

A CSOPORT

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{6}$ cm², és két oldala $b = 2\sqrt{7}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!
2. Legyen $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét, és szerkeszd az egységsugarú körbe a keresett szögeket!
3. Az 1,2,3,4 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi a valószínűsége annak, hogy 3-mal osztható számot kapunk?
4. Egy vállalat 15 dolgozójának 2006 március havi nettó keresete:

63 000	87 000	67 000	78 000	63 000
87 000	87 000	142 000	150 000	142 000
112 000	112 000	258 000	346 000	234 000

Mekkora a vállalat dolgozóinak átlagkeresete, a keresetek módusza, mediánja?
Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők erről a vállalatról!
5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 nyolcas és 3 makk szerepeljen a kiválasztott lapok között?

B CSOPORT

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{23}$ cm², és két oldala $b = 8\sqrt{2}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!

2. Legyen $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét!

3. A 0,2,3,5 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. Hány darab ötten osztható számot készíthetünk?

A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi valószínűsége annak, hogy 5-tel osztható számot kapunk?

4. Egy osztály matematika dolgozatainak eredményei:

<i>Minősítés</i>	<i>Darab</i>
Jeles	5
Jó	7
Közepes	12
Elégséges	6
Elégtelen	3

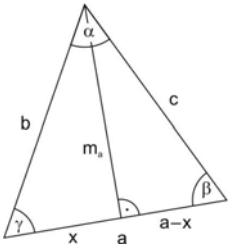
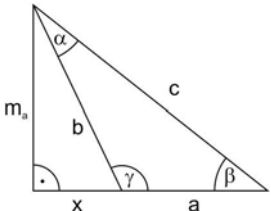
Határozd meg a matematika dolgozat érdemjegyeinek átlagát, móduszát, mediánját!

Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők!

5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 hetes és 3 piros szerepeljen a kiválasztott lapok között?

Megoldások:

A csoport

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{6}$ cm², és két oldala $b = 2\sqrt{7}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!	
Trigonometrikus területképlet alkalmazása: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ és $\sin \gamma$ értékének kiszámítása: $\sin \gamma = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$	1 pont 1 pont
γ lehetséges értékeinek meghatározása: $\gamma_1 = 67,8^\circ$ és $\gamma_2 = 112,2^\circ$	2 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_1 = 67,8^\circ$ esetben: I. $(2\sqrt{7})^2 = m_a^2 + x^2$ (1 pont) $T = \frac{a \cdot m_a}{2} \rightarrow m_a = 2\sqrt{6}$ (1 pont) m_a -t visszahelyettesítve I. -be kapjuk: $x = 2$ cm (1 pont) $\operatorname{tg} \beta = \frac{m_a}{7-x} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = 0,9798$ (1 pont) $\beta_1 = 44,4^\circ$ (1 pont)	 5 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_2 = 112,2^\circ$ esetben: Új ábra (1 pont); $x = 2$ $\operatorname{tg} \beta = \frac{m_a}{7+x} = \frac{2\sqrt{6}}{9} = 0,5443$ (1 pont) $\beta_2 = 28,6^\circ$ (1 pont)	 3 pont
A harmadik szög kiszámítása az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ összefüggést felhasználva: $\alpha_1 = 180^\circ - (\beta_1 + \gamma_1) = 67,8^\circ$ $\alpha_2 = 180^\circ - (\beta_2 + \gamma_2) = 39,2^\circ$ Ellenőrzés: Nagyobb szöggel szemben van a hosszabb oldal	2 pont 2 pont
Összesen:	16 pont

2. Legyen $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét, és szerkeszd be az egységsugarú körbe a keresett szögeket!!	
$\cos \alpha$ értékeinek meghatározása Pitagoraszi összefüggéssel ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$): $\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$, amiből $\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$	3 pont
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ összefüggés alkalmazása: $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$	3 pont
$\operatorname{ctg} \alpha = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ összefüggés alkalmazása:	3 pont

$\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$	
	1+2=3pont
Összesen	12pont

3. Az 1,2,3,4 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi a valószínűsége annak, hogy 3-mal osztható számot kapunk?	
Először kiválasztjuk azt a három számjegyet, amelyek összege osztható hárommal. 1,2,3 és 2,3,4	2 pont
Az 1,2,3 számjegyekből 6db háromjegyű szám készíthető.	1 pont
A 2,3,4 számjegyekből is 6 db háromjegyű szám készíthető.	1 pont
A megadott számjegyekből összesen 12 db olyan háromjegyű szám készíthető, amelyik osztható hárommal.	1 pont
A valószínűség kiszámításához meg kell határozni az összes és a kedvező esetet. A kedvező esetek száma az előző rész alapján 12.	1 pont
Az összes eset: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$	1 pont
A keresett valószínűség: $P(A) \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$	2 pont
Összesen	9 pont

4. Egy vállalat 15 dolgozójának 2006 március havi nettó keresete:				
63 000	87 000	67 000	78 000	63 000
87 000	87 000	142 000	150 000	142 000
112 000	112 000	258 000	346 000	234 000
Mekkora a vállalat dolgozóinak átlagkeresete, módusza, mediánja? Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők erről a vállalatról!				
Először rendezzük sorba az adatokat! 63 000; 63 000; 67 000; 78 000; 87 000; 87 000; 87 000; 112 000; 112 000; 142 000; 142 000; 150 000; 234 000; 258 000; 346 000	1 pont			
Az átlagkereset: 135 200 Ft Átlagosan a vállalat dolgozói 135 200 Ft-ot keresnek.	2pont+2pont			
A keresetek módusza: 87 000 Ft A vállalatnál a leggyakoribb fizetés 87 000 Ft.	1pont+2pont			
A keresetek mediánja: 112 000 Ft A vállalatnál ugyanannyian keresnek 112 000 Ft-nál többet, mint kevesebbet.	1pont+2pont			
Összesen	11pont			

CSAK MEGASABB ÓRASZÁMBAN TANULÓKNAK:

5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 nyolcas és 3 makk szerepeljen a kiválasztott lapok között?		
A 32 lapos magyar kártyában 8 db makk és 4 db nyolcas lap van.		
a. A kiválasztott lapok között van a makk 8-as, ekkor a fennmaradó 3db nyolcascból már nem választunk, a 7 db makkból még 2-öt kell választani. Ezekon a lapokon kívüli $32-4-7=21$ db-ból pedig 1-et húzunk. $\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{21}{1} = 441$ a makk nyolcas egyértelműen választható, ezért az első tényező: 1	4pont	
b. A kiválasztott lapok között nincs a makk 8-as, ekkor a fennmaradó 3 db nyolcascból 1-et választunk, a 7 db makkból pedig 3-at $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{21}{0} = 105$	4pont	
Így az összes kiválasztási lehetőség: $441+105 = 546$		1 pont
Összesen		9pont

A heti 3 órában tanulóknak az 1 – 4. feladatokat ajánljuk. Összesen 48 pont.

0 – 14: elégtelen

15 – 23: elégséges

24 – 32: közepes

33 – 40: jó

41 – 48: jeles

A heti 4 órában tanulóknak az összes feladatot ajánljuk. Összesen: 57 pont

0 – 17: elégtelen

18 – 28: elégséges

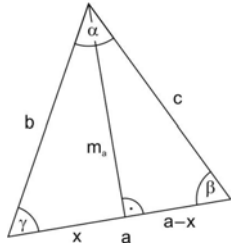
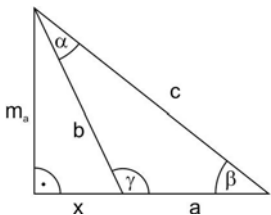
29 – 38: közepes

39 – 47: jó

48 – 57: jeles

Megoldások:

B csoport

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{23}$ cm ² , és két oldala $b = 8\sqrt{2}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!		
Trigonometrikus területképlet alkalmazása: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ és $\sin \gamma$ értékének	1 pont	
kiszámítása: $\sin \gamma = \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}} = 0,8478$	1 pont	
γ lehetséges értékeinek meghatározása: $\gamma_1 = 58,0^\circ$ és $\gamma_2 = 122,0^\circ$.	2 pont	
Másik szög kiszámítása $\gamma_1 = 58^\circ$ esetben: I. $(8\sqrt{2})^2 = m_a^2 + x^2$ (1 pont) $T = \frac{a \cdot m_a}{2} \rightarrow m_a = 2\sqrt{23}$ (1 pont) m_a -t visszahelyettesítve I. -be kapjuk: $x = 6$ (1 pont) $\operatorname{tg} \beta = \frac{m_a}{7-x} = \frac{2\sqrt{23}}{1} = 9,5917$ (1 pont) $\beta_1 = 84,0^\circ$ (1 pont)		5 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_2 = 122^\circ$ esetben: Új ábra: 1 pont; $x = 6$ $\operatorname{tg} \beta = \frac{m_a}{7+x} = \frac{2\sqrt{23}}{13} = 0,7378$ (1 pont) $\beta_2 = 36,4^\circ$ (1 pont)		3 pont
A harmadik szög kiszámítása az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ összefüggést felhasználva: $\alpha_1 = 180^\circ - (\beta_1 + \gamma_1) = 38,0^\circ$ $\alpha_2 = 180^\circ - (\beta_2 + \gamma_2) = 21,6^\circ$	2 pont 2 pont	
Összesen:	16 pont	

2. Legyen $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét!	
$\sin \alpha$ értékeinek meghatározása Pitagoraszsi összefüggéssel ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$): $\sin^2 \alpha = \frac{24}{49}$, amiből $\sin \alpha_1 = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\sin \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$	3 pont
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ összefüggés alkalmazása: $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$	3 pont
$\operatorname{ctg} \alpha = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ összefüggés alkalmazása: $\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{5}{2\sqrt{6}}$; $\operatorname{ctg} \alpha_2 = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$	3 pont

	1+2 pont = 2 pont
Összesen	12 pont

3. A 0,2,3,5 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. Hány darab öttel osztható számot készíthetünk? A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi a valószínűsége annak, hogy 5-tel osztható számot kapunk?	
Ha nullára végződik a szám, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ db öttel osztható szám lesz	2 pont
Ha ötre végződik a szám, akkor $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ db öttel osztható szám lesz	2 pont
Összesen: $6 + 4 = 10$	1 pont
Így a kedvező esetek száma: 10	1 pont
Az összes eset száma: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$	1 pont
Annak valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel	2 pont
$P(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$	
Összesen	9 pont

4. Egy osztály matematika dolgozatainak eredményei:	
Minősítés	Darab
Jeles	5
Jó	7
Közepes	12
Elégséges	6
Elégtelen	3
Határozd meg a matematika dolgozat érdemjegyeinek átlagát, móduszát, mediánját! Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők!	
Az átlag: 3,15 A matematika dolgozatok átlagosan 3,15 –ra sikerültek.	2 pont+2 pont
Az érdemjegyek módusza: 3 A legtöbb tanuló matematika dolgozata közepes.	1 pont+2pont
Az érdemjegyek mediánja: 3 Ugyanannyi tanuló matematika dolgozata lett hármasnál rosszabb, mint ahány jobb.	2 pont+2pont
Összesen	11 pont

CSAK MAGASABB ÓRASZÁMBAN TANULÓKNAK:

5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 hetes és 3 piros szerepeljen a kiválasztott lapok között?		
A 32 lapos magyar kártyában 8 db piros és 4 db hetes lap van.		
a. A kiválasztott lapok között van a piros 7-es, ekkor a fennmaradó 3db hetesből már nem választunk, a 7 db pirosból 2 pirosat választunk és az ezeken a lapokon kívüli 21 db-ból pedig 1-et húzunk. $\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{21}{1} = 441$ a piros hetes egyértelműen választható, ezért az első tényező:1	4 pont	
b. A kiválasztott lapok között nincs a piros 7-es, ekkor a fennmaradó 3 db hetesből 1-et választunk, a 7 db pirosból pedig 3-at $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{21}{0} = 105$	4 pont	
Így az összes kiválasztási lehetőség: $441+105 = 546$		1 pont
Összesen		9 pont

A heti 3 órában tanulóknak az 1 – 4. feladatokat ajánljuk. Összesen 48 pont.

- 0 – 14: elégtelen
- 15 – 23: elégséges
- 24 – 32: közepes
- 33 – 40: jó
- 41 – 48: jeles

A heti 4 órában tanulóknak az összes feladatot ajánljuk. Összesen: 57 pont

- 0 – 17: elégtelen
- 18 – 28: elégséges
- 29 – 38: közepes
- 39 – 47: jó
- 48 – 57: jeles