Matematika „A”
10. szakiskolai évfolyam

1. modul

Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása

Készítette Csákvári Ágnes

A modul célja	Kétismeretlenes egyenletre vezető problémák felvetése, az összefüggések felírása két egyenlettel. A kétismeretlenes egyenlet megoldáshalmazának ábrázolása. Az egyenletrendszer két egyenlete megoldáshalmazának ábrázolása, a két halmaz közös részének keresése. Kétismeretlenes egyenletet kielégítő számpárok felírása következtetés segítségével. Az egyenletmegoldás algebrai megoldása helyettesítéssel. Kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása grafikusan. A grafikus megoldás vizsgálata alapján a megoldhatóság feltételeinek megállapítása. Szöveges feladatok megoldása. Eredményeik ellenőrzése.
Időkeret	Ajánlott óraszám: 15, a modulban kidolgozott órák száma: 6 tanóra
Ajánlott korosztály	10. szakiskolai évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, hétköznapi szituációk, szakmai számítások Szűkebb környezetben: Függvényábrázolás, egyenletmegoldás. Megoldáshalmaz. Egyenes egyenlete. Állítások igazsághalmaza. Szöveges feladatok megoldása. Ajánlott megelőző tevékenységek: Függvényábrázolás, elsőfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása. Szöveges feladatok megoldása. Ajánlott követő tevékenységek: Másodfokú egyenletek. Számításos geometriai feladatok.

A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Egyenletek megoldása, a megoldás ellenőrzése. Függvényérték számítása. Mennyiségi következtetés: A fizikában és a matematikában előforduló összefüggések szemléltetése értéktáblázattal, illetve grafikonon. Becslés: Kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása. Következtetések az egyik változó ismeretében a szóba jöhető másik változóra. Eredmények becslése, ellenőrzése. Szöveges feladatok, metakogníció: Szöveges feladatok alapján matematikai modellalkotás. Szöveges feladat esetén szöveges válasz megfogalmazása. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása. Szöveges feladatok megoldása, értéktáblázat, grafikon készítése ugyanahhoz a feladathoz. Két egyenes. Két változó fogalmának megismerése. Induktív, deduktív következtetés: Konkrét elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása helyettesítéses módszerrel, majd az elv általánosítása, illetve az általánosítás után azok konkrét alkalmazása.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Táblázatok, 1.1 fóliamelléklet, 1.2 – 1.6 kártyakészletek, 1.7 és 1.8 ablakcsomagok, számológép.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

1. óra: Lineáris függvény ismétlése
2. óra: Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldásának ismétlése
3. óra: Kétismeretlenes egyenlet
4. óra: Kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása
5. óra: Kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítő módszerrel
6. óra: Kétismeretlenes egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/Feladat/ Gyűjtemény**
I. Lineáris függvény ismétlése			
1.	Csoportalakítás: A tanár egy-egy asztalon elhelyezi a hozzárendelési utasításokat, valamint szétosztja az értékpárokat. A tanulók ahhoz az asztalhoz ülnek, amelynél a hozzárendelési utasítást kielégíti az értékpár.	Számolás	1.2 kártyakészlet
2.	Lineáris függvények ábrázolása (ismétlés)	Induktív következtetés	1.1 fóliamelléklet
3.	Feldarabolt négyzetek módszere: A tanár minden csoportnak odaadja az 1.3 kártyakészletet. Összetartozó négyest alkot egy hozzárendelési utasítás, a neki megfelelő grafikon, meredekség valamint az y tengellyel való metszéspont és a függvény zérushelye.	Kombinatív gondolkodás, rendszerezés	1.3 kártyakészlet
4.	Feladatmegoldás szakértői mozaik módszerrel	Számlálás, deduktív következtetés, kombinatív gondolkodás	1. – 4. feladat

II. Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldásának ismétlése			
1.	Grafikus és algebrai megoldás átismétlése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés, induktív gondolkodás, számlálás, számítás, becslés	1., 2. mintapélda
2.	Dominójáték: egyenletmegoldás	Kombinatív gondolkodás, számolás	1.4 kártyakészlet; 5. - 6. feladat

III. Kétismeretlenes egyenlet			
1.	Mintapéldák megbeszélése, algebrai és grafikus megoldás	Szövegértés, számolás, kombinatív gondolkodás	3., 4., 5., 6. mintapélda
2.	Gyakorlás párban:	Szövegértés, számolás, kombinatív gondolkodás	7., 8., 9. feladat

IV. Kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása			
1.	Kártyajáték négyfős csoportokban: Feladat: az értékpárok beírása az ablak megfelelő rubrikáiba	Számolás, kombinatív gondolkodás	1.5 kártyakészlet; 1.7 ablak
2.	Frontális megbeszélés után gyakorlás	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, számlálás, számítás, becslés, szövegértés	7., 8. mintapélda; 10., 11., 12. feladat

V. Kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítő módszerrel			
1.	A behelyettesítő módszer megbeszélése	Szövegértés, kombinatív gondolkodás, induktív következtetés, számolás, számítás	9., 10. mintapélda
2.	Feladatmegoldás szakértői mozaikkal	Számolás, számítás, deduktív következtetés	13., 14., 15., 16. feladat 1.6 kártyakészlet

VI. Kétismeretlenes egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok (1 óra)			
1.	Mintapélda közös megbeszélése	rendszerezés, kombinatív gondolkodás, számlálás, számítás, becslés, szövegértés	11. mintapélda
2.	Feladatmegoldás szakértői mozaikkal	rendszerezés, kombinatív gondolkodás, számlálás, számítás, becslés, szövegértés	17., 18., 19. feladat; 1.8 ablakcsomag
3.	Gyakorlás párban	kombinatív gondolkodás, számolás, számí-tás, szövegértés	20., 21., 22., 23. feladat

I. Lineáris függvények

Módszertani ajánlás: A tanulók négyfős csoportokat alkotnak. A csoportalakításhoz az ***1.2 kártyakészletet*** használják. A kártyakészletben a koordinátasík pontjai, illetve függvények hozzárendelési utasításai találhatóak. A tanár egy-egy asztalon elhelyezi a hozzárendelési utasításokat, valamint szétosztja az értékpárokat. A tanulók ahhoz az asztalhoz ülnek, amelynél a hozzárendelési utasítást kielégíti az értékpár.

1.2 kártyakészlet

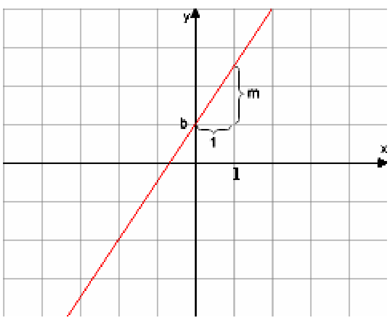
$P(5; 2)$	$P(1; -2)$	$P(0; -3)$	$P(-2; -5)$
$P(3; 5)$	$P(-4; -2)$	$P(-2; 0)$	$P(-1; 1)$
$P(6; 2)$	$P(-4; -3)$	$P(0; -1)$	$P(7; 2{,}5)$
$P(0; 3)$	$P(1; 5)$	$P(-3; -3)$	$P(2{,}5; 8)$

$P(1; 4)$	$P(-1; 6)$	$P(-5; 10)$	$P(7; -2)$
$P(1; -3)$	$P\left(\frac{1}{3}; -1\right)$	$P\left(-\frac{2}{3}; 2\right)$	$P(-1; 3)$
$P(0{,}5; 3)$	$P(2; 9)$	$P(-1; -3)$	$P(-0{,}5; -1)$
$P(1; 2{,}5)$	$P(-1; -0{,}5)$	$P(4; 7)$	$P(-6; -8)$

$x \mapsto x-3$	$x \mapsto x+2$
$x \mapsto \frac{1}{2}x-1$	$x \mapsto 2x+3$
$x \mapsto -x+5$	$x \mapsto -3x$
$x \mapsto 4x+1$	$x \mapsto \frac{3}{2}x+1$

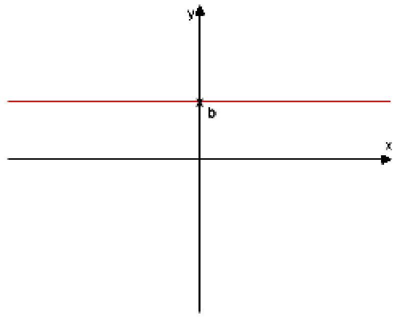
Módszertani megjegyzés: A tanár frontálisan átismétli a lineáris függvény definícióját és ábrázolását. Írásvetítő használatához a következő anyag megtalálható az ***1.1 fólia*** mellékleten.

A lineáris függvény fogalma, tulajdonságai (ismétlés)



$x \mapsto ax + b$

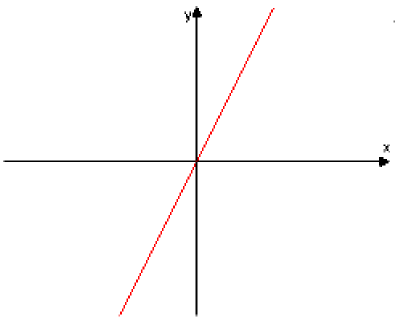
Azokat a függvényeket, amelyeknek grafikonja egyenes, lineáris függvényeknek nevezzük, és az $x \mapsto ax + b$ képlettel adjuk meg, ahol ***a*** a függvény grafikonjának **meredeksége**, ***b*** pedig **az *y* tengellyel való metszéspont 2. koordinátája**.



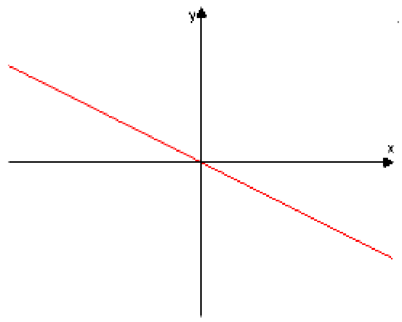
$x \mapsto b$

Ha ***a*** **= 0**, akkor az $x \mapsto b$ hozzárendelést kapjuk, melyet **konstans függvény**nek nevezünk. Ekkor a függvény képe az *x* tengellyel párhuzamos egyenes.

Ha ***a*** **≠ 0**, akkor **ez a lineáris függvény elsőfokú**.



$x \mapsto ax$, ha $a > 0$



$x \mapsto ax$, ha $a < 0$

Ha ***a*** **> 0**, akkor a függvény **növekvő**, vagyis növekvő *x* értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak.

Ha ***a*** **< 0**, akkor a függvény **csökkenő**, vagyis növekvő *x* értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak.

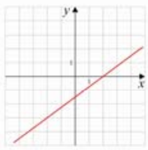
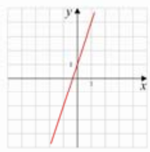
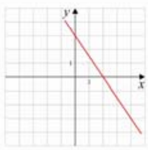
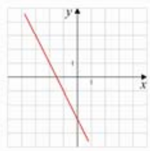
Általában: Minden $x \mapsto ax$ függvény egyenes arányosságnak tekinthető, amelyben az arányosság tényezője a.

A függvényábrázoláskor a azt mutatja meg, hogy egy egységnyi jobbra haladás esetén hány egységet megyünk az *y* tengely mentén pozitív a esetén felfelé, negatív a esetén lefelé.

Módszertani megjegyzés: a tanár minden csoportnak odaadja az ***1.3 kártyakészletet***. A tanulók véletlenszerűen húznak a csomagból 4-4 kártyát. Feladatuk négy összetartozó kártya begyűjtése úgy, hogy egymáshoz nem szólhatnak, egymáshoz nem nyúlhatnak át. Felesleges kártyájukat elhelyezik az asztal közepén, és a szükséges kártyákat is csak onnét vehetik fel.

Összetartozó négyest alkot egy hozzárendelési utasítás, a neki megfelelő grafikon, meredekség, valamint az *y* tengellyel való metszéspont és a függvény zérushelye.

1.3 kártyakészlet

$x \mapsto \frac{3}{4}x-1,5$		$x \mapsto 3x+1$	
meredekség: $\frac{3}{4}$ szigorúan monoton növő	*y* tengellyel való metszete: 1,5 zérushely: 2	meredekség: 3 szigorúan monoton növő	*y* tengellyel való metszete: 1 zérushely: $-\frac{1}{3}$
$x \mapsto -\frac{3}{2}x+3$		$x \mapsto -2x-3$	
meredekség: $-\frac{3}{2}$ szigorúan monoton csökkenő	*y* tengellyel való metszete: 3 zérushely: 2	meredekség: 2 szigorúan monoton csökkenő	*y* tengellyel való metszete: 3 zérushely: $-\frac{3}{2}$

Módszertani megjegyzés: Az alábbi feladatok tanórai feldolgozását szakértői mozaik módszerrel ajánljuk. Alakítsunk ki négyfős csoportokat! Minden csoportban mindenki kap egy-egy kártyát. A kártyákon az *A, B, C, D* betűk szerepelnek. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: *A* a legkönnyebb, a *D* pedig a legnehezebb. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt húztak. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz, ahol megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt nyolc tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál. (De kiválaszthat négyet is, és két feladat ismertetését is kérheti a táblánál.)

Ajánlás: 1.a),b); 2.a),c); 3.a),b); .4.a),c).

Feladatok

A jelűek feladata:

1. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto 2x$; $-2 \le x < 3$;   b) $x \mapsto \frac{1}{3}x$; x egész szám;

c) $x \mapsto -3x$; x természetes szám;   *d*) $x \mapsto 3$; $-4 < x < 5$.

Megoldási útmutató: ezek a függvények elemi úton ábrázolhatók.

B jelűek feladata:

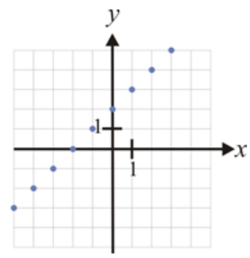
2. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto x+2$; x egész szám;   b) $x \mapsto -x+4$; x természetes szám;

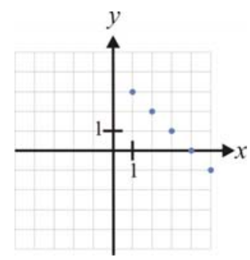
c) $x \mapsto x-3$; $-4 < x < 1$;   d) $x \mapsto -x-1$; $0 \le x \le 5$.

Megoldási útmutató: ezek a függvény elemi úton ábrázolhatók.

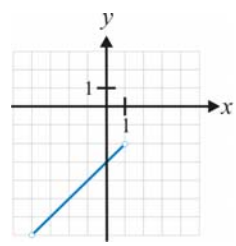
a) Az értelmezési tartomány az egész számok halmaza.



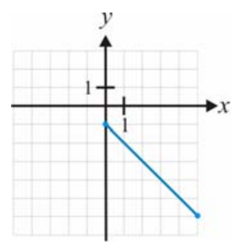
b) Az értelmezési tartomány a természetes számok halmaza.



c) Az értelmezési tartomány a –4-nél nagyobb és 1-nél kisebb valós számok halmaza.



d) Az értelmezési tartomány a 0-nál nem kisebb és 5-nél nem nagyobb valós számok halmaza.



C jelűek feladata:

3. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto -\frac{1}{3}x+5$; b) $x \mapsto 3x-5$; c) $x \mapsto -5x+1$; d) $x \mapsto -\frac{2}{3}x-1{,}5$.

Megoldási útmutató: ezek a függvények elemi úton ábrázolhatók.

D jelűek feladata:

4. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi hozzárendelési utasításokkal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \frac{4x-1}{2}$; b) $x \mapsto -\frac{3x-2}{2}$; c) $x \mapsto -(3x+4)$; d) $x \mapsto -\left(-\frac{2}{3}x-1\right)$.

Megoldási útmutató: a függvények a kijelölt műveletek elvégzése után elemi úton ábrázolhatók. a) $x \mapsto 2x-\frac{1}{2}$; b) $x \mapsto -\frac{3}{2}x+1$; c) $x \mapsto -3x-4$; d) $x \mapsto \frac{2}{3}x+1$.

II. Elsőfokú, egyismeretlenes egyenletek (ismétlés)

Mintapélda₁

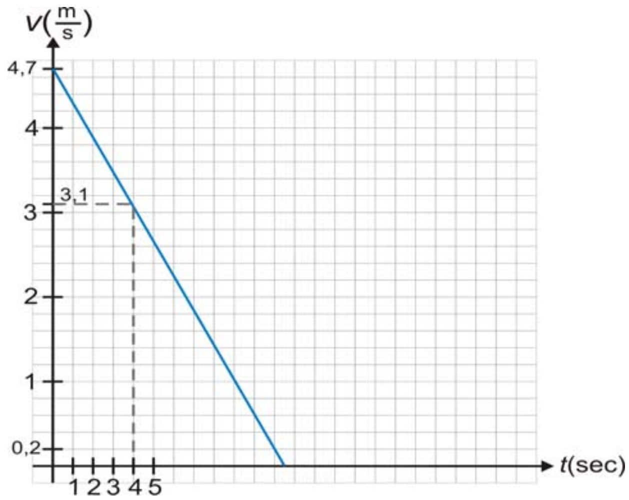
Egy kerékpáros kezdősebessége $4{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, és sebessége egyenletesen csökken másodpercenként $0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal. Hány másodperc múlva lesz $3{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebessége?

Grafikus megoldás:

A kerékpáros sebességét *t* idő elteltével a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$v(t) = -0{,}4t + 4{,}7\,.$$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a $t \mapsto -0{,}4t + 4{,}7$ függvényt.



A *v* tengely 3,1 értékénél húzzunk párhuzamost a *t* tengellyel. Ez a párhuzamos valahol metszi a függvény grafikonját. Ezt a metszéspontot a *t* tengelyre vetítve látható, hogy 4 másodperc múlva éri el a kerékpáros a $3{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet.

Algebrai megoldás:

A kerékpáros pillanatnyi sebességét a $4{,}7 - 0{,}4t$ képlettel határozhatjuk meg. Azt a *t* értéket keressük, amikor a fenti kifejezés 3,1 -del egyenlő.

Az egyenlet megoldásának lépései:

1. lépés: A célunk az, hogy az egyenlet egyik oldalára a számok kerüljenek, a másik oldalára pedig az ismeretlent tartalmazó kifejezések.

Megjegyzés: A lépések közben összevonásokat is végezhetünk.

$4{,}7 - 0{,}4t = 3{,}1 \qquad / - 4{,}7$

$-0{,}4t = -1{,}6$

2. lépés: Meghatározzuk t értékét úgy, hogy t együtthatójával elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát.

$-0{,}4t = -1{,}6 \qquad / : -0{,}4$

$t = 4$

A megoldás során a mérlegelvet alkalmaztuk, melynek lényege, hogy amilyen műveletet végzünk az egyenlet egyik oldalán, azt a műveletet az egyenlet másik oldalán is végrehajtjuk.

Mérlegelv: Szabad az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a kifejezést kivonni vagy mindkét oldalhoz hozzáadni. Szabad az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a 0-tól különböző értékű kifejezéssel szorozni vagy osztani.

Az egyenlet megoldásakor figyeljünk arra is, hogy az ismeretlen milyen értékekre értelmezett.

Esetünkben a szövegkörnyezetből derül ki, hogy a t változó értéke a pozitív valós számok halmazán ($\mathbf{R}^+$) értelmes. A kapott érték ($t = 4$) megfelel ennek a feltételnek. Ellenőrizzük, hogy tényleg jó-e az eredmény! Helyettesítsük be az eredeti egyenletbe!

Ellenőrzés:

Bal oldal: $4{,}7 - 0{,}4 \cdot 4 = 4{,}7 - 1{,}6 = 3{,}1$. Jobb oldal: $3{,}1$.

A jobb és a bal oldal megegyezik, azaz a megoldás helyes.

Mintapélda$_2$

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! $\frac{8x+24}{3} = 3 - \frac{2x+15}{6}$

Megoldás:

$$\frac{8x+24}{3} = 3 - \frac{2x+15}{6}$$

Közös nevezőre hozunk (a közös nevező 6).

$$\frac{2\cdot(8x+24)}{6} = 3 - \frac{2x+15}{6} \qquad /\cdot 6$$

Ügyeljünk arra, hogy az egész tagokat is megszorozzuk!

A törtvonal zárójelet helyettesít!

$2\cdot(8x+24)=3\cdot6-(2x+15)$ — Bontsuk fel a zárójelet mindkét oldalon, és végezzük el a kijelölt műveleteket!

$16x+48=18-2x-15$ — Vonjuk össze a jobb oldalon a számokat.

$16x+48=3-2x$ — $/+2x$

$16x+2x+48=3$

$18x+48=3$ — $/-48$

$18x=-45$ — $/:18$

$x=-2,5$

<u>Ellenőrzés:</u> Bal oldal: $\frac{8\cdot(-2,5)+24}{3}=\frac{-20+24}{3}=\frac{4}{3}$.

Jobb oldal: $3-\frac{2\cdot(-2,5)+15}{6}=3-\frac{-5+15}{6}=3-\frac{10}{6}=3-\frac{5}{3}=\frac{9}{3}-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$.

A két oldal értéke megegyezik, tehát a megoldás jó.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: Dominójáték: A tanulók 2 - 4 fős csoportokban játszanak. A tanár minden csoportnak odaadja az ***1.4. kártyakészletet***. Húznak egy-egy dominót, és letesznek egyet az asztal közepére. A dominókon elsőfokú egyenletek találhatók. Azok az egyenletek kerülhetnek egymás mellé, amelyeknek ugyanaz a megoldása. Ha valakinek nincs megfelelő dominója, amit letehetne, akkor húz egyet a csomagból. Az nyer, akinek hamarabb elfogy az összes dominója. A legügyesebb csoportot külön jutalmazhatjuk.

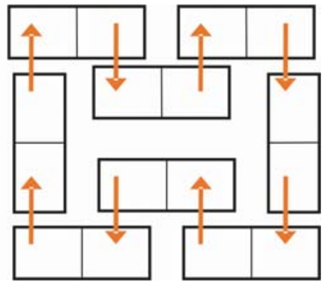
Aki nem szeretne dominózni, az például páros csoportmunkában is megoldhatja a dominókon szereplő egyenleteket. Ezek az egyenletek az 5. és 6. feladatokban nehézségi fokuknak megfelelően szétválogatva is megtalálhatóak.

1.4 kártyakészlet

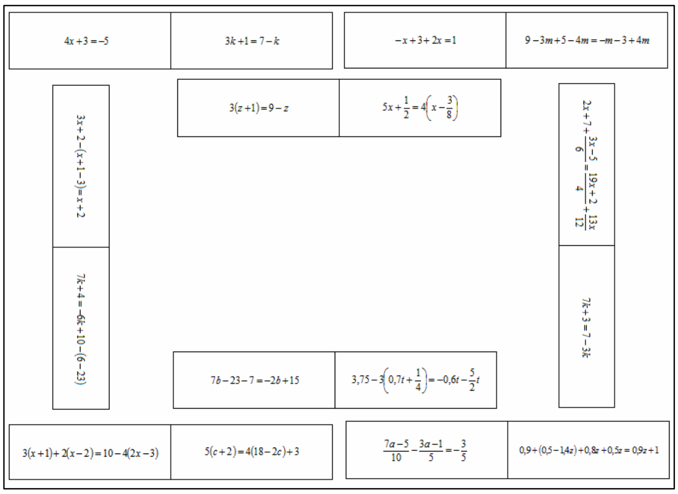
$4x+3=-5$	$3k+1=7-k$
$3(z+1)=9-z$	$5x+\frac{1}{2}=4\left(x-\frac{3}{8}\right)$
$-x+3+2x=1$	$9-3m+5-4m=-m-3+4m$
$2x+7+\frac{3x-5}{6}=\frac{19x+2}{4}+\frac{13x}{12}$	$7k+3=7-3k$

$\frac{7a-5}{10}-\frac{3a-1}{5}=-\frac{3}{5}$	$0,9+(0,5-1,4z)+0,8z+0,5z=0,9z+1$
$7b-23-7=-2b+15$	$3,75-3\left(0,7t+\frac{1}{4}\right)=-0,6t-\frac{5}{2}t$
$3(x+1)+2(x-2)=10-4(2x-3)$	$5(c+2)=4(18-2c)+3$
$3x+2-(x+1-3)=x+2$	$7k+4=-6k+10-(6-23)$

A kirakás iránya:



Megoldás:



5. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $4x+3=-5$, b) $3k+1=7-k$; c) $3(z+1)=9-z$;

d) $-x+3+2x=1$; e) $7k+3=7-3k$; f) $1{,}3y+2y=0{,}3y+9$;

g) $7k+4=-6k+10-(6-23)$; h) $7c-3c-5=\dfrac{-18c+10}{2}$;

i) $7b-23-7=-2b+15$; j) $4{,}7-0{,}4v=0{,}3v+1{,}9v$.

Megoldás:

a) $x=-2$; b) $k=\dfrac{3}{2}$; c) $z=\dfrac{3}{2}$; d) $x=-2$; e) $k=0{,}4$; f) $y=3$; g) $k=\dfrac{23}{13}$;

h) $c=\dfrac{10}{13}$; i) $b=5$; j) $v=\dfrac{47}{26}$.

6. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5x+\dfrac{1}{2}=4\left(x-\dfrac{3}{8}\right)$; b) $9-3m+5-4m=-m-3+4m$;

c) $0{,}9+(0{,}5-1{,}4z)+0{,}8z+0{,}5z=0{,}9z+1$; d) $\dfrac{7a-5}{10}-\dfrac{3a-1}{5}=-\dfrac{3}{5}$;

e) $3{,}75-3\left(0{,}7t+\dfrac{1}{4}\right)=-0{,}6t-\dfrac{5}{2}t$; f) $3(x+1)+2(x-2)=10-4(2x-3)$;

g) $7{,}2k-1{,}2k+5{,}2=7{,}3-2{,}4+0{,}1(25k+1)+2{,}5k$;

h) $5(c+2)=4(18-2c)+3$; i) $3x+2-(x+1-3)=x+2$;

j) $2x+7+\frac{3x-5}{6}=\frac{19x+2}{4}+\frac{13x}{12}$.

Megoldás: a) $x=-2$; b) $m=1{,}7$; c) $z=0{,}4$; d) $a=-3$; e) $t=-3$;

f) $x=\frac{23}{13}$; g) $k=-0{,}2$; h) $c=5$; i) $x=-2$; j) $x=1{,}7$.

III. Kétismeretlenes egyenlet

1. Kétismeretlenes egyenlet megoldása

Mintapélda$_3$

Egy téglalap alakú víztároló köré 30 m hosszú korlátot tettek, hogy elkerüljék a balesetet. Mekkorák lehetnek a víztároló oldalai?

Megoldás:

Jelöljük a víztároló oldalait a-val és b-vel!

A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhatjuk fel: $2a + 2b = 30$

Ez egy kétismeretlenes egyenlet, melynek megoldása közben olyan a és b számpárokat keresünk, amelyek a feladat szövege alapján értelmesek, és visszahelyettesítve az egyenlőségbe a megfelelő helyekre, teljesül az egyenlőség.

Például: ha $a = 1$, akkor $b = 28$.

A keresgélést segíti, ha az egyenletből kifejezzük az egyik változót a másik felhasználásával:

$$2a + 2b = 30 \quad / - 2a$$

$$2b = 30 - 2a \quad / : 2$$

$$b = \frac{30 - 2a}{2}$$

$$b = 15 - a$$

A feladat szövege szerint oldalhosszt keresünk, ezért a is és b is csak pozitív valós szám lehet.

Készítsünk táblázatot!

a	0,2	1	2	3	4	6,8	7	$\frac{19}{2}$	12	14	14,99
b	14,8	14	13	12	11	8,2	8	$\frac{11}{2}$	3	1	0,01

Végtelen sok ilyen megoldáspárt tudunk felírni.

Mintapélda$_4$

A piacon tyúktojást és fürjtojást árulnak. A tyúktojás darabja 20 Ft, a fürjtojásé 40 Ft. Menynyit vehetünk az egyik és mennyit a másik fajtából, ha összesen 300 Ft-unk van tojásra?

Megoldás:

A tyúktojások darabszámát jelölje x, a fürjtojásokét y.

A feladat szövegének értelmében mindkét érték csak nem negatív egész szám lehet. (Előfordulhat, hogy egyikből nem veszünk egy darabot sem.)

Az x darab tyúktojásért $20x$ forintot fizetünk, az y darab fürjtojásért $40y$ forintot, de összesen 300 Ft-ot költünk. A következő egyenletet írhatjuk fel:

$$20x + 40y = 300$$

Fejezzük ki y-t az x változó segítségével:

$$20x + 40y = 300 \qquad / -20x$$

$$40y = 300 - 20x \qquad / :40$$

$$y = \frac{300}{40} - \frac{20}{40}x$$

$$y = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x$$

Készítsünk értéktáblázatot!

x	1	3	5	7	9	11	13	15
y	7	6	5	4	3	2	1	0

Mintapélda$_5$

Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy a tyúktojás 23 Ft-ba kerül!

Megoldás:

Az egyenletet az előző feladathoz hasonlóan írjuk fel.

$$23x + 40y = 300$$

$$y = \frac{300}{40} - \frac{23}{40}x$$

Készítsünk értéktáblázatot!

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	$\frac{30}{4}$	$\frac{277}{40}$	$\frac{254}{40}$	$\frac{231}{40}$	$\frac{208}{40}$	$\frac{185}{40}$	$\frac{162}{40}$	$\frac{139}{40}$

x	8	9	10	11	12	13	14
y	$\frac{116}{40}$	$\frac{93}{40}$	$\frac{70}{40}$	$\frac{47}{40}$	$\frac{24}{40}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{22}{40}$

Ha x 15-nél nagyobb, akkor y már negatív szám lesz, ezért ennek a feladatnak nincs megoldása.

Az $y = ax + b$ **kétismeretlenes egyenlet** (a, b valós számok) **megoldás**án azt értjük, hogy keressük azt az (x; y) számpárt, amelynek tagjait a megfelelő ismeretlenek helyébe írva teljesül az egyenlőség.

Az egyenlet **értelmezési tartománya** olyan számpárokból áll, amelyek szóba jöhetnek az egyenlet megoldásaként.

A megoldások száma lehet véges sok vagy végtelen sok, illetve az is lehet, hogy nincs megoldás.

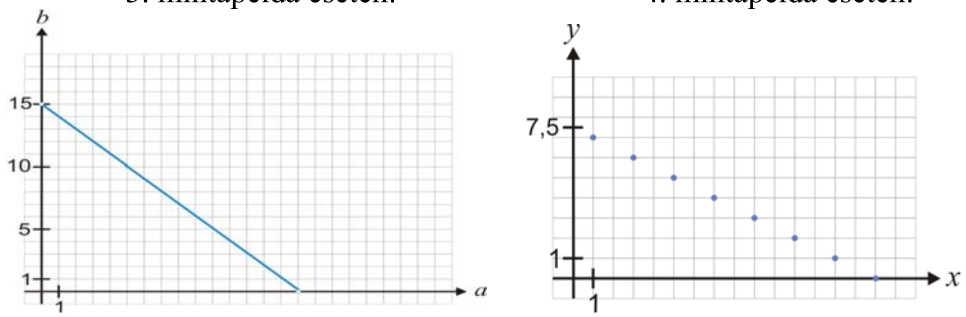
Kétismeretlenes egyenlet grafikus megoldása

Mintapélda6

Ábrázoljuk grafikonon a 3. és a 4. mintapéldában kapott táblázatok alapján a megoldásokat!

Megoldás:

3. mintapélda esetén: 4. mintapélda esetén:



A megoldást jelentő pontpárok egy egyenesen helyezkednek el. Az egyenes minden pontjának koordinátái kielégítik az egyenletet. Ha egy pont nincs az egyenesen, akkor koordinátái nem megoldásai az egyenletnek sem.

Ugyanazt a grafikont kapjuk, mintha a megfelelő értelmezési tartományon ábrázoltuk volna az $x \mapsto 15 - x$, illetve az $x \mapsto \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x$ függvényeket.

Az $y = 15 - x$ illetve az $y = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x$ egyenleteket az **egyenes egyenleté**nek nevezzük.

Az $y = ax + b$ egyenlet az **egyenes egyenlete**. Az egyenletben a az egyenes meredeksége, b az y tengellyel való metszéspont.

Ha $y = b$, akkor az egyenes párhuzamos az x tengellyel, ha $y = ax$, akkor az origón halad át.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: Gyakorlás párban: A páros tagjai különböző feladatokat kapnak. Miután megoldották feladataikat, kicserélik füzeteiket, és kijavítják a megoldást, majd megbeszélik a javítást. *Ajánlás:* 7. és 8. feladat.

7. Vásároltam 645 forintért 3 kg paprikát és 5 kg paradicsomot. Mennyibe kerülhetett 1 kg paradicsom és 1 kg paprika?

Megoldás: $3x + 5y = 645 \Rightarrow y = 129 - 0{,}6x$ (értéktáblázat készítése).

8. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 32 egység. Mekkorák lehetnek az oldalai?

Megoldás: $2x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - 2x$.

9. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 13. Melyik lehet ez a szám?

Megoldás: $x + y = 13 \Rightarrow y = 13 - x$ (értéktáblázat készítése).

IV. Kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása

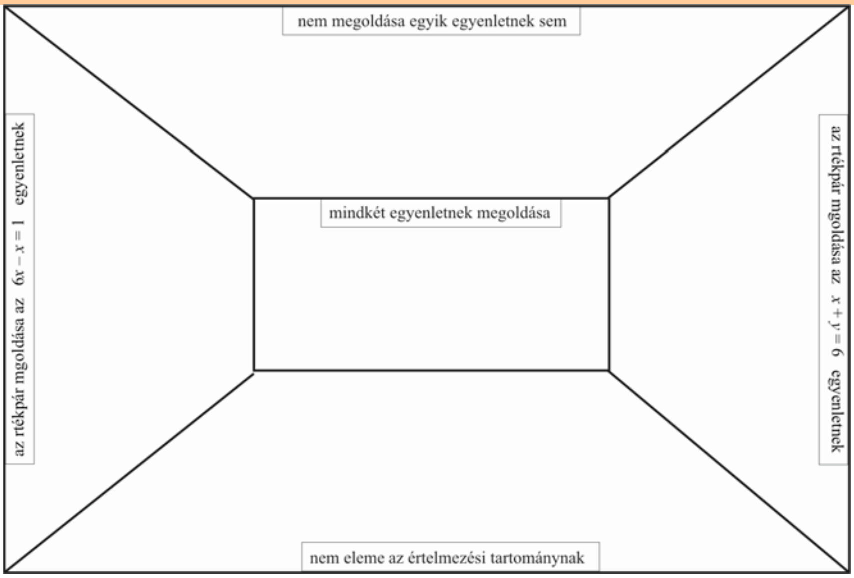
Eddig olyan feladatokkal találkoztunk, melyekben egyetlen ismeretlen mennyiség értékét kellett meghatározni egy darab egyenlet segítségével. Most olyan példákat látunk, ahol két ismeretlen mennyiség értékét keressük, két egyenlet segítségével.

Módszertani ajánlás: Kártyajáték: Közösen felírják a két egyenletet, majd a tanulók négyfős csoportokban dolgoznak tovább. A két egyenlet: $\begin{cases} 6y - x = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$. Az egyenletek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. A tanár minden csoportnak kiosztja az ***1.5 kártyakészletet*** és az ***1.7 ablakot***. A tanulók szétosztják egymás között a kártyákat. Feladat: az értékpárok beírása az ablak megfelelő rubrikáiba. Minden értékpár csak egy helyen szerepelhet.

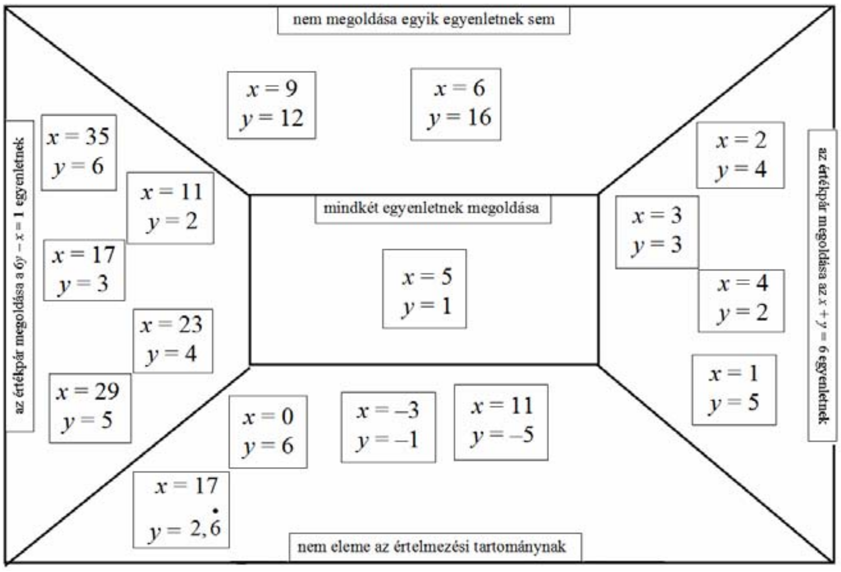
1.5 kártyakészlet:

$x=1$, $y=5$	$x=2$, $y=4$	$x=3$, $y=3$	$x=4$, $y=2$
$x=5$, $y=1$	$x=35$, $y=6$	$x=11$, $y=2$	$x=17$, $y=3$
$x=23$, $y=4$	$x=29$, $y=5$	$x=9$, $y=12$	$x=6$, $y=16$
$x=0$, $y=6$	$x=-3$, $y=-1$	$x=11$, $y=-5$	$x=17$, $y=2{,}6$

1.7 ablak:



1.7 ablak kitöltve:



Mintapélda$_7$

Egy varrónő ruhára és szoknyára kapott megrendelést, összesen 20 darabra (legalább egyet-egyet mindkettőből el kell készítenie). A szoknyát 2000 Ft-ért, a ruhát 3000 Ft-ért készíti el. Hány ruhát és hány szoknyát varrt meg, ha a megrendelő 52 000 Ft-ot fizetett?

Megoldás:

Jelöljük x-szel a ruhák, y-nal a szoknyák számát.

x és y csak pozitív egész szám lehet, hiszen a megrendelő a félig megvarrt ruhát/szoknyát nem fogadja el, és mindkettőből legalább egyet kér.

Összesen 20 darabot varrt. Nézzük meg, hogyan lehet felbontani a 20-at két egész szám összegére:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

A fenti összefüggést az $x + y = 20$ egyenlettel írhatjuk föl. A táblázatban fölsorolt számpárok pedig az egyenletet kielégítő számpárok.

A kifizetett összeggel kapcsolatban is felírhatunk hasonló egyenletet:

$$2000y + 3000x = 52000.$$

Ezt az egyenletet a következő számpárok elégítik ki:

Megjegyzés: Haladjunk végig a pozitív egész számokon. Ezek legyenek x lehetséges értékei. x = 1, 2, 3, ... számokat behelyettesítve a fenti egyenletbe, megkapjuk y értékeit. Csak azokat az $(x;y)$ párokat írjuk be a táblázatba, amelyekben y is pozitív egész.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	23	20	17	14	11	8	5	2

A két táblázatban van egy azonos számpár, mégpedig az $x = 12$ és $y = 8$. Ez azt jelenti, hogy ez a számpár a két egyenlet közös megoldása.

Megjegyzés: választhattuk volna azt az utat is, hogy behelyettesítjük az első egyenlet lehetséges megoldásait a másodikba.

Összefoglalva: A megoldást két egyenlet segítségével kaptuk meg:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2000y + 3000x = 52000 \end{cases}$$

A kapcsos zárójellel összekapcsolt egyenletek összetartoznak, egyenletrendszert alkotnak, amelyben két ismeretlen szerepel.
Az **elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer** megoldásakor olyan számpárt keresünk, amely mindkét egyenletnek megoldása.

A továbbiakban megismerkedünk néhány módszerrel, amelyek általánosabb feladatok megoldásában segíthetnek. Először a grafikus, majd a behelyettesítő módszert tanuljuk meg alkalmazni.

Korábban láttuk, hogy a kétismeretlenes egyenlet megoldásait jelentő értékpárokat koordináta-rendszerben ábrázolva, azok egy egyenesen helyezkednek el. Ez a grafikus megoldási módszer alapja.

Grafikus módszer: Ábrázoljuk azt a két egyenest, amelynek egyenleteiből áll a megoldandó egyenletrendszer. A két egyenes metszéspontjának koordinátái adják az egyenletrendszer megoldáspárját.

Mintapélda$_8$

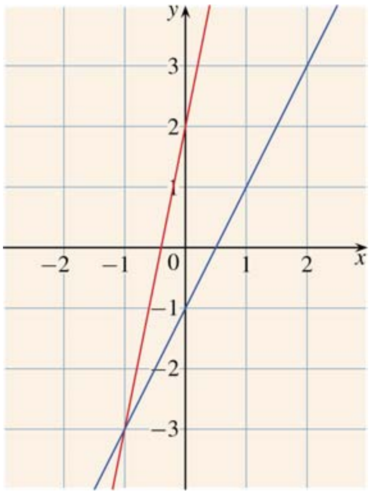
Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszereket, ahol x és y tetszőleges valós számok!

a) $\begin{cases} 2x = y + 1 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ -x + \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2(x + 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases}$

Megoldás:

a) Alakítsuk át az egyenleteket úgy, hogy egyik oldalon csak az y álljon!

$y = 2x - 1$
$y = 5x + 2$



A két egyenlet egy-egy egyenes egyenlete. Ábrázoljuk ezt a két egyenest koordináta-rendszerben.

Közös pontjuk koordinátái mindkét egyenes egyenletét kielégítik. Az egyenletrendszer megoldását tehát a közös pont koordinátái adják.

A két egyenlet közös megoldása, vagyis az egyenletrendszer megoldása az $x = -1$ és $y = -3$ számpár.

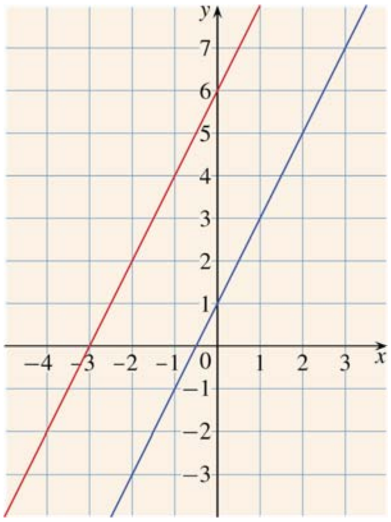
Ellenőrizzük a megoldást, helyettesítsünk vissza az eredeti egyenletekbe!

<u>Első egyenlet:</u>
$2(-1) = -3 + 1$
$-2 = -2$

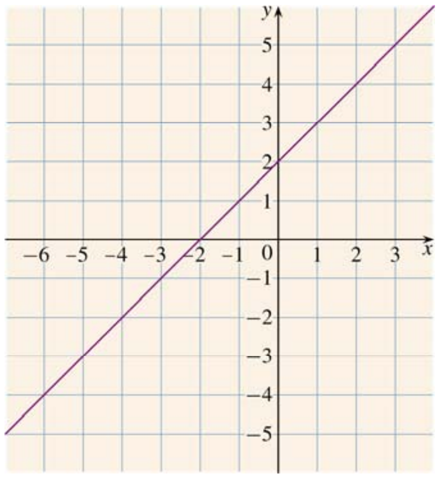
<u>Második egyenlet:</u>
$-3 - 5(-1) = 2$
$2 = 2$

b) Alakítsuk át az egyenleteket úgy, hogy egyik oldalon csak az y álljon!

$y = 2x + 1$
$y = 2x + 6$



E két egyenlettel meghatározott egyenesek meredeksége azonos, csak az y tengellyel vett metszéspontjuk különbözik. Az egyenesek párhuzamosak, nincs közös pontjuk. Tehát az eredeti egyenletrendszernek sincs megoldása.



c) Az előzőekhez hasonlóan most alakítsuk át mindkét egyenletet úgy, hogy csak az y maradjon az egyik oldalon!

$y = x + 2$
$y = x + 2$

Mindkét esetben ugyanazt az egyenletet kaptuk. Ez azt jelenti, hogy a két egyenesnek végtelen sok közös pontja van, így az eredeti egyenletrendszernek is végtelen sok megoldása van. A lineáris egyenletrendszernek vagy egy, vagy végtelen sok megoldása lehet. Az is előfordulhat, hogy nincs megoldás.

Feladatok

10. Oldd meg grafikusan a következő egyenletrendszereket! Helyettesítsd be az egyenletrendszerbe a kapott értékpárokat!

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ y=2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-1=\dfrac{x}{2} \\ y-x=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y-x=3x+4 \\ \dfrac{y}{2}+1=x \end{cases}$ d) $\begin{cases} y-x=x-y \\ \dfrac{3x}{2}-y=\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Megoldás:

a) $x = 1$; $y = 2$; b) $x = -2$; $y = 0$

c) az egyenletrendszer átrendezve: $\begin{cases} y=2x+2 \\ y=2x-2 \end{cases} \Rightarrow$ nincs megoldás.

d) az egyenletrendszer átrendezve: $\begin{cases} y=x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow$ végtelen sok megoldás van.

11. A piacon előszezonban a paprikát is és a paradicsomot is darabra árulják. Összesen 7 darab zöldséget vásároltunk, 460 Ft értékben. Hány paprikát és paradicsomot vettünk, ha a paprikának 60 Ft, a paradicsomnak 80 Ft darabja?

Megoldás:

A paprika darabszámát x-szel, a paradicsomét y-nal jelöljük. $x + y = 7$; $60x + 80y = 460$.

5 darab paprikát és 2 db paradicsomot vásároltunk.

12. Két munkás egy óra alatt 18 munkadarabot állít elő. Mennyit készítenek el külön-külön óránként, ha az egyikük kétszer annyit állít elő, mint a másikuk?

Megoldás:

A kevesebbet előállító x darabot állít elő 1 óra alatt. $x + y = 18$; $x = 2y$

Az egyik munkás 6, a másik 12 darabot állít elő.

V. Kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

Először próbálgatással oldottunk meg egyenletrendszert. Ez akkor működik jól, ha a keresett értékpárra konkrét megszorításokat teszünk, például egy ilyen lehetséges megszorítás az, hogy csak pozitív egész számok esetén van értelme a feladatnak, és az ismeretlenek nem lehetnek nagyobbak egy konkrét számnál. A grafikus megoldás is csak akkor használható jól, ha a megoldás olyan szám, amely pontosan leolvasható a koordinátatengelyekről. Ezek a módszerek nem alkalmazhatóak minden esetben. Viszont a grafikus megoldás alapelve, hogy fejezzük ki az y-t az egyenletekből, egy olyan módszer alapötletét adja, amelynek segítségével általánosan is meg tudunk oldani problémákat. Ez lesz a **behelyettesítő módszer**.

Mintapélda$_9$

„A ló és az öszvér egymás mellett bandukoltak nehéz teherrel a hátukon. A ló panaszkodni kezdett elviselhetetlenül nehéz terhére.

– Miért panaszkodsz? – mondta neki az öszvér. – Hiszen ha egy zsákot átveszek a hátadról, akkor az én málhám kétszer olyan nehéz lesz, mint a tied. Ha azonban te vennél át egy zsákot az én hátamról, akkor a te málhád még mindig csak olyan nehéz lenne, mint az enyém."

Vajon hány zsákot vihetett a ló és hányat az öszvér?

Megoldás: Fordítsuk le a szöveget a matematika nyelvére!

A ló hátán lévő zsákok száma:	x
Az öszvér hátán lévő zsákok száma:	y
ha egy zsákot átveszek a hátadról (ekkor a ló hátán eggyel kevesebb málha lesz)	$x - 1$
akkor az én málhám	$y + 1$
kétszer olyan nehéz lesz, mint a tied	$\boldsymbol{y + 1 = 2\,(x - 1)}$
Ha azonban te vennél át egy zsákot az én hátamról	$y - 1$
akkor a te málhád	$x + 1$
még mindig csak olyan nehéz lenne, mint az enyém (ugyanolyan nehéz lenne, mint az enyém)	$\boldsymbol{x + 1 = y - 1}$

Két egyenletet kaptunk, két ismeretlennel:

$$\begin{cases} y+1=2(x-1) \\ x+1=y-1 \end{cases}$$

(Figyeljünk arra, hogy ha *két* ismeretlenünk van, akkor a megoldáshoz *két* egyenletre van szükség.)

Az egy ismeretlent tartalmazó egyenletet már meg tudjuk oldani. Szükségünk lenne olyan módszerre, amelynek segítségével a két egyenletből egyet, és a két ismeretlenből is egye olyat kapunk, amelyben már csak egy ismeretlen van.

Ismerkedjünk meg a **behelyettesítő módszerrel**!

1. lépés: Valamelyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent. Ez azt jelenti, hogy úgy rendezzük át az egyenletet, hogy az egyik oldalon csak az ismeretlen betűjele maradjon. Minden szám és a másik ismeretlen kerüljön át a másik oldalra. *Megjegyzés:* Átrendezéskor számíthatunk zárójelfelbontásra, együtthatóval történő osztásra, törtes egyenlet esetén közös nevezőre hozásra, majd a közös nevezővel történő beszorzásra. Célszerű úgy választani a kifejezendő ismeretlent és az egyenletet, hogy a kifejezés minél egyszerűbb legyen.	$x+2=y$
2. lépés: Behelyettesítünk a másik egyenletbe. Jelen esetben y helyébe beírjuk az előző lépésben kapott kifejezést.	$\underbrace{x+2}_{y}+1=2(x-1)$
3. lépés: Egyismeretlenes egyenletet kaptunk. Ezt most már **meg** tudjuk **oldani**.	$x+3=2x-2$ $3=x-2$ $5=x$
4. lépés: Visszahelyettesítjük x értékét az 1. lépésben kapott egyenletbe. Ezáltal megtudjuk y értékét.	$5+2=y$ $7=y$

5. lépés: Válasz.	A ló 5, az öszvér 7 zsákot cipelt.
6. lépés: Ellenőrzés, szövegbe történő helyettesítéssel.	Ha az öszvér egy zsákot átvesz a ló hátáról, akkor a ló hátán 4, az öszvér hátán pedig 8 zsák lesz. Ekkor az öszvér málhája valóban kétszer olyan nehéz lesz, mint a lóé. Ha a ló venne át egy zsákot az öszvér hátáról, akkor a ló hátán 6, és az öszvér hátán is 6 zsák lenne. Vagyis a málhájuk ugyanolyan nehéz.

Most következzen egy összetettebb kétismeretlenes egyenletrendszer!

Mintapélda10

Oldjuk meg a $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 15x-7y-1=0 \end{cases}$ kétismeretlenes egyenletrendszert!

Megoldás:

1. lépés: Valamelyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent. Igazából mindegy, hogy melyik egyenletet és melyik ismeretlent választjuk. Viszont a számolásra fokozottan figyeljünk. *Tipp:* jelen esetben az együtthatókat figyelembe véve célszerű az első egyenletet választani. Azon belül pedig fejezzük ki x-et (2-vel könnyű osztani)..	$2x = 6+3y \quad /:2$ $x = 3+1{,}5y$
2. lépés: Behelyettesítünk a másik egyenletbe. Az alsó egyenletben x helyére írjuk az első lépésben kapott kifejezést. FONTOS! Ügyeljünk arra, hogy x helyébe egy összeg fog kerülni, amit megszorzunk 15-tel. Ezért az első lépésben kapott kifeje-	$15\cdot(3+1{,}5y)-7y-1=0$

zést behelyettesítéskor tegyük zárójelbe!	
3. lépés: Megoldjuk az egyismeretlenes egyenletet.	$15\cdot(3+1{,}5y)-7y-1=0$ /zárójel-felbontás $45+22{,}5y-7y-1=0$ /összevonás $44+15{,}5y=0$ $/-44$ $15{,}5y=-44$ $/:15{,}5$ $y=-2{,}84$
4. lépés: Visszahelyettesítjük y értékét az 1. lépésben kapott egyenletbe. Ezáltal megtudjuk x értékét.	$x=3+1{,}5\cdot(-2{,}84)=-1{,}26$
5. lépés: Ellenőrzés. A kapott x és y értékeket visszahelyettesítjük az egyenletekbe. FONTOS! Mivel századokra kerekített értékekkel számoltunk, ezért századnyi eltérés még elfogadható. Ha pontos eredményeket kívánunk meg, akkor törtekkel, és ne tizedestörtekkel számoljunk.	<u>1. egyenlet:</u> bal oldal: $2x–3y = 2\cdot(–1{,}26) – 3\cdot(–2{,}84) = 6$ ez megegyezik a jobb oldalon szereplő értékkel. <u>2. egyenlet:</u> bal oldal: $15\cdot(–1{,}26) – 7\cdot(–2{,}84) – 1 =$ $= –18{,}9 + 19{,}88 – 1 = –0{,}02$ a jobb oldal értéke 0.

Módszertani megjegyzés: Minden csoportban osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint, valamint a csoportok kapjanak sorszámokat is. Szétválnak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, az azonos betűsök dolgoznak most együtt. A tanár a 13., 14., 15. és 16. feladatokból kijelöl egyet-egyet. Ha elkészültek a csoportok, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja a feladatának a megoldását. A csoporton belül összekeverik az A, B, C, D jelű kártyákat, mindenki húz egyet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoportszámát és betűjelét kihúzza a tanár.

1.6. kártyakészlet:

1	2	3	4	A	B	C	D
5	6	7	8	A	B	C	D
				A	B	C	D
				A	B	C	D

Feladatok:

A jelűek feladata:

13. Oldd meg a következő egyenletrendszereket, majd ellenőrizz!

a) $\begin{cases} x+y=12 \\ x=3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=7 \\ y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ y=2x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-1=y \\ y=x+1 \end{cases}$

Megoldás:

a) $x = 9$; $y = 3$; b) $x = 4$; $y = 3$; c) $x = 5$; $y = 10$; d) $x = 2$; $y = 3$.

B jelűek feladata:

14. Oldd meg a következő egyenletrendszereket, majd ellenőrizz!

a) $\begin{cases} a=4+2b \\ 5a-4b=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4m+3n=6 \\ 2m=4-n \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3e=5+f \\ 5e+2f=23 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2k+l=8 \\ k-3l=11 \end{cases}$

Megoldás:

a) $a = 8$; $b = 2$; b) $m = 3$; $n = –2$; c) $e = 3$; $f = 4$; d) $k =5$; $l = –2$.

C jelűek feladata:

15. Oldd meg a következő egyenletrendszereket, majd ellenőrizz!

a) $\begin{cases} 5x+6y=13 \\ 7x+18y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=-4 \\ 6x+5y=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 9y - 15 = 0 \\ 4x - 6y - 46 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5y + 2 = 2x \\ 26 - 3y = 6x - 64 \end{cases}$

Megoldás:

a) $x = 5$; $y = -2$; b) $x = -20{,}5$; $y = 26$; c) $x = 10{,}5$; $y = -\frac{2}{3}$; d) $x = \frac{38}{3}$; ,$y = \frac{14}{3}$.

D jelűek feladata:

16. Oldd meg a következő egyenletrendszereket, majd ellenőrizz!

a) $\begin{cases} 3x - 1 = \frac{x}{2} + y \\ 5y = 1 - x + 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 1{,}5 = 2(x - y) \\ 8x - 2y = 4{,}5 - x + y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4 - 1{,}5(y + 5) = (x - 5y) : 2 \\ -2(2x - 3y) + 10 = y - x \end{cases}$

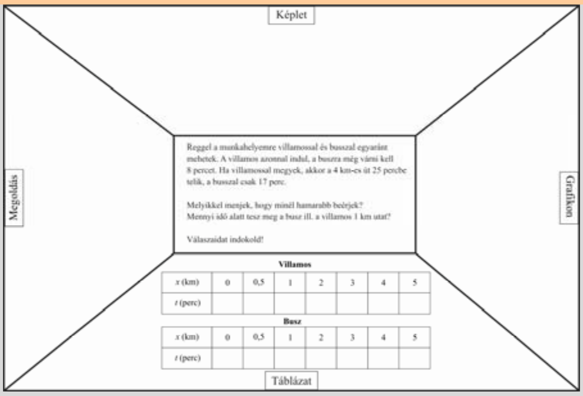
Megoldás:

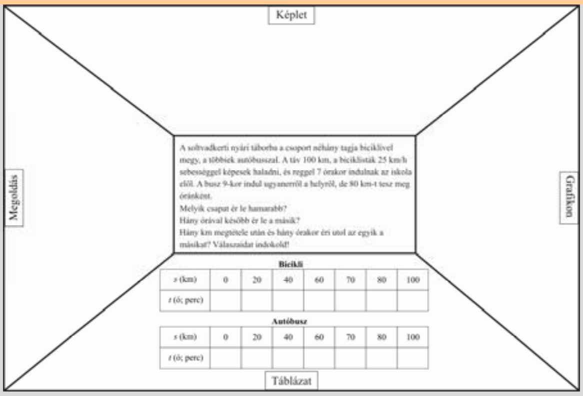
a) $x = 0{,}5$; $y = 0{,}25$; b) $x = 0{,}75$; $y = 0{,}75$; c) $x = 5$; $y = 1$.

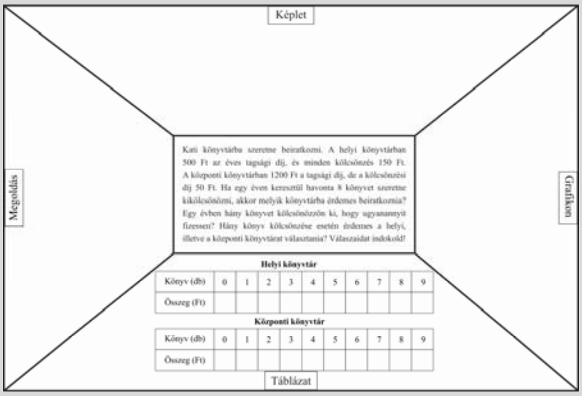
VI. Kétismeretlenes egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok

Módszertani megjegyzés: Az 11. mintapélda közös feldolgozása után a tanulók párban dolgoznak. A tanár kiválasztja az órán megoldandó két szöveges feladatot (*ajánlás:* 17. és 19. feladat), felváltva kiosztja az ehhez tartozó ablakokat az ***1.8 ablakcsomag**ból*.

1.8 ablakcsomag







Egy csoporton belül a tanulók felosztják egymás között a részfeladatokat, kitöltik az ablak rubrikáit. Ha elkészültek, két-két, különböző feladatot megoldó csoport kicseréli egymás ablakait, és ellenőrzik, kijavítják a megoldásokat, vagy a tanár feladatonként kiválaszt egy tanulót, aki a táblára írja a megoldást.

A 20. – 23. feladatok egyszerűbbek az előbbieknél. Házi feladatnak vagy differenciált foglalkozáshoz ajánlott.

Mintapélda$_{11}$

Jancsi bankszámlát szeretne nyitni. Az első bank éves számlafenntartási díja 3000 Ft, de havonta 2 tranzakció (pénz felvétele, egyenleg lekérdezése, utalás, stb.) ingyenes, minden további tranzakció 70 Ft. A második banknál az éves számlafenntartási díj 1300 Ft, de minden tranzakció 170 Ft. Melyik bankot érdemes választania, ha az első hónapban 5 tranzakció történik? Az első hónapban hány tranzakció esetén érdemes az első bankot választani és mikor a másodikat? Az első hónapban hány tranzakció esetén fizetne ugyanannyit mindkét banknak? Válaszaidat indokold!

Megoldás:

Értéktáblázat készítése:

Elsők bank

Tranzakciók száma.	1	2	3	5	10	15	16	17
Díj (Ft)	3000	3000	3070	3210	3560	3910	3980	4050

Második bank

Tranzakciók száma.	1	2	3	5	10	15	16	17
Díj (Ft)	1470	1640	1810	2150	3000	3850	4020	4190

Egyenletek:

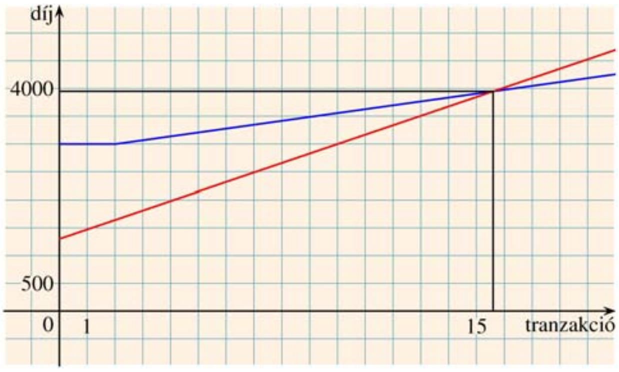
Első bank:

$y = 3000 + (x - 2) \cdot 70$, ha $x \geq 3$

Második bank:

$y = 1300 + 170\,x$

Grafikon készítése:



Szöveges válasz:

Az első hónapban 5 tranzakció esetén a második bankot célszerű választani, mert itt csak 2150 Ft–ot kell fizetnie, míg az első banknál 3210 Ft–ot.

Az első hónapban kb. 15,6 tranzakció esetén kellene ugyanakkora díjat fizetnünk mindkét banknál. A tranzakciók száma csak természetes szám lehet, ezért 15 ill. annál kevesebb tranzakció esetén a második bankot érdemes választani, 16 vagy annál több tranzakció esetén pedig az elsőt.

Útmutató a 17. – 19. feladatok megoldásához: Oldd meg a szöveges feladatokat! Töltsd ki az értéktáblázatokat, írd fel az egyenletrendszert, készíts grafikont a feladatokhoz!

Feladatok

17. Reggel a munkahelyemre villamossal és busszal egyaránt mehetek. A villamos azonnal indul, a buszra még várni kell 8 percet. Ha villamossal megyek, akkor a 4 km-es út 25 percbe telik, a busszal csak 17 perc. Melyikkel menjek, hogy minél hamarabb beérjek? Mennyi idő alatt tesz meg a busz ill. a villamos 1 km utat? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Villamos

x(km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t(perc)							

Busz

x(km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t(perc)							

Megoldás

Értéktáblázat kitöltése:

Villamos

x (km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t (perc)	0	3,125	6,25	12,5	18,75	25	31,25

Busz

x (km)	0	0,5	1	2	3	4	5
t (perc)	8	10,125	12,25	16,5	20,75	25	29,25

Hozzárendelési szabály meghatározása:

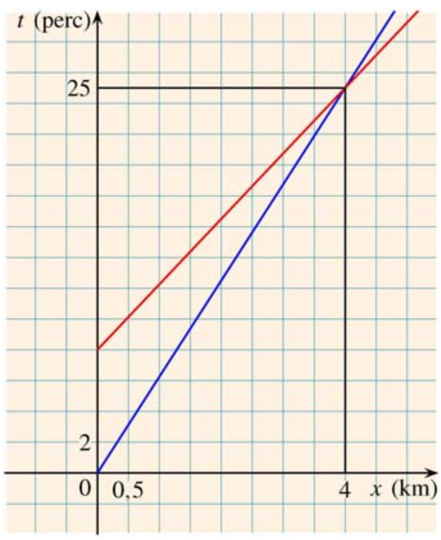
$t = 6,25\,x$

$t = 4,25\,x + 8$

Szöveges válasz:

Mindegy, hogy villamossal vagy busszal megyek, mert ugyanakkorra fogok beérni a munkahelyemre.

Ábrázolás grafikonnal



A villamos 1 km-t 6,25 perc alatt tesz meg, míg a busz csak 4,25 perc alatt.

18. A soltvadkerti nyári táborba a csoport néhány tagja biciklivel megy, a többiek autóbusszal. A táv 100 km, a biciklisták 25 km/h sebességgel képesek haladni, és reggel 7 órakor indulnak az iskola elől. A busz 9-kor indul ugyanerről a helyről, de 80 km-t tesz meg óránként. Melyik csapat ér le hamarabb? Hány órával később ér le a másik? Hány km megtétele után és hány órakor éri utol az egyik a másikat? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Bicikli

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (ó; perc)							

Autóbusz

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (ó; perc)							

Megoldás

Értéktáblázat kitöltése:

Bicikli

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (ó; perc)	7ó	7ó 48p	8ó 36p	9ó 24p	9ó 48p	10ó 12p	11ó

Autóbusz

s (km)	0	20	40	60	70	80	100
t (ó; perc)	9ó	9ó 15p	9ó 30p	9ó 45p	9ó 52,5p	10ó	10ó15 p

Hozzárendelési szabály meghatározása:

	Bicikli	Autóbusz
sebesség (v)	25 km/h	80 km/h
indulás időpontja:	7 ó	9 ó
az indulás óta eltelt idő(t)	t	$t - 2$
út(s)	$s = 25t$	$s = 80(t-2)$

Az út–idő grafikon elkészítéséhez

használt hozzárendelési utasítások:

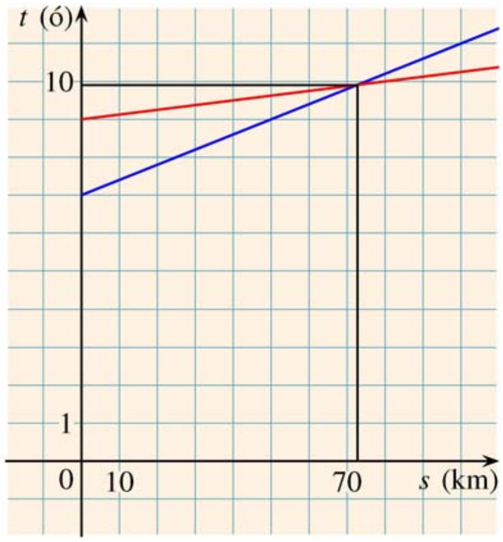
$t = \frac{s}{25} + 7$, illetve $t = \frac{s}{80} + 2 + 7 = \frac{s}{80} + 9$.

Szöveges válasz:

Az autóbusszal utazók érnek le hamarabb. A biciklizők $\frac{3}{4}$ órával később érkeznek meg.

Az autóbusszal utazók kb. 70 km megtétele után, 10 óra előtt érik utól a biciklistákat.

Ábrázolás grafikonnal



19. Kati könyvtárba szeretne beiratkozni. A helyi könyvtárban 500 Ft az éves tagsági díj, és minden kölcsönzés 150 Ft. A központi könyvtárban 1200 Ft a tagsági díj, de a kölcsönzési díj 50 Ft. Ha egy éven keresztül havonta 8 könyvet szeretne kikölcsönözni, akkor melyik könyvtárba érdemes beiratkoznia? Egy évben hány könyvet kölcsönözzön ki, hogy ugyanannyit fizessen? Hány könyv kölcsönzése esetén érdemes a helyi, illetve a központi könyvtárat választania? Válaszaidat indokold!

Kitöltendő értéktáblázatok:

Helyi könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)							

Központi könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)							

Megoldás

Értéktáblázat kitöltése:

Helyi könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)	500	650	800	1250	1550	1700	1850

Központi könyvtár

Könyv(db)	0	1	2	5	7	8	9
Összeg(Ft)	1200	1250	1300	1450	1550	1600	1650

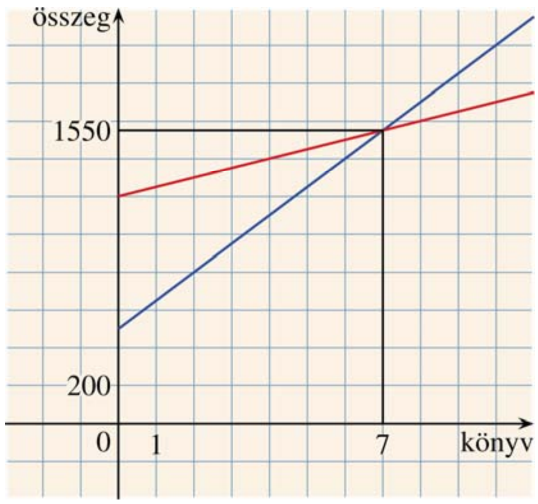
Hozzárendelési szabály meghatározása:

k a könyvek darabszáma, $ö$ a k könyv kölcsönzésének összköltsége.

$ö = 500 + 150\,k$

$ö = 1200 + 50\,k$

Ábrázolás grafikonnal



Szöveges válasz:

Ha egy éven keresztül minden hónapban 8 könyvet szeretne kikölcsönözni, akkor a 2. könyvtárba érdemes beiratkoznia, mert így csak 6000 Ft-ot kell fizetnie, míg az 1.-ben 14900 Ft-ot.

Egy év alatt 7 könyv kölcsönzése esetén fog ugyanannyit fizetni. Ha ennél kevesebbet akar kölcsönözni, akkor válassza az első könyvtárat, ha többet, akkor a másodikat.

20. Mekkorák a 15 m kerületű téglalap oldalai, ha a két oldal különbsége 3 m?

Megoldás:

A keresett oldalakat jelölje x és y. A két egyenlet: $15 = x + y$; $x - y = 3$.

A megoldás: $x = 9$; $y = 6$.

21. Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyikről tudjuk, hogy az egyik szöge 82°-os, a másik két szögeközül pedig az egyik 42°-kal kisebb a másiknál?

Megoldás:

A keresett két szöget jelölje β és γ. Ekkor $\gamma = \beta - 42°$ és $180° = 82° + \beta + \gamma$.

A megoldások: $\beta = 70°$; $\gamma = 28°$.

22. Két munkás 500 alkatrészt állít elő naponta. Mennyit készítenek külön-külön, ha az egyik 20%-kal többet készít, mint a másik?

Megoldás:

A két munkás külön-külön x és y db alkatrészt készít.

Az egyenletek: x + y = 550 és x = 1,2y.

A megoldások: $y = 250$; $x = 300$.

23. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor eggyel kisebb számot kapunk, mint az eredeti szám fele. Ha az eredeti számot és a számjegyek felcserélésével kapottat összeadjuk, akkor 77-et kapunk. Számítsuk ki az eredeti számot!

Megoldás:

Az eredeti szám számjegyeit jelölje a és b.

Az egyenletek: $10b + a = \frac{10a + b}{2} - 1$, illetve $10a + b + 10b + a = 77$.

Az eredeti szám: 52.