 1 egység, átfogója pedig 3 egység hosszú. A szerkesztés egyik lehetséges módja:

1. $AC = 1$ egység felvétele;
2. AC -re C -ben merőleget állítunk (e);
3. az A középpontú, 3 egység sugarú kör kimetszi e -ből a B csúcsot.

**Mintapélda₄**

Számítsd ki a 55° -os szög kotangensét! Mekkora szögnek a kotangense 2,5?

Megoldás:

A definíciókból leolvasható, hogy **egy szög tangense és kotangense egymás reciproka**:

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Ez azért fontos, mert a számológépen nincsen gomb a szög kotangensének

kiszámítására. 55° kotangensét úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk a tangensét, és an-

nak vesszük a reciprokát: $\operatorname{tg} 55^\circ = 1,4281$. Ennek a számnak a reciproka $\operatorname{ctg} 55^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 55^\circ} =$

$= 0,7002$.

$\text{ctg } \alpha = 2,5$ megoldását is úgy kezdjük, hogy a szög kotangense helyett a tangensét számítjuk ki, amiből már számológéppel a szöget ki tudjuk számítani: $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{ctg } \alpha} = \frac{1}{2,5} = 0,4$.

Számológéppel $\alpha = 21,8^\circ$ adódik.

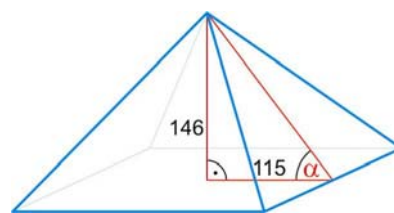
Mintapélda₅

A négyzet alapú Nagy Piramis magassága 146 méter, alapjának hossza 230 méter. Mekkora szöget zárnak be az oldallapok a talajjal?



Megoldás:

A vázlat mutatja az alaplap és az oldallap szögét és azt a derékszögű háromszöget, amelynek segítségével a keresett szög kiszámítható. A két befogót a tangens szögfüggvény kapcsolja össze: $\text{tg } \alpha = \frac{146}{115} \Rightarrow \alpha \approx 51,8^\circ$.



Módszertani megjegyzés: a következő feladatokban távolságokat kell kiszámítani szögfüggvények segítségével, adott szögek mellett.

Feladatok

1. Határozd meg a következő szögek összes szögfüggvényét számológép segítségével!

Figyelj a helyes kerekítésre!

- a) 10° ; b) 30° ; c) 45° ; d) 70° ; e) 20° ; f) 60° ;
g) $82,6^\circ$; h) $67,54^\circ$; i) $12^\circ 6'$; j) $77^\circ 77'$.

2. Mekkora az ismeretlen hegyesszög, ha

- a) $\sin \alpha = 0,1234$; b) $\sin \alpha = 0,3420$; c) $\cos \alpha = 0,6820$; d) $\cos \alpha = 0,0872$;
e) $\text{tg } \alpha = 0,3891$; f) $\text{tg } \alpha = 2,1445$; g) $\text{ctg } \alpha = 0,3245$; h) $\text{ctg } \alpha = 3,1102$?

Megoldás: a) $7,1^\circ$; b) $20,0^\circ$; c) $47,0^\circ$; d) $85,0^\circ$; e) $21,3^\circ$; f) $65,0^\circ$; g) $72,0^\circ$; h) $17,8^\circ$.

3. Igaz-e, hogy egy hegyesszög szinusza és koszinusza mindig 1-nél kisebb szám? Indokold a választ! Elmondható-e ugyanez a hegyesszögek tangensére és kotangensére?


Megoldás:

A szinusz és a koszinusz egynél kisebb, mert befogó és átfogó hányadosaként értelmezzük. Mivel az átfogó hosszabb a befogónál, a $\frac{\text{befogó}}{\text{átfogó}}$ arány mindig kisebb 1-nél. Tangens és kotangens esetén ilyen korlátozást nem találunk.


 4. Szerkessz hegyesszöget, amelynek

- a) szinusza 0,8; b) szinusza $\frac{1}{2}$; c) koszinusza 0,3; d) koszinusza $\frac{3}{8}$;
 e) tangense 2; f) tangense $\frac{4}{3}$; g) kotangense 1,6; h) kotangense $\frac{5}{12}$!


Megoldás: A 3. mintapélda alapján, derékszögű háromszög szerkesztésével.

 5. Adott a derékszögű háromszög két befogója: $a = 4,3$ cm, $b = 5,4$ cm. Mekkora a háromszög szögei?

Megoldás: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4,3}{5,4}$, ahonnan $\alpha \approx 38,5^\circ$. A másik hegyesszög $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 51,5^\circ$.

 6. A derékszögű háromszög 26 cm-es befogóján 32° -os szög nyugszik. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

Megoldás: $r = \frac{c}{2}$; $\cos 32^\circ = \frac{26}{c}$, ahonnan $c = \frac{26}{\cos 32^\circ} \approx 30,66$, a sugár $r \approx 15,4$ cm.

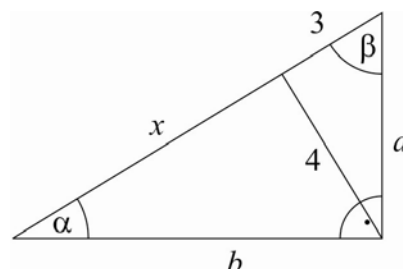
 7. Derékszögű háromszög 4 centiméteres magassága az átfogóból egy 3 centiméteres szakaszt vág le. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

Megoldás:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = 53,1^\circ. \quad \alpha = 90^\circ - \beta = 36,9^\circ.$$

$$b = \frac{4}{\sin \alpha} \approx 6,7 \text{ cm}, \quad a = \frac{4}{\sin \beta}; \quad a \approx 5 \text{ cm},$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}; \quad c \approx 8,3 \text{ cm}.$$



Megjegyzés: a értéke pontosan 5, hiszen pitagoraszói számhármass szerepel a feladatban.

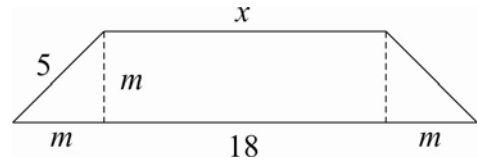
- 8.** Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 18 cm, a rajta fekvő szögek 45° -osak, a száruk hossza 5 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

Megoldás:

A 45° -os derékszögű háromszög speciális, befogói egyenlők és $5 = m\sqrt{2}$, ahonnan

$m = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54$ (cm). $x = 18 - 2m \approx 10,93$ (cm). A kerület $K = 38,93$ cm, a terület

$$T = \frac{18 + 10,93}{2} \cdot 3,54 \approx 51,21; T \approx 51,21 \text{ cm}^2.$$

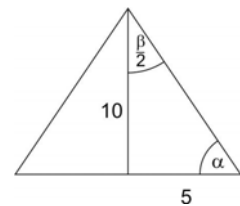


- 9.** a) Egy lejtő hossza 122 méter, hajlásszöge $7^\circ 35'$. Milyen magasra visz a lejtő?
b) Egy lejtő hossza a , hajlásszöge α . Milyen magasra visz a lejtő?

Megoldás: a) $h = 122 \cdot \sin 7^\circ 35' \approx 16,1$ m; b) $h = a \cdot \sin \alpha$.

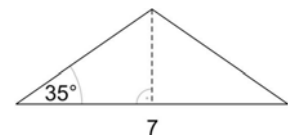
- 10.** Egyenlőszárú háromszög alapja 10 cm, az alaphoz tartozó magasság szintén 10 cm. Mekkora a háromszög szögei?

Megoldás: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$. $\beta = 180^\circ - 2\alpha \approx 53,2^\circ$.



- 11.** Mekkora a faltól a tető gerincéig tartó tetőgerendák hossza, ha az egyenlőszárú háromszög keresztmetszetű tető szélessége 7 méter, és a gerendák hajlásszöge a vízszinteshez képest 35° ?

Megoldás: $\frac{3,5}{\cos 35^\circ} \approx 4,27$, a keresett távolság 4,27 méter.



- 12.** Egyenlőszárú háromszögben a száruk hajlásszöge 70° , az alap 10,8 cm. Mekkora a háromszög kerülete és területe?

Megoldás:

A szár hossza $\frac{5,4}{\sin 35^\circ} \approx 9,4$ cm, a kerület $10,8 + 2 \cdot 9,4 \approx 29,6$ cm. A háromszög magassága

sága $\frac{5,4}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 7,7$ cm, területe $\frac{7,7 \cdot 10,8}{2} \approx 41,6 \text{ cm}^2$.

- 13.** Egy létra lábainak távolsága a talajon 86 cm, és 15° -ig hajtottuk szét a lábait. Hány fokú a létra, ha a fokok 45 cm-enként követik egymást? Milyen magasan van a teteje a talajtól számítva, ha szétnyitják?

Megoldás:

A létra hossza $l = \frac{43}{\sin 7,5^\circ} \approx 329,4$ cm. $\frac{329}{45} \approx 7,31$, vagyis a létra 7 fokú.

$\frac{43}{m} = \operatorname{tg} 75^\circ \Rightarrow m = \frac{43}{\operatorname{tg} 75^\circ} \approx 326,6$. A létra teteje kb. 327 cm magasan van.

- 14.** Egy téglalap oldalai 10 cm és 15 cm. Mekkora szöget zárnak be az oldalak az átlóval?

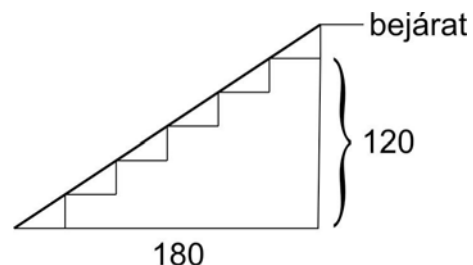
Megoldás: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 33,7^\circ$. A keresett szögek $33,7^\circ$ és $90 - 33,7^\circ = 56,3^\circ$.

- 15.** Egy ablak méretei: 80 cm x 150 cm. Mekkora szöget zárnak be az ablakra ragasztott, átlósan haladó egyenes ragasztószalag-csíkok egymással?

Megoldás: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{40}{75}$, ahonnan $\alpha \approx 56,1^\circ$. Ez a csíkok közepén futó egyenesek hajlásszöge, ami megegyezik a keresett szöggel.

- 16.** Akadálymentesítéshez egy lépcsőre rámpát terveznek. A lépcsők magassága 20 cm, hosszuk 30 cm, és 5 lépcső visz fel a járdáról a bejáratához (a 6. a bejárat szintje). Milyen hosszú legyen a rámpa? Mekkora szöget zár be a járdával?

Megoldás: 216,3 cm és $33,7^\circ$.



- 17.** Az Eiffel-torony magassága 326 m, kilengése a legnagyobb szélben sem haladja meg a 12cm-t. Mekkora a torony tetejének a függőlegessel bezárt szöge, ha a kilengés 12cm?

Megoldás: $0,02^\circ$.

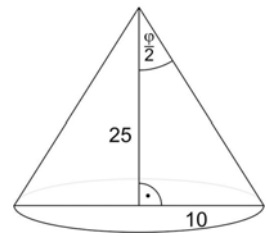
Megjegyzés: ez egy nagyon jó tervezői eredmény. Különböző tornyok kilengését érdeklődő tanulók az interneten is kutathatják.

- 18.** Az Eiffel-toronytól a talajon, a toronytól 150 méterre áll egy autó. Mekkora szögben látszik a torony emeleteiről, ha az emeletek 54m, 115m és 274 m magasan találhatók?

Megoldás: A keresett szögek $70,2^\circ$, $52,5^\circ$ és $28,7^\circ$.

- 19.** Egy forgáskúp alapkörének sugara 10 cm, testmagassága 25 cm. Mekkora a kúp nyílásszöge?

Megoldás: $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow$ a keresett szög $\varphi \approx 43,6^\circ$.



- 20.** Egy piramisról tudjuk, hogy alapja egy 130 m illetve 150 m oldalhosszúságú téglalap, magassága 18 m. Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal?

Megoldás: Tangens szögfüggvények alkalmazásával a keresett szögek $13,5^\circ$ és $15,5^\circ$.

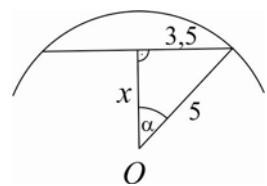
- 21.** Mekkora szögben látszik egy 7 cm-es húr az 5 cm sugarú kör O középpontjából, és milyen távol van az O -tól? Mennyi a megfelelő körívhez tartozó körcikk területe és ívhossza?

Megoldás:

$\sin \alpha = \frac{3,5}{5} \Rightarrow \alpha \approx 44,4^\circ$, a körcikk középponti szöge $88,8^\circ$. A ke-

resett távolság $x = 5 \cos \alpha \approx 3,6$ cm. A körcikk területe

$T = \frac{r^2 \pi \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} \approx 19,4 \text{ cm}^2$, az ívhossz $i = \frac{2r\pi \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} \approx 7,8$ cm.



- 22.** Mekkora szögben látszik egy 10 cm-es húr a 8 cm sugarú kör O középpontjából, és milyen távol van az O -tól? Mennyi a megfelelő körívhez tartozó körcikk területe és ívhossza?

Megoldás: $77,4^\circ$, 6,2 cm, $43,2 \text{ cm}^2$, 10,8 cm.

- 23.** Egy 6,9 cm sugarú körben mekkora szögben látszik az átmérő egyik végpontjából az a 8 cm hosszú húr, amely az átmérő másik végpontjából indul ki?

Megoldás: 35,4°.

- 24.** Egy rombusz egyik átlója 10,2 cm, oldala 6,8 cm. Mekkora a szögei?

Megoldás: Koszinusz szögfüggvénnyel kiszámítható, hogy a szögek 82,8° és 97,2°.

- 25.** Egy rombusz átlói 16 cm és 12,6 cm. Mekkora az oldala, területe és a szögei?

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és felezik a szögeket. A keresett adatok 10,18 cm, 100,8 cm², 76,4° és 103,6°.

- 26.** Egy szimmetrikus trapéz alapjai 6 cm és 10 cm, szárjai 5 cm hosszúak. Mekkora a trapéz szögei?

Megoldás: 66,4° és 113,6°.

- 27.** Egy szimmetrikus trapéz alapjai 16 cm és 10 cm, szárjai 8 cm hosszúak. Mekkora a trapéz szögei?

Megoldás: 68,0° és 112,0°.

- 28.** Egy trapéz hosszabbik alapja 21 cm, az ezen fekvő szögek 32° és 44°-osak. A 44°-os szög melletti szár hossza 6 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

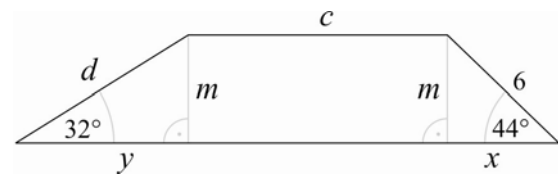
Megoldás:

$$m = 6 \cdot \sin 44^\circ \approx 4,17;$$

$$x = 6 \cdot \cos 44^\circ \approx 4,32; \quad d = \frac{m}{\sin 32^\circ} \approx 7,87;$$

$$y = d \cos 32^\circ \approx 6,67; \quad c = 21 - (x + y) \approx 10,01.$$

A keresett értékek: $K = 44,9$ cm, $T = 64,7$ cm².



II. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

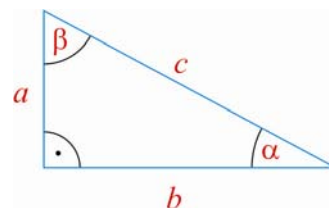
Módszertani megjegyzés: Az összefüggéseket megtanulhatjuk csoportmunkában, szakértői mozaik módszerével. Így a tanulók egymást tanítják a tanulói munkafüzet segítségével.

Összefüggés egy szög tangense és kotangense között

Egy szög szögfüggvényei között kapcsolatok vannak.

Például – amint már láttuk – a derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

és $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.



Egy hegyesszög tangense és kotangense egymás reciproká:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Más alakban felírva az összefüggést: $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$.

Pótszögek szögfüggvényei

Legyen a derékszögű háromszög két hegyesszöge α és β . Írjuk fel az α és β szögek szögfüggvényeit, és keressünk egyenlőket közöttük!

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$
$\sin \beta = \frac{b}{c}$	$\cos \beta = \frac{a}{c}$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$	$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$

Derékszögű háromszögben a két hegyesszög összege 90° , ezért β felírható $\beta = 90^\circ - \alpha$ alakban. α -t és β -t egymás **pótszögének** nevezzük.

Egy szög és pótszögének szögfüggvényei között a következő összefüggések találhatók:

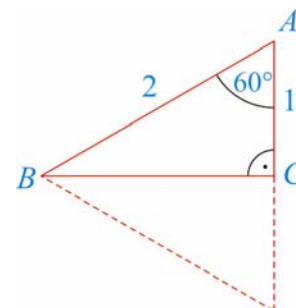
$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha).$$

Pitagoraszi azonosság

Láttuk, hogy egy szög tangense és kotangense között egyszerű kapcsolat áll fenn: egymás reciprokai. Vizsgáljuk meg, mi lehet a kapcsolat egy szög szinusa és koszinusa között!

Legyen a 60° -os derékszögű háromszög átfogója 2 egység. Írjuk fel a háromszög másik két oldalának hosszát!



Mivel az ABC háromszög „fél egyenlő oldalú”, ezért $AC = 1$, a BC

befogó Pitagorasz tétele szerint $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3}$.

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{négyzetük összege } \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

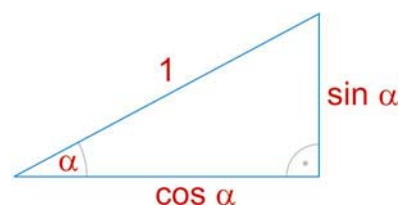
A kapott összefüggés minden hegyesszögre igaz.

Egy szög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Ezt az összefüggést **négyzetes összefüggésnek** vagy **Pitagoraszi trigonometrikus azonosságnak** hívjuk.

Az ábra szerint abban a derékszögű háromszögben, amelynek átfogója 1 egység, az oldalak hossza $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$. Ebből könnyen igazolható a négyzetes összefüggés, bármely hegyesszögre.



Módszertani megjegyzés:

Vigyázat! Célszerű felhívni tanulóink figyelmét a következőre: nem szabad azt a hibás következtetést levonni, hogy $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Az összefüggés a szögfüggvényértékek négyzetére vonatkozik. Például $\sin 20^\circ \approx 0,3420$, $\cos 20^\circ \approx 0,9397$, és $\sin 20^\circ + \cos 20^\circ \approx 1,2817$.

A tangens és kotangens szögfüggvények kapcsolata a szinusz és koszinusz szögfüggvényekkel

A szögfüggvények értelmezésénél láttuk, hogy $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ és $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Ezeket egymással

elosztva a következőre jutunk: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$, ami éppen α tangense, és a számlálót

és a nevezőt felcserélve α kotangensét kapjuk. Fennáll a következő két azonosság:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Ezeknek az azonosságoknak nagy jelentőségük lesz később, amikor a szögfüggvények értelmezését kiterjesztjük nem hegyesszögekre is.

Mintapélda₆

Mennyi a következő kifejezések pontos értéke?

a) $\sin 50^\circ + \text{tg} 10^\circ \cdot \text{ctg} 10^\circ - \cos 40^\circ$

Megoldás:

50° és 40° egymás pótszögei. A pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggések szerint $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$, ezért különbségük 0. $\text{tg} \alpha \cdot \text{ctg} \alpha = 1$, ezért $\text{tg} 10^\circ \cdot \text{ctg} 10^\circ = 1$. A kifejezés értéke 1.

b) $\sin^2 50^\circ - 2 \sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ$

Megoldás:

Az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ nevezetes azonosság szerint

$$\sin^2 50^\circ - 2 \sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ = (\sin 50^\circ - \cos 40^\circ)^2 = 0^2 = 0.$$

c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Megoldás:

A nevezetes azonosság segítségével átalakítható a kifejezés:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \end{aligned}$$

Mintapélda₇

Mutassuk meg, hogy minden α hegyesszögre fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Megoldás:

A bal oldalt átalakítjuk a tanult összefüggések alkalmazásával: $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} =$


$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ vagyis teljesül az egyenlőség.}$$

Feladatok

 **30.** Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét számológép használata nélkül!


a) $\sin^2 30^\circ - 2 + \cos^2 30^\circ$; b) $1 - \sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ$; c) $1 - \sin^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3}$;
 d) $\cos^2 63^\circ + \cos^2 27^\circ$; e) $\sin 20^\circ - \cos 70^\circ$; f) $\sin^2 \frac{3\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{5} + 2$.

Megoldás: a) -1; b) 0; c) 0; d) 1; e) 0; f) 3.

 **31.** Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét számológép használata nélkül:

a) $(\sin 10^\circ + \cos 10^\circ)^2 + (\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2$;
 b) $\sin 25^\circ \cdot \cos 65^\circ + \sin 65^\circ \cdot \cos 25^\circ$;
 c) $1 - \cos^2 32^\circ - 2 \sin 32^\circ \cdot \cos 58^\circ + \cos^2 58^\circ$.

Megoldás: a) 2; b) 1; c) 0.

 **32.** Igazak-e minden α hegyesszögre a következő egyenlőségek:

$$\text{a) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha ;$$

$$\text{b) } \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} ;$$

$$\text{c) } \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 ;$$

$$\text{d) } \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} .$$

Megoldás: a) igen; b) nem; c) igen; d) igen.

 **33.** Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét:

$$\text{a) } (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha) + 2 \cos^2 \alpha ;$$

$$\text{b) } \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} ;$$

$$\text{c) } \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha ;$$

$$\text{d) } \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} .$$

Megoldás: a) 1; b) -1; c) 1; d) 1.

III. Nevezetes szögek szögfüggvényei

Korábban megtanultuk, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, és az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$. Ezekkel az ismeretekkel meghatározhatjuk nevezetes szögek, a 30° , 45° és 60° szögfüggvényeinek pontos értékeit.

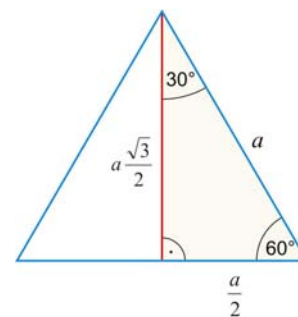
30° és 60° szögfüggvényei

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

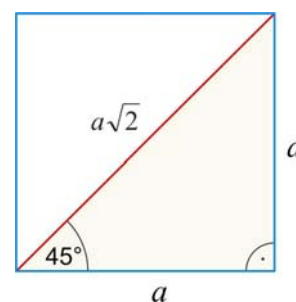


A számításban kihasználtuk a hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját, a pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggéseket, és gyöktelenítettünk is.

45° szögfüggvényei

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$$



A nevezetes szögek szögfüggvényeit táblázatba is foglalhatjuk. A szögeket gyakran (például fizikai feladatokban) ívmértékben (radiánban) adják meg.

α		$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Mintapélda₃

a) Mennyi a következő kifejezés pontos értéke:

$$\operatorname{tg} 45^\circ + \sin^2 18^\circ - \cos 20^\circ - 4 \cos 60^\circ + 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos^2 18^\circ + \sin 70^\circ ?$$

Megoldás:

Alkalmazzuk az eddig tanult azonosságokat és a nevezetes szögek szögfüggvényeit!

Érdemes átcsoportosítani a kifejezést, hogy jobban lássuk az összetartozó értékeket:


$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} 45^\circ + \underbrace{\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ}_1 - 4 \cos 60^\circ + 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \underbrace{\sin 70^\circ - \cos 20^\circ}_{\sin 70^\circ} = \\ & = 1 + 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b) Milyen szög szinuszával egyenlő a következő kifejezés: $\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}$?

Megoldás:

$$\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}} = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Ez } \frac{\pi}{3} \text{ szinusza.}$$

Feladatok

 **34.** 30° -os derékszögű háromszögben az átfogó hossza $6 \cdot \sqrt{3}$. Mekkora a két befogó pontos hossza?

Megoldás: 9 és $3\sqrt{3}$.

35. 30° -os derékszögű háromszögben az átfogó hossza $10 \cdot \sqrt{12}$. Mekkora a két befogó pontos hossza?

Megoldás: $10\sqrt{3}$ és 30.

36. 30° -os derékszögű háromszögben az átfogó hossza $a \cdot \sqrt{3}$. Mekkora a két befogó pontos hossza?

Megoldás: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ és $\frac{a}{2}$.

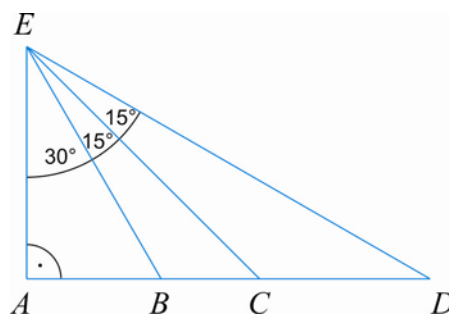
37. Mekkora az AB , BC és CD szakasz hossza, ha $EB = 12$ cm?

Megoldás:

$$AB = 6 \text{ cm}, AC = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm},$$

$$BC = 6(\sqrt{3} - 1) \approx 4,39 \text{ cm}, AD = 18 \text{ cm},$$

$$CD = 7,61 \text{ cm}.$$

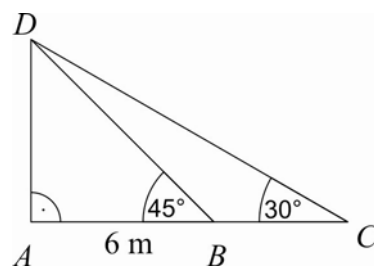


38. Az AD oszlop teteje a talajon az A -tól 6 méterre levő B pontból 45° -os szögben látszik. Az AB irányban addig távolodunk az oszloptól a talajon, amíg azt 30° -os szögben nem látjuk. Milyen messze vagyunk az oszloptól?

Megoldás:

$$DAB \text{ speciális háromszög, } AD = AB = 6. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{AC},$$

$$\text{ahonnan } AC = 6\sqrt{3}; AC \approx 10,39 \text{ m}.$$



39. Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $2 \cos 60^\circ + 3 \sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$; b) $\sin^2 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ + \sin^2 30^\circ$;

c) $\frac{2 - \operatorname{tg} 45^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}$; d) $(\sin 60^\circ + \cos 30^\circ) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$;

e) $[(\cos 60^\circ + \sin 60^\circ)^2 - 1] \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

Megoldás: a) 3,5; b) 0; c) $\sqrt{3} - 1$; d) 1; e) 1,5.

Módszertani megjegyzés: a következő feladatok speciális háromszögekre vonatkoznak. Segítenek elmélyíteni a nevezetes szögekkel kapcsolatos szögfüggvényértékeket.

40. Egy 10 cm sugarú körben milyen messze vannak egymástól a 120° -os és a 90° -os középponti szöghöz tartozó, egymással párhuzamos húrok végpontjai, ha a kör középpontja a) a húrok között helyezkedik el; b) nem a húrok között helyezkedik el?

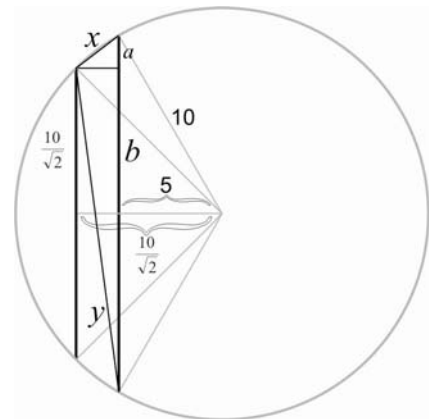
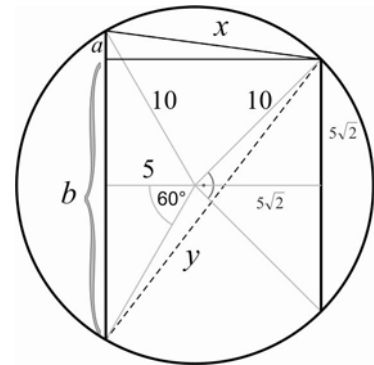
Megoldás:

a) Az ábrán a -val jelölt szakasz hossza $\frac{10\sqrt{3}}{2} - \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2} = 5(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 1,6$ cm. A húrok közötti távolság $5 + 5\sqrt{2} \approx 12,1$ cm. Pitagorasztétellel számítható $x = \sqrt{1,6^2 + 12,1^2} \approx 12,2$ cm.

b hossza $5\sqrt{3} + 5\sqrt{2} = 5(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 15,8$ cm, a

Pitagorasztételt felírva $y = \sqrt{15,8^2 + 12,1^2} \approx 19,9$ cm.

b) Hasonlóan megoldható a feladat. A húrok közötti távolság $5(\sqrt{2} - 1) \approx 2,1$, $x = 2,6$ cm, $y = 15,9$ cm.

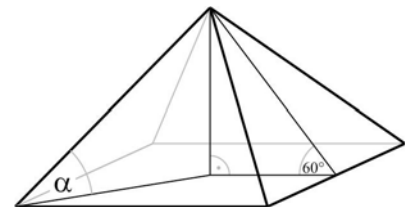



41. Egy négyzet alapú gúla alaplapjának és oldallapjának hajlásszöge 60° . Mekkora az oldalél és az alaplap hajlásszöge?

Megoldás:

a -val jelölve a gúla alapélének felét és m -mel a magasságát, $\operatorname{tg}60^\circ = \frac{m}{a}$. A keresett szögre

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg}60^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ ahonnan a keresett szög } \alpha = 50,8^\circ.$$




-  42. Egy négyzet alapú gúla alaplapjának és oldallapjának hajlásszöge 45° . Mekkora az oldalél és az alaplap hajlásszöge?

Megoldás:


Jelölve a a gúla alapélének felét, és m a magasságát; $m = a$. A keresett szögre

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ahonnan a keresett szög } 35,3^\circ.$$

-  43. Egy 10 cm sugarú kör húrja a középponttól 5 cm-re található. Számítsd ki a húrhoz tartozó körszelet kerületét és területét!


Megoldás:

A középponti szög 120° , vagyis harmadkör területéből kell kivonni a 120° -os egyenlőszárú háromszög területét, illetve harmadkör ívéhez adjuk a húr hosszát. Az eredmények 38,26 cm és $61,42 \text{ cm}^2$.

-  44. Egy 12 cm sugarú kör húrja a középponttól $6\sqrt{2}$ cm-re található. Számítsd ki a húrhoz tartozó körszelet kerületét és területét!

Megoldás:

A középponti szög 45° , vagyis negyedkör területéből kell kivonni egyenlőszárú derékszögű háromszög területét, illetve negyedkör ívéhez adjuk a húr hosszát. Az eredmények 35,82 cm és $41,09 \text{ cm}^2$.

-  45. Egy 20 cm hosszúságú húr a kör középpontjától $10\sqrt{3}$ cm-re található. Számítsd ki a húrhoz tartozó körszelet kerületét és területét!

Megoldás:

A középponti szög 60° , vagyis hatodkör területéből kell kivonni szabályos háromszög területét, illetve hatodkör ívéhez adjuk a húr hosszát. Az eredmények 40,94cm és $36,23\text{cm}^2$.

IV. A szögfüggvények alkalmazásai

A szögfüggvényeket széles körben alkalmazzák mind a természettudományok, mind a hétköznapi élet területein. A következőkben erre látunk példákat, feladatokat.

Módszertani megjegyzés: Javasoljuk szakértői mozaik módszerével átvenni a 9, 10, 12 és 13. mintapéldákat.

Mintapélda₉

Határozd meg a háromszög területét, ha két oldala 7 cm és 10 cm, a köztük levő szög 28° -os!

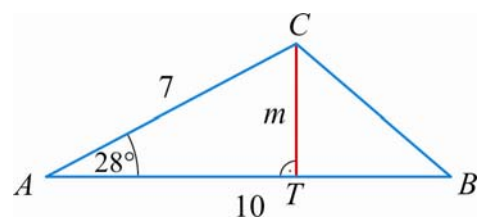
Megoldás:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \text{oldal} \cdot \text{oldalhoz tartozó magasság}$$

Az AB oldalhoz tartozó magasságot az ACT derékszögű háromszögből számítjuk ki:

$$\sin 28^\circ = \frac{m}{7}, \text{ ahonnan } m = 7 \sin 28^\circ.$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \sin 28^\circ \approx 16,43 \text{ cm}^2.$$



A kapott összefüggés általánosan is igaz, mindenféle háromszögre: **a háromszög területe kifejezhető úgy is, hogy összeszorozzuk két oldalát a közbezárt szög szinuszával, és a szorzatot kettővel osztjuk.**

Ha az a és b oldalak által közbezárt szöget γ -val jelöljük, akkor $m_a = b \cdot \sin \gamma$, és így

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

A háromszög trigonometrikus területképlete:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

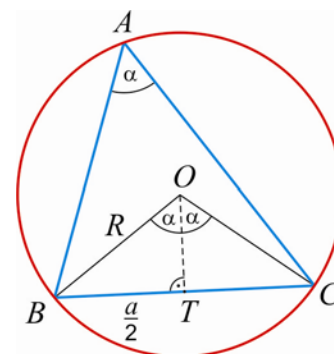
Módszertani megjegyzés: az összefüggés teljes körű használata akkor válik lehetségessé, ha majd a szögfüggvényeket értelmezzük nem hegyesszögekre is. A részleges definíció nem befolyásolja a képlet használatát.

Mintapélda₁₀

Fejezzük ki a hegyesszögű háromszög köré írt kör sugarát egy oldalának és egy szögének segítségével!

Megoldás:

A köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, és egyenlő távol van a csúcsoktól. Legyen α az A csúcsnál levő szög. BOC szög a kerületi és középponti szögek tétele miatt α kétszerese, amit felez a BOC háromszög magassága.



BOT derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$. Ebből a köré

írt kör sugara $R = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha}$. Ez az összefüggés bármelyik oldalra és a vele szemközti szögre felírható. Átrendezve ezt az egyenlőtlenséget, $a = 2R \sin \alpha$, vagyis az R sugarú körben egy a húr hossza az átmérő és a húrhoz tartozó kerületi szög szinuszának szorzatával egyenlő.

Módszertani megjegyzés: Tompaszögű háromszögre is érvényes az összefüggés, csak a tompaszögek szögfüggvényeit később értelmezzük. A köré írt kör sugarát felírva több oldalra a szinusztétel (11-edikes anyag) könnyen levezethető. A kapott képlet nem középszintű érettségi anyag, ezért került alkalmazásként mintapéldába.

Feladatok


 46. Határozd meg a háromszög területét, ha a szokásos jelölésekkel ...

a) $a = 156$ cm, $b = 2,6$ m, $\gamma = 68^\circ$;

b) $a = 42$ cm, $b = 32,7$ cm, $\gamma = 39^\circ$.

Megoldás: a) $1,88$ m²; b) $432,15$ cm².

Módszertani megjegyzés: A következő feladatban magasság- és befogótételt alkalmazunk

 47. Mekkora az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körszelet kerülete és területe, ha

a) $r = 5$ cm; $\alpha = 70^\circ$;

b) $r = 12,3$ dm; $\alpha = 38^\circ$;

c) $r = 0,3$ cm; $\alpha = 52^\circ$?

Megoldás: a) $11,84$ cm; $3,53$ cm²; b) $16,17$ dm; $3,60$ dm²; c) $5,35$ mm; $0,54$ mm².

48. Mekkora az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körszelet kerülete és területe?

$$\text{Megoldás: } K = r \left(\frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad T = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha \right).$$

49. Egy l hosszúságú húr x távolságra van a kör középpontjától. Mekkora a húr által lemet-szett kisebb körszelet kerülete és területe, ha

a) $l = 7$ cm; $x = 2,5$ cm; b) $l = 12$ cm; $x = 2$ cm; c) $l = 10,9$ cm; $x = 21$ cm?

Megoldás:

- a) A középponti szög $108,9^\circ$, a sugár $4,3$ cm, $T = 8,8$ cm², $K = 15,2$ cm;
 b) A középponti szög $143,2^\circ$, a sugár $6,3$ cm, $T = 37,7$ cm², $K = 27,7$ cm;
 c) A középponti szög $29,1^\circ$, a sugár $21,7$ cm, $T = 5,08$ cm², $K = 21,9$ cm.

50. Milyen hosszúak a szabályos ötszög átlói, ha köré írható körének sugara

a) 12 cm; b) $18,3$ dm?

Megoldás: a) $22,8$ cm; b) $34,8$ cm.

51. Milyen hosszúak a szabályos ötszög átlói, ha oldalának hossza

a) 8 cm; b) $11,8$ cm?

Megoldás: a) $12,9$ cm; b) $19,1$ cm.

52. Az ötszög 5 átlója egy kisebb ötszöget zár közre. Mekkora ennek az ötszögnek az oldalhossza, ha az eredeti ötszög minden oldala a) 20 cm; b) $12,8$ m; c) a ?

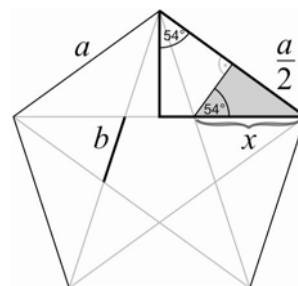
Megoldás:

Kezdjük az utolsó feladattal, és a végeredményeket behelyettesítéssel adjuk meg.

c) A szimmetriákat kihasználva $x = \frac{a}{2 \sin 54^\circ}$;

$$b = 2a \sin 54^\circ - \frac{a}{\sin 54^\circ} = a \left(2 \sin 54^\circ - \frac{1}{\sin 54^\circ} \right).$$

eredmények: a) $7,6$ cm; b) $4,89$ m.



Mintapélda₁₁

Egy kör kerületét a beleírt szabályos hatszög, illetve a beleírt szabályos hatvanszög kerületével közelítjük. Hány százalékos hibával közelítünk az egyes esetekben?

Megoldás:

A hiba az eltérés és a kör kerületének aránya százalékban kifejezve. A kör kerülete $2r\pi$, π -t vegyük 3,141592654-nek (gépi adat). A beleírt hatszög kerülete $6r$, a hiba

$$100 \cdot \left(\frac{2r\pi - 6r}{2r\pi} \right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{6r}{2r\pi} \right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{3}{\pi} \right) = 4,51\% .$$

A beleírt hatvanszög egy oldala $2 \cdot r \cdot \sin \frac{180^\circ}{60} = 2 \cdot r \cdot \sin 3^\circ$. A hiba

$$100 \cdot \left(\frac{2r\pi - 120r \sin 3^\circ}{2r\pi} \right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{60 \sin 3^\circ}{\pi} \right) = 0,05\% .$$

Mintapélda₁₂

Határozd meg a szabályos tízszög kerületét és területét, ha 10 cm sugarú kör írható köré!

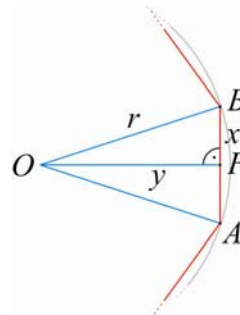
Megoldás:

A tízszög 10 darab egybevágó háromszögre bontható a csúcsaiba húzott sugarakkal. Két szomszédos sugár által bezárt szög 36° . A terület kiszámítható a trigonometrikus területképlet segítségével:

$$T = 10 \cdot \frac{r^2 \sin 36^\circ}{2} \approx 293,9 \text{ cm}^2 .$$

A kerület meghatározásához előbb kiszámítjuk x hosszát:

$$x = r \cdot \sin 18^\circ \approx 3,1 \text{ cm}, \quad K = 20x \approx 62 \text{ cm} .$$



Feladatok

53. Az r sugarú kör területéből mekkora területű rész marad ki, ha n oldalú szabályos sokszöget írunk bele, és
- a) $r = 20 \text{ cm}; n = 8$; b) $r = 15 \text{ cm}; n = 10$;
 c) $r = 2,5 \text{ dm}; n = 12$? Oldd meg a feladatot általánosan is!

Megoldás:

$$\text{Általánosan } T_{KÜL} = r^2 \left(\pi - \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \right) . \text{ Végeredmények: a) } 125,3 \text{ cm}^2; \text{ b) } 45,6 \text{ cm}^2;$$

$$\text{c) } 0,88 \text{ dm}^2 .$$

54. A kör területének hány százaléka marad ki, ha bele n oldalú szabályos sokszöget írunk, és a) $n = 6$; b) $n = 8$; c) $n = 10$; d) $n = 16$?

Megoldás:

$$\text{Általánosan a keresett arány } \frac{T_o - T_{\text{SOKSZÖG}}}{T_o} \cdot 100 = \left(1 - \frac{T_{\text{SOKSZÖG}}}{T_o}\right) \cdot 100.$$

$$a) 100 \cdot \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right) \approx 17,3\%; \quad b) 100 \cdot \left(1 - \frac{4 \sin 45^\circ}{\pi}\right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) \approx 10,0\%;$$

$$c) 100 \cdot \left(1 - \frac{5 \sin 36^\circ}{\pi}\right) \approx 6,5\%; \quad d) 100 \cdot \left(1 - \frac{8 \sin 22,5^\circ}{\pi}\right) \approx 2,6\%.$$

55. Mekkora annak a 12 cm oldalhosszúságú szabályos sokszögnek a területe, amelynek oldalszáma a) 5; b) 8; c) 12?

Megoldás:

$$\text{Általánosan } T = \frac{a^2 \cdot n}{4 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}. \quad \text{Végeredmények: a) } 247,7 \text{ cm}^2; \quad b) 695,29 \text{ cm}^2; \quad c) 1612,2 \text{ cm}^2.$$

56. Közelítsük a kör kerületét a beleírt 20 oldalú, szabályos sokszög kerületével! Hány százalékos hibát vétünk?

$$\text{Megoldás: } K \approx 6,257r; \quad K_o \approx 6,283r. \quad \frac{K_o - K}{K_o} \approx 0,00414, \text{ a hiba körülbelül } 0,41\%.$$

57. Közelítsük a kör területét a beleírt 30 oldalú, szabályos sokszög területével! Hány százalékos hibát vétünk?

Megoldás: 0,18%.

58. Az ókorban a kör kerületét, végső soron π pontos értékét a köré írt és a beleírt, azonos oldalszámú szabályos sokszög kerületének átlagával közelítették.

- a) Keresd meg azt a $k(n, r)$ összefüggést, amely az r sugarú körbe írt n oldalú szabályos sokszög kerületét adja meg!
- b) Keresd meg azt a $K(n, r)$ összefüggést, amely az r sugarú kör köré írt n oldalú szabályos sokszög kerületét adja meg!

- c) Minél nagyobb n értéke, $\frac{k(n,1)+K(n,1)}{2}$ átlag annál jobban megközelíti az 1 egység sugarú kör kerületét, azaz 2π pontos értékét. Milyen n értékétől kezdve közelíti meg a tört értéke a 6,28318 értéket úgy, hogy az első 3 tizedesjegy értéke megfelelő?

Megoldás: a) $k = 2 \cdot n \cdot r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$; b) $K = 2 \cdot n \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$; c) $n = 28$.

Módszertani megjegyzés: Javasoljuk az Excel használatát vagy rövid program írását a küszöbszám meghatározásához.

Excel használatkor az A1 cellába írjuk az oldalszámot, és ekkor a használandó képletek: $=2*A1*\operatorname{SIN}(\operatorname{RADIÁN}(180)/A1)$ illetve $=2*A1*\operatorname{TAN}(\operatorname{RADIÁN}(180)/A1)$, és ezt a két cellát átlagoljuk.

Ha biztosan nem fognak informatikai eszközöket használni a gyerekek, akkor nagyon sok számolást igényel a c) megoldása. Ilyenkor célszerű feltenni így a kérdést: „Mutasd meg, hogy $n = 80$ -tól már az első három tizedesjegy megfelelő, ha a kerekítést is figyelembe vesszük.”

A következő feladat nem érettségi anyag.

 **59.** Számítsd ki α szögfüggvényeinek pontos értékét: a) $\alpha = 15^\circ$; b) $\alpha = 22,5^\circ$!

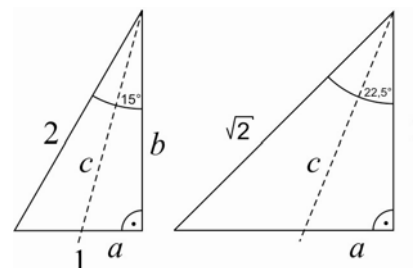
Megoldás:

Speciális háromszögekben alkalmazzuk a szögfelező-tételt.

- a) A szabályos háromszög magassága az oldal $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -

szere, ezért $b = \sqrt{3}$. A szögfelező tétel szerint

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}).$$



A 15° -os derékszögű háromszög átfogója Pitagorasz tételével számítva

$c = \sqrt{12(2 - \sqrt{3})}$. Innen felírva a megfelelő oldalak arányát:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}; \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}; \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}.$$

- b) A $22,5^\circ$ -os derékszögű háromszög oldalai 1, $a = \sqrt{2} - 1$, $c = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$. sin esetén érdemes $\sin^2 22,5^\circ$ értékét kiszámítani, és abból négyzetgyököt vonni.

$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1; \quad \sin 22,5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad \cos 22,5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

60. Mekkora szöget zárnak be a belső és a külső érintők annál a két körnél, amelyek sugara 8 cm és 3 cm, és középpontjaik távolsága 16 cm?

Megoldás: A belső érintők hajlásszöge $86,9^\circ$, a külsőké $36,4^\circ$.

61. Mekkora szöget zárnak be a belső és a külső érintők annál a két körnél, amelyek sugara 8 cm és 12 cm, és középpontjaik távolsága 30 cm?

Megoldás: A belső érintők hajlásszöge $83,6^\circ$, a külsőké $15,3^\circ$.

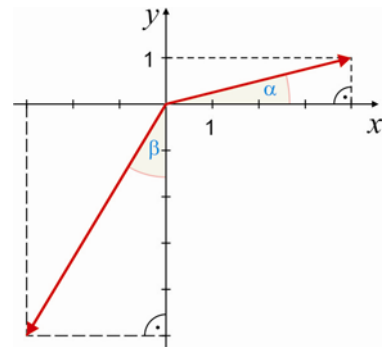
Mintapélda₁₃

Határozd meg az $\underline{a}(-3; -5)$ és $\underline{b}(4; 1)$ vektorok hajlásszögét!

Megoldás:

Keressünk olyan derékszögű háromszögeket a koordináta-rendszerben, amelyek segítenek a számításban! Az ábráról leolvasható, hogy a keresett szög $\alpha + 90^\circ + \beta$.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \approx 14^\circ \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta \approx 31^\circ \end{array} \right\} \text{ a keresett hajlásszög } 135^\circ.$$



Feladatok

62. Határozd meg az \underline{a} és \underline{b} vektorok hajlásszögét, ha
- a) $\underline{a}(1; 4)$ és $\underline{b}(5; 2)$;
 b) $\underline{a}(-2; -5)$ és $\underline{b}(3; 2)$; c) $\underline{a}(-6; -2)$ és $\underline{b}(5; 1)$; d) $\underline{a}(2; -5)$ és $\underline{b}(-4; 2)$.

Megoldás: a) $54,2^\circ$; b) $145,5^\circ$; c) $172,9^\circ$; d) $138,4^\circ$.

63. Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha $A(-5;2)$, $B(3;5)$, $C(2;-4)$!

Megoldás: $61,2^\circ$, $63,1^\circ$ és $55,7^\circ$.

64. Egy labdát 30° -os szögben felfelé dobnak el, $v_0 = 14$ m/s kezdősebességgel. Határozd meg \underline{v}_0 kezdősebesség-vektor vízszintes és függőleges komponensének nagyságát!

Megoldás: $v_V = v_0 \cdot \cos \alpha \approx 12,1 \frac{m}{s}$; $v_F = v_0 \cdot \sin \alpha = 7 \frac{m}{s}$.

65. A szánkó 170 centiméteres kötelét a földtől 22 cm magasságban rögzítették a szánkóhoz, és a kötel végét a földtől 1,20 méter magasan húzzuk, 120 N erővel. Mekkora a húzóerő vízszintes és függőleges komponense?

Megoldás: A vízszintes komponens $F \cdot \cos \alpha \approx 98 N$, a függőleges komponens $F \cdot \sin \alpha \approx 69 N$.

66. A vízszintes talajon egy pálcát ferdén, α szögben dugtak a földbe úgy, hogy y hosszúságú darabja látszik ki. Mekkora a pálca árnyéka, ha a rajz szerinti elrendezésben a fénysugarak a függőlegessel β szöget zárnak be, és

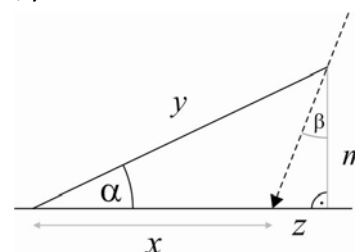
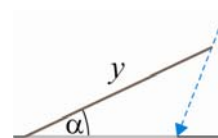
a) $y = 2 \text{ m}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 12^\circ$; b) $y = 120 \text{ cm}$; $\alpha = 27^\circ$; $\beta = 8^\circ$.

Megoldás:

$$m = y \cdot \sin \alpha, \quad z = m \cdot \operatorname{tg} \beta = y \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

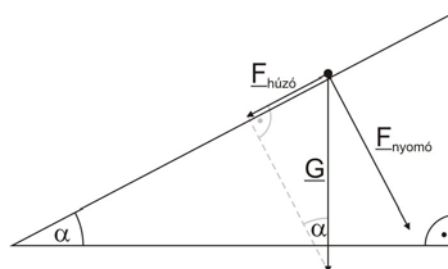
$$x = y \cdot \cos \alpha - z = y \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta).$$

Az eredmények: a) 151,94 cm; b) 99,26 cm.



67. Egy 22° hajlásszögű lejtőn nyugvó pontszerű test súlya 40 N. Számítsd ki, hogy mennyi a súlyerőből eredő nyomóerő és gyorsító erő! A nyomóerő merőleges a felületre, a gyorsító erő a lejtővel párhuzamos.

Megoldás: $F_{NY} = G \cos \alpha \approx 37 N$, $F_H = G \sin \alpha \approx 15 N$.



68. Egy 48° hajlásszögű lejtőn nyugvó pontszerű test súlya 120 N. Számítsd ki, hogy mennyi a súlyerőből eredő nyomóerő és gyorsító erő! A nyomóerő merőleges a felületre, a gyorsító erő a lejtővel párhuzamos.

Megoldás: $F_{NY} = G \cos \alpha \approx 80 N$, $F_H = G \sin \alpha \approx 89 N$.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokban magasság és befogótételt használunk, ezért megoldásukat javasoljuk.

69. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót x és y hosszúságú szeletekre bontja. Mekkora a háromszög hegyesszögei és oldalai, ha
- a) $x = 8$ cm, $y = 12$ cm; b) $x = 3$ dm; $y = 40$ cm; c) $x = 12,3$ m; $y = 5,4$ m.

Megoldás:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{xy}}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}}. \text{ a) } 50,8^\circ; 39,2^\circ; 15,5 \text{ cm}; 12,6 \text{ cm}; 20 \text{ cm};$$

$$\text{b) } 49,1^\circ; 40,9^\circ; 52,9 \text{ cm}; 45,8 \text{ cm}; 70 \text{ cm}; \text{ c) } 33,5^\circ; 56,5^\circ; 9,8 \text{ m}; 14,8 \text{ m}; 17,7 \text{ m}.$$

70. Egy derékszögű háromszögben a befogójának az átfogóra eső merőleges vetülete p . Mekkora a háromszög hegyesszögei és kerülete, ha
- a) $a = 10$ cm; $p = 8$ cm; b) $a = 20,4$ cm; $p = 18,2$ cm?

Megoldás:

$$c = \frac{a^2}{p}; \sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \text{a) } c = 12,5 \text{ cm}; b = 7,5 \text{ cm}; K = 30 \text{ cm}; 53,1^\circ; 36,9^\circ;$$

$$\text{b) } c = 22,9 \text{ cm}; b = 10,4 \text{ cm}; K = 53,7 \text{ cm}; 63,1^\circ; 26,9^\circ.$$

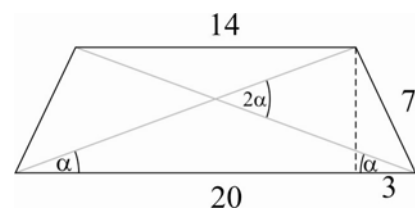
71. Mekkora a szimmetrikus trapéz átlóinak hajlásszöge, ha alapjai 20 cm és 14 cm, szárjai 7 cm hosszúak?

Megoldás:

$$\text{A trapéz magassága } \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{40}}{17} \Rightarrow \alpha \approx 20,4^\circ. \text{ A külsőszög-tétel követke-$$

$$\text{tében a keresett szög } 2\alpha \approx 40,8^\circ.$$



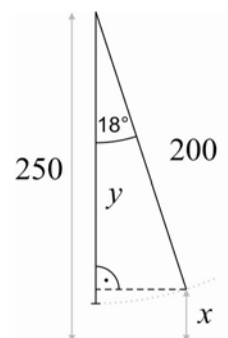
72. Mekkora a szimmetrikus trapéz átlóinak hajlásszöge, ha alapjai 14 cm és 8 cm, szárjai 5 cm hosszúak?

Megoldás: $m = 4$ cm; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{11} \Rightarrow \alpha \approx 20^\circ, 2\alpha \approx 40^\circ$. A keresett szög körülbelül 40° .

73. A földtől 50 cm magasan lóg egy 2 m hosszú láncre erősített hinta. Milyen magasan van a hinta a földtől akkor, amikor a lánc a függőlegessel 18° -ot zár be?

Megoldás:

$y = 200 \cos 18^\circ \approx 190,2$ cm. $x = 250 - y \approx 59,8$ cm magasan van a hinta.



74. a) Egy 76° nyílásszögű spotlámpát egy gerendára rögzítettek 260 cm magasan, és pontosan függőlegesen lefelé irányítottak. Mekkora a padlón megvilágított terület?
 b) Milyen magasan legyen a lámpa, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb egy 8 m^2 -es területet világítson be?

Megoldás:

a) A megvilágított kör sugara $r = 260 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \approx 203,13$ cm. A kör területe $T \approx 12,96 \text{ m}^2$.

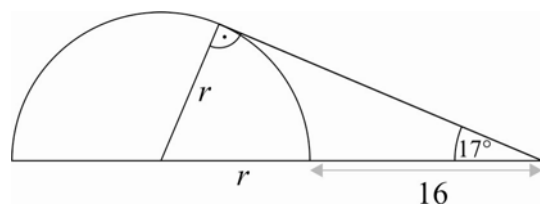
b) A kör sugara $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 159,58$ cm. A lámpát legfeljebb $h = \frac{r}{\operatorname{tg} 38^\circ} \approx 204$ cm magásra

kell rakni.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokban az ismeretlent képletbe kell helyezni, és ki kell fejezni. Az eddigieknél picit nehezebbek következnek.

75. Egy félgömb alakú domb szélétől 16 méterre a domb a vízszintes talajhoz képest 17° -os szögben látszik. Mekkora a gömb sugara?

Megoldás: $\sin 17^\circ = \frac{r}{r+16}$, ahonnan $r = 6,61$ m.

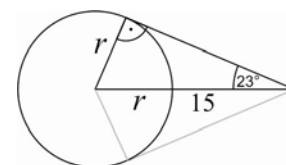


76. Mekkora annak a körnek a sugara, amelyhez a körtől 15 cm távolságra levő külső pontból húzható érintők hajlásszöge 46° ?

Megoldás:

Az ábra jelöléseinek megfelelően $\sin 23^\circ = \frac{r}{r+15}$, ahonnan

$$r = \frac{15 \sin 23^\circ}{1 - \sin 23^\circ} \approx 9,6 \text{ cm.}$$



77. Mekkora az a és b befogójú derékszögű háromszögben a beleírható és a köré írható kör sugara, ha a) $a = 30$ cm, $b = 40$ cm; b) $a = 18$ cm; $b = 26$ cm.

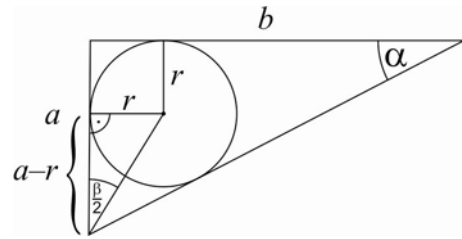
Megoldás:

Az ábra jelöléseit használva a köré írt kör sugara

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \text{ valamint } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{a-r},$$

$$\text{ahonnan } r = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}. \text{ Behelyettesítve az eredmé-}$$

nyek: a) $R \approx 25$ cm, $\beta \approx 53,1^\circ$, $r \approx 10$ cm. b) $R \approx 15,8$ cm, $\beta \approx 55,3^\circ$, $r \approx 6,2$ cm.

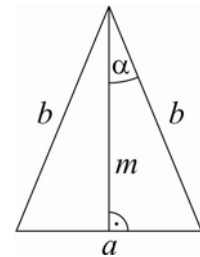


78. Egy egyenlőszárú háromszög kerülete 42 cm, a szárak hajlásszöge 25° . Mekkora a háromszög oldalai és területe?

Megoldás:

A kerület $K = a + 2b$. $a = 2b \sin \alpha$, ahonnan $K = 2b(\sin \alpha + 1)$, átren-

$$\text{dezve } b = \frac{K}{2(\sin \alpha + 1)}. \text{ A terület } T = \frac{b^2 \sin 2\alpha}{2}.$$



Az adatokat ($\alpha = 12,5^\circ$, $K = 42$ cm) behelyettesítve $b \approx 17,3$ cm, $a \approx 7,4$ cm, $T \approx 63,2$ cm².

79. Egy egyenlőszárú háromszög kerülete 120 cm, az alap és a szár hajlásszöge 72° . Mekkora a háromszög oldalai és területe?

Megoldás: $b \approx 37,8$ cm, $a \approx 44,4$ cm, $T \approx 679,5$ cm².

80. Az alexandriai világítótorony az ókor hét nagy csodájának egyike volt. Egy arab utazó, Abou-Haggag Al-Andaloussi a tenger egy pontjáról a torony tetejét $4,46^\circ$ -os szögben, egy 37 méterrel lejjebb eső részét $3,05^\circ$ -os szögben látta. Milyen magas volt a torony, és milyen messziről nézte az utazó a tornyot?

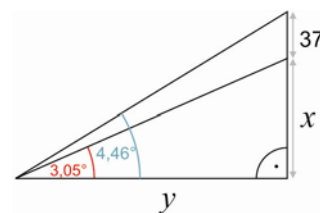
Megoldás:

$$\operatorname{tg}3,05^\circ = \frac{x}{y}, \operatorname{tg}4,46^\circ = \frac{x+37}{y}. \text{ Ezekből } y\text{-t kifejezve azok}$$

$$\text{egyenlők, így kapjuk } \frac{x}{\operatorname{tg}3,05^\circ} = \frac{x+37}{\operatorname{tg}4,46^\circ}. \text{ Innen } x\text{-et kifejezve}$$

$$x = \frac{37 \cdot \operatorname{tg}3,05^\circ}{\operatorname{tg}4,46^\circ - \operatorname{tg}3,05^\circ} \approx 79,76 \text{ m. A torony magassága kb. 117 méter, az utazó 1500 mé-$$

terről nézte a tornyot.



- 🏠 **81.** Egy hegy tetején álló 8 méter magas kilátó alját egy pontról a vízszinteshez képest $15,9^\circ$ -os, a tetejét $16,4^\circ$ -os szögben látjuk. Milyen magas a hegy?

Megoldás: kb. 240 m.

- 🏠 **82.** Egy 6 m magas oszlopon álló szobor alját $36,9^\circ$ -os, tetejét $51,3^\circ$ -os szögben látjuk. Milyen magas a szobor?

Megoldás: 3,97 m.

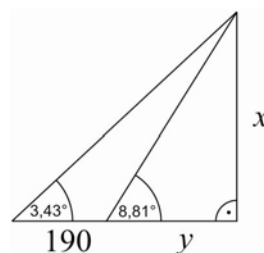
- 🏠 **83.** Egy villanyoszlop tetején a jelzőbóját $3,43^\circ$ -os szögben látjuk. 190 métert közeledve a villanyoszlop felé, ez a szög $8,81^\circ$ -ra változik. Milyen magasan van a jelzőbója?

Megoldás:

$$\operatorname{tg}3,43^\circ = \frac{x}{190+y}, \operatorname{tg}8,81^\circ = \frac{x}{y}. \text{ } x\text{-et kifejezve}$$

$$(190+y) \cdot \operatorname{tg}3,43^\circ = y \cdot \operatorname{tg}8,81^\circ, \text{ ahonnan}$$

$$y = 190 \frac{\operatorname{tg}3,43^\circ}{\operatorname{tg}8,81^\circ - \operatorname{tg}3,43^\circ} = 119,81 \text{ m és } x = y \cdot \operatorname{tg}8,81^\circ = 18,57 \text{ m.}$$



- 🏠 **84.** Egy 6 m magasan elhelyezkedő ablakból egy fa alja $11,3^\circ$ -os depressziószögben, a teteje 28° -os emelkedési szögben látszik. Milyen magas a fa? (A depressziószög a megfigyelőtől egy nála alacsonyabban fekvő pontra irányuló látó sugarának a vízszintessel bezárt szöge.)

Megoldás: kb. 22 m.

85. Egy hangya a földtől 63,2 cm magasságban az asztalról a szemközti szekrény alját 12° -os depressziószögben, tetejét $18,3^\circ$ -os emelkedési szögben látja. Milyen magas a szekrény?

Megoldás: 161,5 cm.

86. 3,8 m magasban, egy ablakból határozzuk meg egy autó hosszát, amelynek hossztengegye épp merőleges az ablak síkjára. Az autó eleje $20,8^\circ$ -os, a hátulja $54,6^\circ$ -os depressziószögben látszik. Milyen hosszú az autó?

Megoldás: 7,3 m.

87. Az autópálya egyenes szakasza felett merőlegesen átívelő felüljáróról nézzük a 2800 m hosszú torlódást. A legelső autót $12,40^\circ$ -os, a legutolsót $0,26^\circ$ -os depressziószögben látjuk. Milyen magas a felüljáró?

Megoldás: kb. 13 m magas.

Néhány szó a gömbi trigonometriáról (olvasmány)

Láttuk, hogy síkon hogyan értelmezhetjük a szinusz- és koszinuszfüggvényeket.

Számítógép és rárajzolható gömbi modellek segítségével könnyen elképzelhetjük és megszerkeszthetjük a gömbi ábrákat. Trigonometrikus számításokat pedig még jobb zsebszámológéppel is gyerekjáték elvégezni, akár nyolc-tíz tizedes jegy pontossággal is.

Az alábbiakban, ízelítőül, egyetlen tételt mutatunk be a gömbi trigonometriából: a gömbi Pitagorasz-tételt.

Ehhez szükséges tisztáznunk valamit, ami első pillantásra ellentmondásosnak tűnik.

Mindeddig élesen megkülönböztettük a gömbi távolságot a gömbi szögtől. A gömbi távolságot gömbi távolságegységekben, gömbi lépésekben mértük, és a főkör hosszát 360 gömbi lépésnek tekintettük. A



gömbi szöget gömbi szögegységekben, gömbi fokokban mértük, és a teljesszöget 360 foknak tekintettük. Az ábra sötét gumidarabja a két fogpiszkáló között körülbelül 80 gömbi lépés hosszúságú főkördarabnak, gömbi szakasznak felel meg.

Ha a gömbnek nemcsak a felületét, hanem belsejével együtt az egész gömböt tekintjük, akkor beláthatjuk, hogy a gömbi távolságot a háromdimenziós térben síkbeli szöggként is felfoghatjuk. Annyit kell csak tennünk, hogy a gömbi főkördarab két végpontját összekötjük a gömb középpontjával, térbeli egyenes szakaszok segítségével. Az alábbi ábrán az előző gömbi szakasz a két fogpiszkáló félegyenesei által bezárt, körülbelül 80 fokos síkbeli szögnek felel meg.



Ezek szerint a gömbi távolságot nemcsak gömbfelületi vonalként, de térbeli szöggként is felfoghatjuk. Ezért nemcsak gömbi lépésekben, de a szögmérésnél megszokott fokokban is mérhetjük. Ebből következik, hogy adott gömbi szakasz szinuszát vagy koszinuszát is értelmezhetjük.

A síkbeli Pitagorasz-tétel megfelelőjét keressük a gömbön.

Első gondunk az, hogy a gömbháromszögnek nem csak egy, hanem két vagy három derékszöge is lehet.

Hogyan választhatjuk ki ilyen esetben a három oldal közül az „átfogót”? Egyetlen értelmes megoldás lehetséges. Ha a háromszögben egynél több derékszög van, válasszuk ki az egyik derékszöget, és a vele szembeni háromszögoldalt tekintsük „átfogónak”, a másik kettőt „befogónak”. Erre az átfogóra és ezekre a befogókra kell teljesülnie a gömbi Pitagorasz-tételnek. Természetesen, ha másik derékszöget választunk ki a háromszögben, és újra osztjuk az „átfogó” és „befogó” szerepeket, akkor a gömbi Pitagorasz-tételnek most is teljesülnie kell!



A gömbi Pitagorasztétel így hangzik: Ha a gömbháromszögben találtunk egy derékszöget, a vele szembeni oldalt átfogónak nevezzük, és gömbi hosszúságát „ c ”-vel jelöljük. A másik két oldalt befogóknak tekintjük, és gömbi hosszúságukat „ a ”-val és „ b ”-vel jelöljük. „ a ”-t, „ b ”-t és „ c ”-t most síkbeli szögekként fogjuk fel, teljesül a következő egyenlőség:



$$\cos a \cos b = \cos c$$

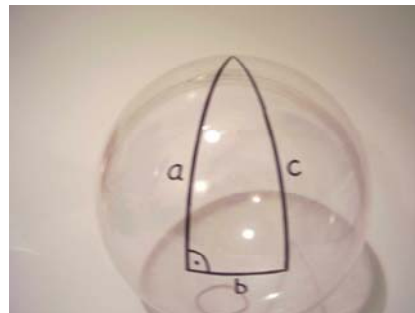
Ezt a tételt sokféleképpen bizonyíthatjuk, de itt ezzel nem foglalkozunk.

Feladatok:

88. Hogyan teljesül a gömbi Pitagorasztétel a kétszer vagy háromszor derékszögű háromszögekre?

Megoldás:

Válasszuk ki az egyik derékszöget! A vele szembeni „átfogó” gömbi hossza: $c = 90$ gömbi lépés. Ha ezt az átfogót térbeli szögekként fogjuk fel, akkor itt $\cos c = 0$. Ebben a háromszögben azonban a két „befogó” egyike is éppen 90 gömbi lépés, vagyis $a = 90^\circ$, és $\cos a = 0$. A gömbi



Pitagorasztétel szerint $\cos a \cdot \cos b = \cos c$, azaz ebben az esetben $0 \cdot \cos b = 0$. Akármekkora legyen is a másik „befogó”, b gömbi hossza, ez az egyenlőség mindenképpen teljesül.

89. Bizonyítsuk be a gömbi Pitagorasztétel segítségével, hogy az a gömbháromszög, amelynek két szára 45 gömbi lépés, alapja pedig 60 gömbi lépés, nemcsak egyenlőszárú, hanem derékszögű is!

Megoldás:

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ, \text{ vagyis a há-}$$

rom oldalra, ebben a szereposztásban, teljesül a gömbi Pitagorasztétel.



Kislexikon

Egy α hegyesszög **szinusza** az α szögű derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa.

Egy α hegyesszög **koszinusa** az α szögű derékszögű háromszögben az α szög melletti befogó és az átfogó hányadosa.

Egy α hegyesszög **tangense** az α szögű derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti befogó és az α melletti befogó hányadosa.

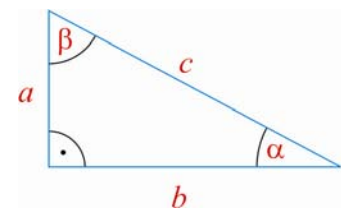
Egy α hegyesszög **kotangense** az α szögű derékszögű háromszögben az α melletti befogó és az α szöggel szemközti befogó hányadosa.

Összefüggés egy szög tangense és kotangense között

A derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ és $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ definíciókból

leolvasható, hogy egy szög tangense és kotangense egymás

reciproka: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, más alakban felírva $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$.



Pótszögek szögfüggvényei

Egy derékszögű háromszög hegyesszögei α és β . Írjuk fel α és β szögek szögfüggvényeit, és keressünk egyenlőket közöttük!

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$
$\sin \beta = \frac{b}{c}$	$\cos \beta = \frac{a}{c}$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$	$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$

A két hegyesszög összege 90° (egymás pótszögei), ezért β felírható $\beta = 90^\circ - \alpha$ alakban.

Az így kapott összefüggéseket a **pótszögek szögfüggvényeinek** nevezzük.

$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$; $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.

Pitagorasi azonosság

a és b befogójú, c átfogójú derékszögű háromszögben (a -val szemközti szög: α)

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2} \end{array} \right\} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Ugyanis a Pitagorasz-tétel szerint $a^2 + b^2 = c^2$, ezért $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ezt az összefüggést **négyzetes összefüggésnek** is hívjuk.

Az összefüggésből az adódik, hogy $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, illetve $|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

A tangens és kotangens szögfüggvények kapcsolata szinusz és koszinusz szögfüggvényekkel

A szögfüggvények értelmezésénél láttuk, hogy $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ és $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Ezeket egymással

elosztva a következőre jutunk: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$, ami éppen α tangense, és a számlálót

és a nevezőt felcserélve α kotangensét kapjuk. Fennáll a következő két azonosság:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

A speciális háromszögeknél megtanultuk, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága $a \frac{\sqrt{3}}{2}$, és az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$. Ezekkel az ismeretekkel meghatározhatjuk a nevezetes szögek, a 30° , 45° és 60° szögfüggvényeinek pontos értékeit.

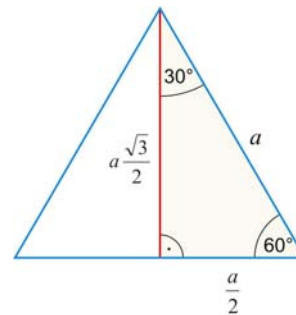
30° és a 60° szögfüggvényei

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

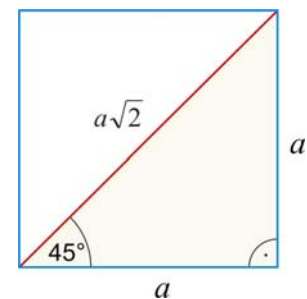


A számításnál kihasználtuk a hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját, a szögfüggvényekre vonatkozó összefüggéseket, és gyöktelenítettünk is.

45° szögfüggvényei

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$$



A nevezetes szögek szögfüggvényeit táblázatba is foglalhatjuk.

α		$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$