Matematika „A”
10. szakiskolai évfolyam

2. modul
Pitagorasz tétele, négyzetgyök, valós számok

Készítette: Vidra Gábor

A modul célja	Ismerje és egyszerű feladatokban alkalmazza a Pitagorasz-tételt. Értelmezze és használja helyesen a négyzetgyök fogalmát, alkalmazza feladatokban a négyzetgyökvonást. Ismerje a valós számok halmazát. Használja helyesen a zsebszámológépet négyzetgyökvonással kapcsolatos feladatokban. A vektorokkal kapcsolatos ismeretek ismétlése, kibővítése, vektorműveletek megismerése.
Időkeret	Ajánlott óraszám:14 óra, a modulban kidolgozott órák száma: 8 tanóra.
Ajánlott korosztály	10. szakiskolai évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Képzőművészet, zene, építészet, informatika, természeti környezet, kertészet, szabás-varrás, rajz, vizuális kultúra. Szűkebb környezetben: Sokszögek, transzformációk, hasonlóság, térgeometria, halmazelmélet, trigonometria. Ajánlott megelőző tevékenységek: Általános iskolai ismeretek szögekről, háromszögről; vektorok tulajdonságai, műveletei. Ajánlott követő tevékenységek: Hasonlósági feladatok, bizonyítások hasonlóság felhasználásával, trigonometriai és koordináta-geometriai feladatok, térfogat- és felszínszámítás.

A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Geometriai alakzatok mennyiségi jellemzői, mérőszámok összehasonlítása és rendezése, a számolási készség alkalmazása a valóság tárgyain, illetve azok geometriai modelljein. Mennyiségi következtetés: Sík- és téralakzatok jellemzői, következtetések megfogalmazása mennyiségi jellemzőik között. A mennyiségek folytonossága, a fogalom továbbfejlesztése. Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet: Síkidomok adatainak becslése. Valóságos tárgyak, modellek távolságadatainak közelítő meghatározása, az ehhez szükséges képességek fejlesztése. Szöveges feladatok, metakogníció: Szövegértelmezés továbbfejlesztése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek fejlesztése. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Síkbeli és térbeli analógiák felfedezése. A valóság tárgyainak jellemzése a geometriai fogalmak segítségével, absztrakciós képesség fejlesztése. Induktív, deduktív következtetés: Összefüggések, képletek felfedezése gyakorlati tapasztalatból kiindulva, azok általánosítása és alkalmazása más esetekben

TÁMOGATÓ RENDSZER

A modulhoz készült eszközök:

Számítógépes kivetítéshez bemutató,

2.1 kártyakészlet csoportbontáshoz;

2.2 eszközkészlet a Pitagorasz-tétel átdarabolásos bizonyításához;

2.3 triminó a négyzetgyökvonásról;

2.4 totó a négyzetgyökvonásról.

Ezeken kívül a tanári modul tartalmaz kérdéseket diákkvartetthez, valamint csoportmunkához kidolgozott feladatokat.

ISMERETEK, TANANYAGTARTALMAK:

Pitagorasz-tétel. Tétel és megfordítása. Sejtés, bizonyítás.

Számok négyzete, négyzetgyöke. Irracionális szám fogalma.

Pitagorasz-tétel alkalmazása számításos geometriai feladatok megoldásában.

Számok négyzete, négyzetgyöke. Négyzetre emelés és négyzetgyökvonás zsebszámológéppel.

Műveletek vektorokkal, paralelogramma-szabály. Eredő vektor és vektorösszetevők hosszának kiszámítása derékszögű háromszögre visszavezethető esetekben.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Pitagorasz-tétel			
1	A Pitagorasz-tétel ismétlése, feltétel pontosítása (tanári magyarázat, 1. feladat frontálisan)	Figyelem, rendszerezés	1. feladat
2	Csoportbontás	Kooperáció, rendszerezés, metakogníció	2.1 kártyakészlet
3.	Feladatok csoportmunkában	Rendszerezés, számolás, metakogníció, kooperáció	2. feladat, 2.2 eszközkészlet (3. feladat)
4.	Számológép használata		1. mintapélda, 4. és 5. feladat, számológép

II. A valós számok halmaza			
1.	Bevezető feladatok (csoportmunkában 6. és 7. feladatok, majd diákkvartett)	Kooperáció, rendszerezés, metakogníció, számolás	6–7. feladat, számológép
2.	Négyzetgyökvonás, irracionális számok fogalma (tanári magyarázat, frontális), valós számok halmaza	Rendszerezés, számolás, metakogníció, kooperáció, számológép használata	Tanulói munkafüzet, számológép
3.	Feladatok csoportmunkában		8–11. feladat, 2.3 triminó, 2.4 totó
4.	A gyökvonás alkalmazása (feladatok, tetszőleges módszerrel)		12–17. feladat
5.	A négyzetgyök-függvény (frontális munka)	Függvényszemlélet, figyelem, számolás	Tanári magyarázat, 18. feladat
6.	Megfordítható állítások (frontális munka, utána csoportmunkában a feladatok)	Rendszerezés, figyelem, szükséges és elégséges kapcsolat, logikus gondolkodás	19–20. feladat

III. Pitagorasz-tétellel kapcsolatos feladatok			
1.	Mintapéldák (frontális, tanári magyarázat)	Számolás, modellalkotás, kooperativitás, számológép használata	2–4. mintapélda
2.	Feladatok megoldása		21–48. feladatokból válogatás
3.	Összetett feladatok		5. mintapélda, 49–67. feladatokból válogatás

IV. Vektorok			
1	Ismétlés (frontális, tanári irányítás kérdésekkel; fogalmak tisztázása)	Rendszerezés, geometriai szemlélet, modellalkotás, figyelem	6. mintapélda
2.	Feladatok megoldása	Rendszerezés, számolás, metakogníció, kombinativitás, modellalkotás	68–71. feladat.
3.	Vektorműveletek (frontális tanári magyarázat, majd feladatmegoldás tetszőleges módszerrel)		7–10. mintapélda, 72–74. feladatokból válogatás

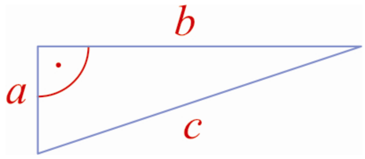
I. A Pitagorasz-tétel

Módszertani megjegyzés: A modulhoz használjuk a bemutatót, amely tartalmazza a mintapéldákat, az elméletet és még néhány feladatot (mint pl. az 1. feladat).
Az anyagrészt frontális ismétléssel kezdjük (1. feladat), amelyben tanári kérdések alapján tisztázzuk a Pitagorasz-tétellel kapcsolatos ismereteket.

A **Pitagorasz-tételt** már ismerjük: **derékszögű háromszögben a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével**.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

a és *b* a **derékszögű háromszög** befogói, *c* az átfogója.

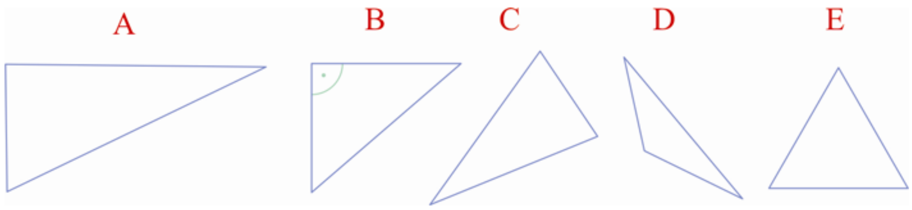


Ebben a modulban megvizsgáljuk, hogyan lehet használni ezt a rendkívül fontos, egyszerű ugyanakkor gyakran használható matematikai eszközt.

Feladatok

1. Válaszolj a következő kérdésekre!

a) Az ábrán látható háromszögek közül melyikre érvényes a Pitagorasz-tétel?



Használj szögmérőt!

Megoldás: Csak a B-re, a többi nem (pontosan) derékszögű.

Módszertani megjegyzés: A továbbiakban a tanulók csoportmunkában dolgoznak. Csoportbontáshoz használjuk a ***2.1 kártyakészletet***.
Minden tanuló kap egy kártyát, amelyen egy derékszögű háromszög két befogójának hosszát találja. Az a feladata, hogy számítsa ki az átfogó hosszát, és találja meg azokat a társait, akiknél az átfogó hosszának egészre kerekített értékére ugyanaz a szám adódik.

2.1 kártyakészlet

10 14 (1.)	7 15 (17.)	5 16 (19.)	12 12 (33.)	15 17 (12.)	12 20 (6.)	10 21 (24.)	17 15 (28.)
20 14 (16.)	22 10 (2.)	21 12 (20.)	8 23 (32.)	5,8 6,8 (11.)	4 7,5 (7.)	3,8 8,4 (25.)	5,3 7 (36.)
17 22 (15.)	19 20 (3.)	13 25 (21.)	11 26 (31.)	10,5 18,4 (10.)	13,7 15,9 (8.)	11,9 17,6 (26.)	19,2 9,5 (35.)
3 4 (14.)	2 4,9 (4.)	1 4,4 (22.)	2,7 3,8 (30.)	25 15 (18.)	25,7 13,8 (9.)	21,1 19,2 (27.)	18,5 22 (34.)
12,6 22,4 (13.)	10,8 24 (5.)	17,3 19,7 (23.)	20,8 15 (29.)				

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokat csoportmunkában oldjuk meg!

2. Fogalmazd meg a geometria nyelvén, négyzetek segítségével is a Pitagorasz-tételt!

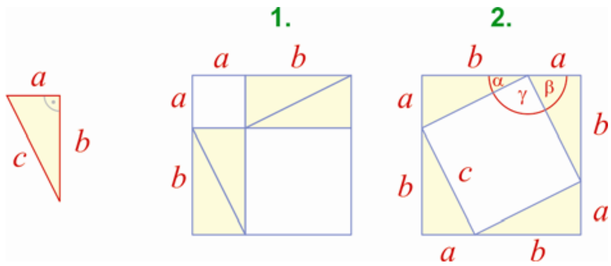
Megoldás: A befogókra emelt négyzetek területének összege megegyezik az átfogóra emelt négyzet területével.

A Pitagorasz-tétel bizonyítása (olvasmány)

A Pitagorasz-tételt leggyakrabban a Babilonból származó, i.e. 1900 és i.e. 1600 között keletkezett és agyagtáblára rögzített bizonyítással igazoljuk, amelyet egy *a* + *b* oldalú négyzet (*a* és *b* a derékszögű háromszög befogói) átdarabolásával végzünk.

Mindkét négyzet területe ugyanannyi, $(a+b)^2$. Az 1. négyzet területe

$T_1 = a^2 + b^2 + 4\cdot\dfrac{a\cdot b}{2} = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b$.



A 2. négyzet belsejében egy négyszöget fog közre a négy egybevágó derékszögű háromszög. Minden oldala egyenlő, és minden szöge 90° (mert $\alpha+\beta=90°$, és $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = 90°$), ezért a középen levő négyszög négyzet, területe c^2. Így a 2. négyzet területe

$$T_2 = c^2 + 4\cdot\frac{a\cdot b}{2} = c^2 + 2\cdot a\cdot b .$$

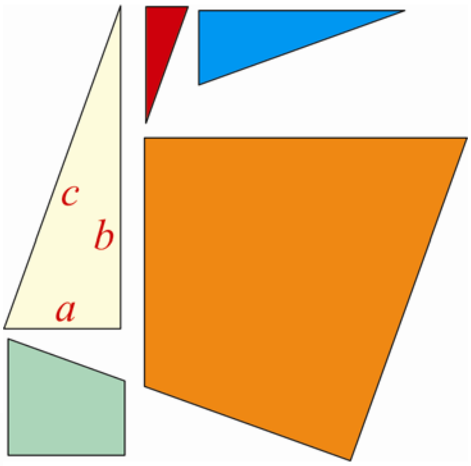
A két négyzet területének egyenlőségéből adódik az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.

Módszertani megjegyzés: A bizonyítás az érdeklődő gyerekek igényei miatt került a Tanulók könyvébe. Nem követelmény a bizonyítás megtanulása kívülről, azonban fontosnak tartjuk azt is, hogy a matematikai bizonyításokból is kapjanak ízelítőt a tanulók. Javasoljuk bemutató segítségével átvenni a bizonyítást, mert ez ötleteket adhat a következő feladat megoldásához, ahol a gyerekeknek átdarabolások segítségével kell alátámasztani a Pitagorasz-tételt.

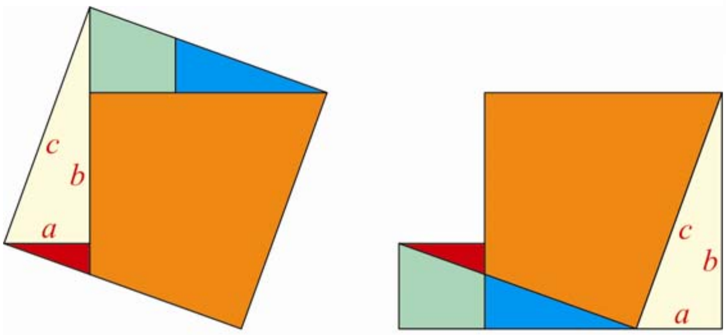
A következő feladat megoldásához minden csoportnak készítsünk mindkét ábrából két-két borítékot, amelybe a ***2.2 eszközkészlet*** felvágásával keletkező síkidomokat rakjuk.

A csoportok feladata az, hogy előállítsák és lerajzolják a Pitagorasz-tétel bizonyítását valamelyik (vagy mindkét) készlet kétféle lerakásával (vagyis a padon két különböző összeállítás szerepel majd ugyanazokból a síkidomokból).

3. A mellékelt öt síkidomot illeszd össze kétféleképpen úgy, hogy bizonyítsd a Pitagorasz-tételt! Egy *c* oldalú négyzetet kell kiraknod, majd ugyanezeket a darabokat úgy kell összeállítanod, hogy az megfeleljen az $a^2 + b^2$ kifejezésnek!



Megoldás:



c^2 $a^2 + b^2$

Módszertani megjegyzés: B. A. Kordemszkij és N. V. Ruszalev bizonyítása (1952): két négyzet felosztása úgy, hogy a részekből nagyobb négyzetet lehessen összeállítani.

A következő feladatban megtanuljuk a számológép használatát úgy, hogy a kijött részeredményeket nem kell felírni és – esetleg kerekítve – újra begépelni. A gépen található egy ANS funkció, mellyel az előző művelet végeredményét hívhatjuk elő.

Mintapélda₁ – A számológép használata

A derékszögű háromszög átfogójának hossza 12 cm, befogója 8 cm. Mekkora a másik befogó?

Megoldás:

A Pitagorasz-tételt felírjuk, majd kifejezzük a hiányzó oldalt:

$a^2+8^2=12^2 \Rightarrow a^2=12^2-8^2$, ahonnan $a=\sqrt{12^2-8^2}$.

a kiszámítása számológéppel történik. Először kiszámítjuk a $\sqrt{\ }$ alatti kifejezés értékét, majd ebből négyzetgyököt vonunk:

12 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ 80 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{=}$ 8.94427191

Megjegyzés: Az ANS funkció szolgál az előző művelet eredményének előhívására. Egyes gépeken erre külön billentyűt találunk, más gépek esetén pl. az = billentyű második funkciója (a billentyű fölött szerepel az ANS jelzés, SHIFT vagy 2ndF billentyű megnyomása után kell az = jelet megnyomni).

A régebbi gépek esetén elegendő csak a négyzetgyök billentyűt megnyomni:

12 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ 80 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 8.94427191

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következőkben bevezető alapfeladatok szerepelnek, amelyek segítségével a tanulók gyakorolhatják a számológép használatát. Igyekezzünk őket arra ösztönözni, hogy hivatkozzanak névvel a használt tételre: „Pitagorasz-tétellel: …". A feladatok megoldásához csoportmunkát javaslunk: a gyerekek önállóan oldják a feladatokat,és az eredményt egyeztetik a társaikkal. A négyzetgyökök pontos és kerekített értékével a későbbiekben foglalkozunk, a feladatok megoldásaiban a számológép használatára összpontosítunk.

4. Számítsd ki zsebszámológéppel a derékszögű háromszög meg nem adott oldalának hosszát!

Módszertani megjegyzés: Ahol nem jelöli a feladat az oldalak betűjelét, nem fontos betűt választani. Ahol betű is szerepel a feladatban, próbáljuk a gyerekeket arra ösztönözni, hogy számok helyett betűkkel fejezzék ki az ismeretlen oldalt.

a) Az átfogó 14 cm, az egyik befogó 8 cm;

b) $x=18$ cm, $y=24$ cm. Mekkora az átfogó (z)?

c) $s=25$ cm, $k=4,2$ dm. Mekkora a hiányzó befogó?

d) A derékszögű háromszög leghosszabb oldala 54 cm, egy másik 0,32 m.

e) A két befogó hossza 18 mm és 3,2 cm.

f) $p < q < r$ a derékszögű háromszög oldalai, $r = 28$ cm, $p = 15$ cm.

Megoldás: a) $\sqrt{132} \approx 11{,}5$ cm; b) $z = \sqrt{900} = 30$ cm; c) $\sqrt{11{,}39} \approx 3{,}37$ dm;

d) $\sqrt{1892} \approx 43{,}5$ cm; e) $\sqrt{1348} \approx 36{,}7$ mm; f) $\sqrt{559} \approx 23{,}6$ cm.

5. A következő számhármasok közül melyik lehet egy derékszögű háromszög oldalainak hossza?

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
x (cm)	8	10	14	13	15	20	24	45	33	0,9	3,4
y (cm)	6	12	5	5	15	30	25	55	55	1,2	2,1
z (cm)	10	20	8	12	15	20	7	15	44	1,5	2,9

Megoldás: 1, 4, 7, 9, 10.

II. A valós számok halmaza

A négyzetgyök fogalma

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokat csoportmunkában dolgozzuk fel. Minden tanuló a 6. és 7. feladat példáit oldja meg, a tapasztalatokat egyeztetik. 7-8 perc után diákkvartett keretében feldolgozzák az eredményeket. Az a cél, hogy a négyzetgyökvonás műveletét, a $\sqrt{}$ jellel történő jelölést és a pontosság, illetve kerekítés kérdését megértsék, valamint rávezessük a gyerekeket az irracionális számok létezésére.

Feladat

6. Határozd meg a következő kifejezések értékét! Ahol közönséges törtet találsz, ott próbálj közönséges törttel dolgozni!

a) $\sqrt{25}$; $\sqrt{-169}$; $\sqrt{2000}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{12222{,}6}$; $\sqrt{3{,}24}$;

b) $\sqrt{361}$; $\sqrt{-16}$; $\sqrt{30500}$; $\sqrt{\frac{225}{81}}$; $\sqrt{1206{,}8}$; $\sqrt{31{,}36}$;

c) $\sqrt{121}$; $\sqrt{-81}$; $\sqrt{120000}$; $\sqrt{\frac{64}{9}}$; $\sqrt{2050{,}87}$; $\sqrt{17{,}64}$;

d) $\sqrt{144}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt{2020200}$; $\sqrt{\frac{121}{100}}$; $\sqrt{0{,}23}$; $\sqrt{6{,}76}$.

Megoldás: a) 5; nem értelmezett; ≈ 44,7; $\frac{4}{5}$; ≈ 110,6; 1,8; b) 19; nem értelmezett; ≈ 174,6; $\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$; ≈ 34,7; 5,6; c) 11; nem értelmezett; ≈ 346,4; $\frac{8}{3}$; ≈ 45,3; 4,2;

d) 12; nem értelmezett; ≈ 1421,3; $\frac{11}{10}$; ≈ 0,48; 2,6.

7. Az alábbi egyenlőségek közül melyik igaz, és melyik hamis?

$\sqrt{16}=4$; $\sqrt{16}=-4$; $\sqrt{-16}=4$; $\sqrt{-16}=-4$; $-\sqrt{16}=4$, $-\sqrt{16}=-4$;

$4^2=16$; $(-4)^2=-16$; $-4^2=-16$; $\sqrt{(-4)^2}=-4$; $\sqrt{4^2}=4$; $\sqrt{-4^2}=-4$;

$\sqrt{(-4)^2}=4$.

Megoldás: Igaz állítások: $\sqrt{16}=4$; $-\sqrt{16}=-4$; $4^2=16$; $-4^2=-16$; $\sqrt{4^2}=4$; $\sqrt{(-4)^2}=4$.

Módszertani megjegyzés: Kérdések a diákkvartetthez (a Tanulók könyvét csukják be a gyerekek):

1. Hogyan jelöljük azt a számot, amelynek négyzete 20?
2. Mennyi $\sqrt{20}$ két tizedesjegyre kerekített értéke?
3. Mi a négyzetre emelés ellentett művelete?
4. Miért nem értelmezett $\sqrt{-16}$?
5. Milyen előjelű lehet egy szám négyzetgyöke?
6. Tapasztalataitok alapján milyen számból lehet négyzetgyököt vonni?

A négyzetre emelésnek a négyzetgyökvonás az ellentett művelete. Legyen a nemnegatív szám.

> $\sqrt{a}$ -nak $(a \geq 0)$ nevezzük azt a nemnegatív számot, aminek a négyzete: a.

Jelölésekkel: $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Az is teljesül, hogy $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$, és ekkor a tetszőleges szám.

Megjegyzés: $\sqrt{a}$ meghatározásában két kikötés is szerepel. Az $a \geq 0$, ez azt jelenti, hogy negatív számból nem lehet négyzetgyököt vonni. Ennek egyszerű oka van: a négyzetgyökvonás fordított művelete a négyzetre emelés és nincs olyan szám, aminek a négyzete negatív lenne (hisz a negatív számokat négyzetre emelve is pozitívot kapunk). Másrészt a gyökvonás eredménye sem lehet negatív: $\sqrt{a} \geq 0$ (például $\sqrt{4} = 2$, és nem –2).

Az irracionális számok halmaza

> **Emlékeztető**
> - Természetes számok: **N** = { 0; 1; 2; 3; ...}
> - Egész számok: **Z** = {...; –2; –1; 0; 1; 2; ...}
> - Racionális számok: **Q**, két egész szám hányadosaként felírható számok.

Emlékeztető: Az **egész számok halmaza** (**Z**) a **természetes számok halmazából** (**N** halmaz elmei: 0; 1; 2; …) és ellentettjeikből áll (–1; –2; –3; …), de két egész szám hányadosa nem mindig egész szám. A két egész szám hányadosaként felírható számokat racionális számoknak nevezzük. A **racionális számok halmaza** (**Q**) tartalmazza az összes olyan számot, amelyik felírható közönséges tört alakban (beleértve természetesen az egészeket is). A racionális számok tizedestört-alakja véges vagy végtelen szakaszos tizedestört (egy vagy több számjegy a végtelenségig ismétlődik): 3; 4,01; –0,123; –3,3333…; 5,125125125…

Módszertani megjegyzés: A racionális számok négyzete is racionális szám, tizedestört-alakja véges. A számológép használatával a gyerekeket rávezethetjük arra, hogy irracionális számok esetén a kerekített értékek négyzetei nem egyeznek meg azzal a számmal, amiből gyököt vonunk. Javasoljuk a diákkvartettet és a következő kérdéseket (amelyek a bemutatóban is megtalálhatók):

Emeld négyzetre 15-öt, és írd le a végeredményt! Most a kapott számból vonj négyzetgyököt!
Emeld négyzetre 1,5-öt, és írd le a végeredményt! Most a kapott számból vonj négyzetgyököt!
Mennyivel egyenlő 4,7524 négyzetgyöke? (*véges a megoldás, 2,18*).
Kerekítsük a kapott számot egy tizedejegyre, és ezt emeljük négyzetre! Ugyanazt a számot kapjuk? (*Általában természetes az, hogy másik számnak más a négyzete – a feladat azért fontos, mert a kerekítés során megváltozik a szám négyzete, és ez a gyökvonásra is igaz*).
Mivel egyenlő 15 négyzetgyöke? Hogyan lehet ellenőrizni, hogy jó-e az eredmény? Egyetértés alakult-e ki a csoportokon belül? (*Adjunk elég időt az eredmény megvitatására. Különböző megoldások születhetnek, 31 tizedesjegyre kerekítve:*
3,8729833462074168851792653997824.)
Kerekítsük a kapott számot egy, kettő, stb. tizedesjegyre! Emeljük négyzetre a kapott számokat és hasonlítsuk össze 15-tel!
Mitől függ az, hogy milyen pontosra kerekített számot használunk? (*Az adott feladattól függ, például egy atomfizikusnak a π értékét nem szabad 3,14-nek vennie, mert nem kap reális eredményt, de egy kőművesnek talán elegendő – ez később a tanulók anyagában olvasmányként megtalálható.*)

A legtöbb pozitív szám négyzetgyöke olyan szám, amelyet nem tudunk felírni közönséges törtszámként. Az ilyen számokat irracionális számoknak nevezzük. Irracionális például $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{1,1}$ stb. $\sqrt{4}$ nem irracionális szám, mert az értéke pontosan 2, ami természetes szám.

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyeket nem tudunk felírni két egész szám hányadosaként. Az irracionális számok halmazának jele: **Q***.

A racionális számok halmazát (**Q**) és az irracionális számok halmazát (**Q***) együtt a **valós számok halmazának** nevezzük. Jele: **R**.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

Az irracionális számok tizedestört-alakja végtelen, nem szakaszos tizedestört.

Érdekes, hogy bár a racionális számok halmaza végtelen halmaz, „minden” racionális számot ábrázolva mégsem töltik ki hézagmentesen a számegyenest. Bizonyítható azonban, hogy az irracionális számok halmazával együtt a valós számok halmaza már a számegyenest teljesen kitölti.

Az irracionális számokról

(Olvasmány; az itt szereplő témáknak utánanézhetsz az interneten!)

A négyzetgyökvonás eredményeként kapott irracionális számok legpontosabb értéke a $\sqrt{\ }$ jellel felírt szám, például $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ kerekített értéke lehet 1,4 is, de lehet 1,414213562 is. Hogy mikor milyen pontosságú kerekítést használunk, azt az adott feladat határozza meg. Egy kőműves fölöslegesen használná az 1,414213562 kerekített alakot, míg egy nagyon pici számokkal dolgozó atomfizikus számára biztos nem az 1,4 a megfelelő pontosság.

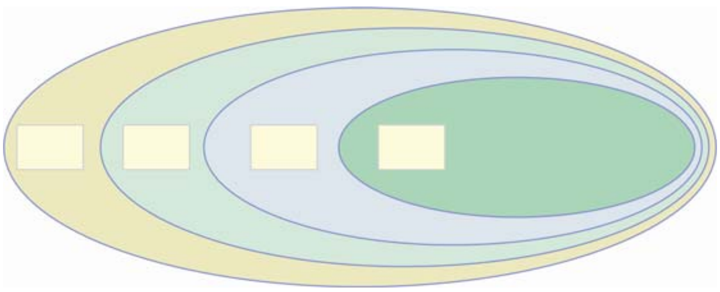
Az irracionális számok halmazában nemcsak a négyzetgyökvonás műveleteként kapott számok találhatók. Irracionális szám például a π, amelynek kerekített értékét 3,14-nek ismerjük. Pontosabb értékére sok esetben szükség lehet, és a számjegyeket nehéz megjegyezni. Ezért találták ki a pi-verseket, amelyekben a szavak betűinek száma adja a π következő számjegyét (a 0 számjegyet vagy egy gondolatjel, vagy egy 10 betűs szó szimbolizálja). Szász Pál matematikus alkotta 1952-ben a következő pi-verset:

Nem a régi s durva közelítés, 3,14159…
Mi szótól szóig így kijön
Betűiket számlálva.
Ludolph eredménye már,
Ha itt végezzük húsz jegyen.
De rendre kijő még tíz pontosan,
Azt is bízvást ígérhetem.

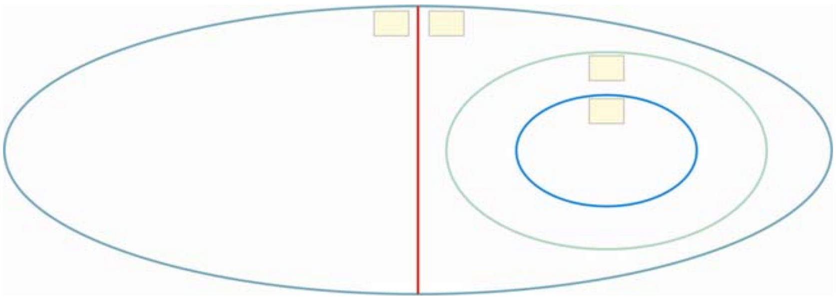
Ellenőrizd a számológépeddel, ameddig az kiírja az eredményt. A matematikusokat régóta foglalkoztatja az, hogy a π értékét minél pontosabban meghatározzák. Egy japán professzor, Yasumasa Kanada több mint egymilliárd számjegyet határozott már meg számítógépekkel. Természetesen a π nem 3,14, hanem a kör kerületének és átmérőjének hányadosa. Különböző korokban különböző számokkal közelítették π értékét, például Ptolemaiosz i.e. 150-ben a $\frac{377}{120}$ törttel számolt.

Feladatok

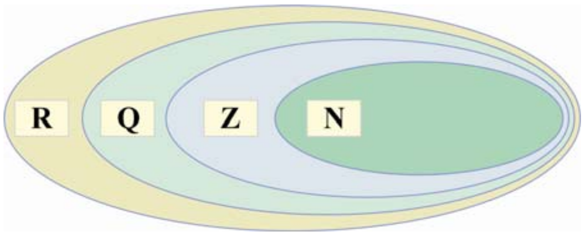
8. a) Írd a halmazábra megfelelő helyeire a számhalmazok betűjelét: **N**, **Z**, **Q**, **R** !

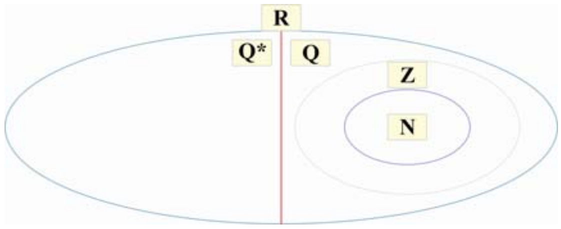


b) Írd a halmazábra megfelelő helyeire a számhalmazok betűjelét (**N**, **Z**, **Q**, **Q***, **R**) és a következő számokat: –3; 10; 4,5; 3,511…; $\sqrt{4}$; –0,121212…; 100; $\sqrt{20}$; –100; 0; $\frac{2}{3}$; $-3\frac{4}{7}$; –2,125; $-\sqrt{45}$.



Megoldás:





Módszertani megjegyzés: A következő feladathoz javasoljuk a szóforgó módszer alkalmazását: a kezdetben üres lapot minden tanuló egy újabb négyzetszámmal kapcsolatos sorral bővíti.

9. Folytasd a pozitív egészek négyzetének sorát egészen 20 négyzetéig a következő felírással:

$\sqrt{0}=0$, mert $0^2=0$; $\sqrt{1}=1$, mert $1^2=1$; $\sqrt{4}=2$, mert $2^2=4$ stb.

10. Döntsd el, majd számológéppel is vizsgáld meg pár példán, hogy igazak-e a következő állítások!

a) Nagyobb számnak a négyzetgyöke is nagyobb.

b) Az 1-nél nagyobb számokra igaz az, hogy a négyzetgyöke kisebb a számnál.

c) A 0 és 1 közé eső számokra igaz az, hogy a négyzetgyöke kisebb a számnál.

d) Egy törtszám négyzetgyöke mindig kisebb a számnál.

Megoldás: a) és b) igaz, c) és d) hamis.

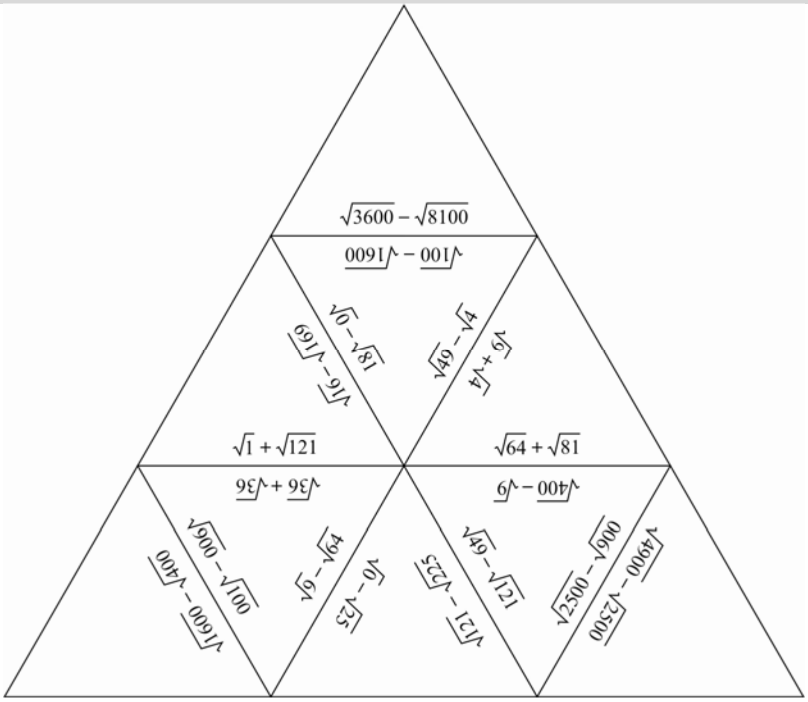
11. Számítsd ki a következő műveletek eredményét és válaszd ki a kakukktojást!

$\sqrt{100}+\sqrt{81}$; $\sqrt{121}-\sqrt{144}$; $2\cdot\sqrt{16}-\sqrt{25}$; $\sqrt{169}+\sqrt{49}$

Megoldás: 19; –1; 3; 20; a második a kakukktojás, mert az negatív.

2.3 triminó a négyzetgyökvonásról

Az azonos eredményű éleket illesztjük össze. Az értékelés a kirakás helyessége és sebessége szerint történik. Számológép alkalmazása nem javasolt.



A négyzetgyök közelítéséről (olvasmány)

A számok négyzetgyökének értékét többféleképpen is közelíthetjük (azért csak közelíthetjük, mert az irracionális számok pontos értékét nem tudjuk meghatározni). Közelítsük 10 négyzetgyökét! (A számológép szerint $\sqrt{10}\approx 3{,}16227766$).

Kétoldali közelítés módszere: alapját az adja, hogy a nagyobb számoknak a négyzetgyöke is nagyobb.

Először zárjuk be $\sqrt{10}$ -et egész számok közé: $3^2=9$, és $4^2=16$, ezért $3<\sqrt{10}<4$.

Ezután növeljük a pontosságot: $3{,}1^2=9{,}61$ és $3{,}2^2=10{,}24$, ezért $3{,}1<\sqrt{10}<3{,}2$.

Segít a közelítésben az, ha megbecsüljük, hogy a négyzetgyök értéke melyik számhoz esik közelebb (most inkább 3,2-höz, mint 3,1-hez).

A következő közelítés: $3{,}16^2=9{,}9856<\sqrt{10}<3{,}17^2=10{,}0489$, majd

$3{,}162<\sqrt{10}<3{,}163$ stb. A közelítést tetszőleges pontosságig végezhetjük, nyilván egy számítógép nagy segítséget jelenthet. A tizedesjegyek számát növelve kapjuk az egyre pontosabb értéket.

Módszertani megjegyzés:

Érdemes gyakorolni a tanulókkal a négyzetgyökvonás eredményének becslését: nagyságrendre, ha ezres nagyságrendnél nagyobb a szám, illetve melyik egészhez esik közel, ha 1000-nél kisebb a szám.

A becslés gyakorlását javasoljuk diákkvartett keretében igaz-hamis kérdésekkel, illetve konkrét számokkal. Számológép nem használható, de papíron lehet számolni.

Az igaz-hamis kérdések lehetnek például a következő, ***2.4. totó*** kérdései.

2.4. totó kérdései a négyzetgyökről és négyzetekről

1. 1000 négyzetgyöke pontosan 100.
2. 200 négyzetgyöke 15-nél nagyobb.
3. Ha egy szám 10 000 és 1 000 0000 közé esik, akkor a négyzetgyöke 100 és 1000 közötti szám.
4. A 200-nál nagyobb legelső négyzetszám 256.
5. 10 és 110 közé 7 négyzetszám esik.
6. Nagyobb számnak a négyzetgyöke is nagyobb.
7. Ha egy szám négyjegyű, a négyzetgyökét egészre kerekítve kétjegyű számot kapunk.
8. A 100 és 400 közötti számok négyzetgyöke 10 és 20 közé esik.
9. 401 és 500 közé két négyzetszám esik.
10. 15 és 12 négyzetének különbsége $(15-12)^2 = 3^2 = 9$.
11. A 900-nál nagyobb következő négyzetszám 31^2.
12. A 9000 m^2 területű négyzet alakú telek oldala 30 m-es.
13. 40 négyzete 1600, 50 négyzete 2500, a két szám számtani közepe 2050. Állítás: $\sqrt{2050} = 45$.

+1. Egy 121 m^2 területű, négyzet alakú terem oldala 11 m hosszú.

Megoldás: Igaz: 3, 5, 6, 8, 9, 11, +1; hamis: 1, 2, 4, 7, 10, 12, 13.

12. Két egybevágó kör területe együtt T. Mekkora a körök sugara külön-külön?

a) $T = 100\ cm^2$; b) $T = 4\ m^2$; c) $T = 14{,}1\ cm^2$.

Megoldás: $2r^2\pi = T$; a) $r \approx 4$cm; b) $r \approx 79{,}8$ cm; c) $r \approx 1{,}5$ cm.

13. A fizikában szabadesés közben megtett út (s) képlete a testek anyagától függetlenül $s=\frac{g}{2}t^2$, ahol $g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ állandó, t pedig az esés ideje (légellenálással most nem számolunk; a képletben s értékét méterben, az időt másodpercben használjuk).

a) Mennyi idő alatt zuhan le egy test 30 méter magasból (kb. ennyi egy 10 emeletes ház magassága)?

b) Fejezd ki az időt a megtett út függvényében!

Megoldás: a) kb. 2,5 másodperc; b) $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$.

14. Mekkora a térfogata annak a kockának, aminek a felszíne 140 m^2?

Megoldás: 112,7 m^3

Módszertani megjegyzés: A feladatok megoldásakor a gyerekek lehetőleg ne 3,14-gyel helyettesítsék π értékét, hanem használják a számológépekben található értéket.

15. Fejezd ki a henger sugarát, ha m a magassága, r a sugara, és a térfogata $V=r^2\cdot\pi\cdot m$!

Megoldás: $r=\sqrt{\frac{V}{m\cdot\pi}}$

16. Egy henger térfogata 3619,1 dm^3, magassága 80 cm. Mekkora az alapkör sugara?

$$V_{henger}=r^2\cdot\pi\cdot m$$

Megoldás: $r=\sqrt{\frac{V}{m\cdot\pi}}=\sqrt{\frac{3619{,}1}{8\cdot\pi}}$, $r\approx 12\text{ dm}$.

17. Egy henger térfogata 150 cm^3, magassága 3 cm. Mekkora a felszíne?

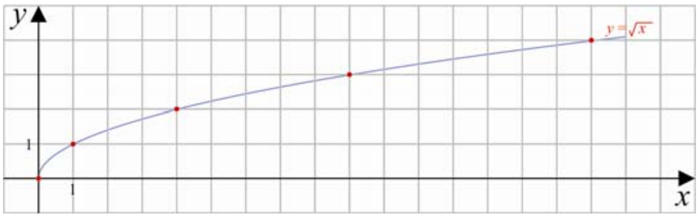
$$V_{henger}=r^2\cdot\pi\cdot m,\ A_{henger}=2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+m).$$

Megoldás: $r=\sqrt{\frac{V}{m\cdot\pi}}\approx 4$ (cm), a felszín: $A=2\cdot 4\pi(4+3)\approx 176$ (cm^2).

A négyzetgyök-függvény

Módszertani megjegyzés: A tanulók készítsenek értéktáblázatot a négyzetgyökvonásról csoportmunkában megosztva, 0-tól 17-ig egyesével. Utána ábrázolják koordináta-rendszerben a kapott (x; y) számpárokat! x legyen maga a szám, y pedig a négyzetgyöke, egy tizedesjegyre kerekítve.

A grafikon ábrázolásához valószínűleg szükségük lesz segítségre. Javasoljuk, hogy ezt ne frontálisan adjuk, hanem a csoportok válasszanak egy-egy főt, akiket összegyűjtve megmutatjuk az ábrázolást egy külön asztalnál. Ezek a tanulók a többieknek elmondják, hogyan kell ábrázolni a pontokat, majd összekötve azokat, kirajzolódik a négyzetgyök-függvény.

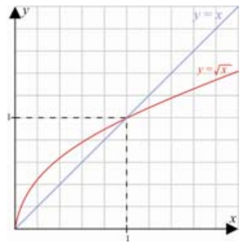


A fent ábrázolt függvényt négyzetgyök függvénynek nevezzük. Minden nemnegatív számhoz hozzárendeli a négyzetgyökét: $x \mapsto \sqrt{x}$, vagy $f(x)=\sqrt{x}$.

Jegyezd meg a függvénynek azokat a pontjait, amelyeket könnyen tudsz ábrázolni!

Az $x=0$ helyen a függvény értéke $y=0$, mert a függvény képletébe x helyére behelyettesítve kapjuk: $y=\sqrt{0}=0$, vagyis egyik pontja a (0; 0) pont. Hasonlóan kaphatók még pontok, amelyek megfelelnek az $\left(x;\sqrt{x}\right)$ alaknak: (1; 1), (4; 2), (9; 3) stb.

Érdekesség a függvénnyel kapcsolatban. Ha milliméterpapíron ábrázolod a függvényt 0 és 2 között, jól látszik a következő: 0 és 1 közötti számok négyzetgyöke a számnál nagyobb, míg 1-nél nagyobb számok esetében kisebb.



Módszertani megjegyzés: A következő feladat feldolgozásához a diákkvartett módszert javasoljuk.

Feladat

18. Válaszolj a következő kérdésekre:

a) Mi az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény értelmezési tartománya (milyen számokat írhatunk x helyére, ill. a függvény az x tengelyre levetítve a tengely mely részét foglalja el)?

b) Mi az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény értékkészlete (milyen számokat kapunk eredménynek, ill. a függvény az y tengelyre levetítve a tengely mely részét foglalja el)?

c) Mi a függvény minimumhelye (az alsó csúcspont x koordinátája)?

d) Mi a függvény legkisebb értéke (az alsó csúcspont y koordinátája)?

e) Mit mondhatunk a függvény monotonitásáról (emelkedés-csökkenés)?

Állítások megfordítása

Érvényes a Pitagorasz-tétel megfordítása is. A tétel szövegéből meghatározható, hogy mi a következmény és mi a feltétel!

a háromszög derékszögű (*a* és *b* befogók, *c* átfogó) $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = c^2$

Ha megfordítjuk a következményt és a feltételt, új állítást kapunk, amit a Pitagorasz-tétel megfordításának nevezünk:

egy háromszög *a*, *b* és *c* oldalaira igaz: $a^2 + b^2 = c^2$ $\Rightarrow$ a háromszög derékszögű

Megfogalmazásai:

- Ha egy háromszög *a*, *b* és *c* oldalaira igaz, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, akkor a háromszög derékszögű.
- Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.
- Annak, hogy egy háromszög derékszögű legyen szükséges és elégséges feltétele, hogy két oldalának négyzetösszege egyenlő legyen a harmadik oldal négyzetével.

Az ilyen állításokat megfordítható tételeknek nevezzük. Tanulmányaink során már találkoztunk ilyen jellegű tételekkel, ilyen például a Thalész-tétel.

Megjegyzés: Az állítások halmazokra is átfogalmazhatók. Például a derékszögű háromszögek halmaza és az $a^2 + b^2 = c^2$ tulajdonsággal rendelkező háromszögek halmaza azonos. Egy állítás akkor megfordítható, ha a két halmaz elemei ugyanazok (vagyis a két halmaz egyenlő, mint a Pitagorasz-tétel esetében).
A megfordítható állításokban „akkor és csak akkor” kapcsolatot is használunk: egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a két rövidebb oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével. A két tagmondat állításai ekvivalensek (egyenértékűek).

Feladatok

19. Fogalmazd meg a következő (nem biztos, hogy igaz) állítások megfordítását, és döntsd el, hogy az állítás megfordítása igaz-e vagy sem?

a) Ha esik az eső, akkor nedves az úttest.

b) Ha egy szám osztható 6-tal, akkor 2-vel is osztható.

c) Ha egy négyszög deltoid, akkor az átlói merőlegesek egymásra.

d) Ha egy háromszögben két szög összege egyenlő a harmadik szöggel, akkor az a háromszög derékszögű.

e) Ha süt a nap, akkor világos van.

f) Ha egy négyszög trapéz, akkor paralelogramma is.

g) Ha egy szám nullára végződik, akkor osztható 5-tel.

h) Ha egy háromszögben a köré írható kör középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor az a háromszög derékszögű.

Megoldás: Megfordíthatók: d), h).

20. Keress megfordítható állításokat a hétköznapi életből!

III. Pitagorasz-tétellel kapcsolatos feladatok

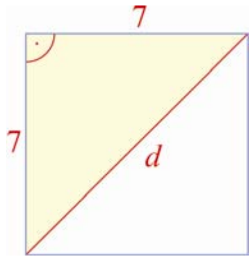
Módszertani megjegyzés: A feladatokhoz javasoljuk a kooperatív módszerek használatát olyan feladatok esetében is, amelyek nem kifejezetten csoportmunkára készültek.

Mintapélda₂

a) Szerkesszetek a füzetbe egy 7 cm oldalhosszú négyzetet! Becsüljétek meg, hogy mekkora a négyzet átlója! Mérjétek meg vonalzóval, majd számítsátok ki az átló hosszát!

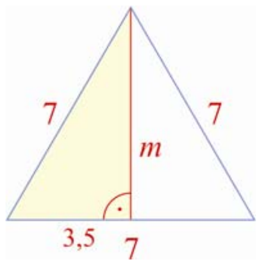
b) Szerkesszetek a füzetbe egy 7 cm oldalhosszú szabályos háromszöget! Becsüljétek meg, hogy mekkora a magassága és a területe! Mérjétek meg vonalzóval a magasságot, majd számítsátok is ki a hosszát! A kiszámított értékkel határozzátok meg a háromszög területét!

Megoldás:



a) Az ábrán található egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója a négyzet átlója. A Pitagorasz-tételt felírva $7^2 + 7^2 = d^2$, vagyis $98 = d^2$. Innen az átló:

$$d = \sqrt{98} \approx 9{,}9\,(\text{cm}).$$



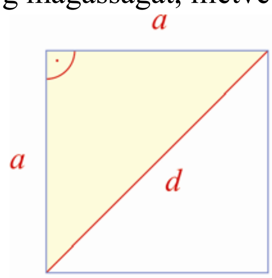
b) A szabályos háromszög magasságát berajzolva keletkezik a jelölt derékszögű háromszög, erre felírva a Pitagorasz-tételt:

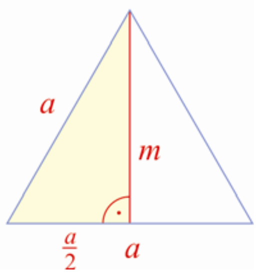
$$m^2 + 3{,}5^2 = 7^2 \;\Rightarrow\; m^2 = 36{,}75 \;\Rightarrow\; m \approx 6{,}1\,\text{cm}$$

A szabályos háromszög területe: $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2} \approx \dfrac{7 \cdot 6{,}1}{2} \approx 21{,}4\,(\text{cm}^2)$.

Módszertani megjegyzés: A képlet levezetése a jobb képességű diákoknak ajánlott.

A feladatok általánosan, a oldalú síkidomok esetén is megoldhatók. Ekkor olyan képleteket kapunk, amelybe a helyére behelyettesítve az oldalhosszakat, megkapjuk az átlót, a szabályos háromszög magasságát, illetve területét.





Az a oldalú négyzet esetén az egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója a négyzet átlója. A Pitagorasz-tételt felírva $a^2 + a^2 = d^2$, vagyis $2a^2 = d^2$. Innen az átló: $d = a \cdot \sqrt{2}$.

Az a oldalú szabályos háromszög magasságát berajzolva keletkezik a jelölt derékszögű háromszög, erre felírva a Pitagorasz-tételt:

$m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow m^2+\frac{a^2}{4}=a^2 \Rightarrow m^2=\frac{3a^2}{4}$, ahonnan a szabályos háromszög magassága: $m=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A szabályos háromszög területe: $T=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{a\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$.

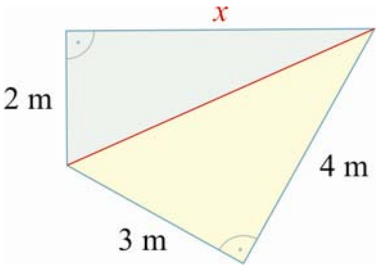
- az a oldalú négyzet átlója $a\cdot\sqrt{2}$,
- az a oldalú szabályos háromszög magassága $a\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- az a oldalú szabályos háromszög területe $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Mintapélda₃

Ennek a fura alakú színpadnak csak 3 oldalát lehetett lemérni. Azt is megmértük, hogy a színpad oldalai között két helyen derékszög található. Mekkora a harmadik oldal?

Megoldás:

Jelölje x az ismeretlen oldalt (méterben).



Az átló behúzásával két derékszögű háromszögre bontjuk a négyszöget. A két háromszögnek egy oldala, az átfogója közös. Az átfogó kiszámításához alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $d^2=3^2+4^2=25$, ahonnan $d=5$ (m).

A másik derékszögű háromszögben is felírjuk a Pitagorasz-tételt, hogy az x-szel jelölt oldalt kiszámítsuk: $5^2=2^2+x^2$, azaz $21=x^2$.

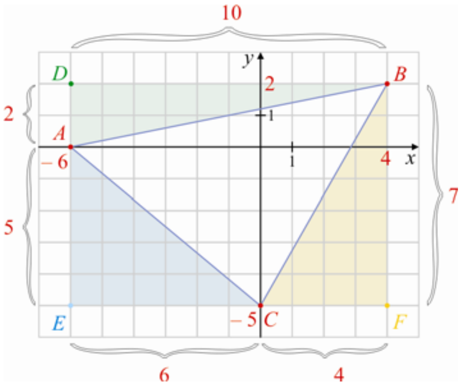
Az ismeretlen oldal tehát $x=\sqrt{21}\approx 4{,}58\,\text{m}$.

Mintapélda₄

Mekkora annak a háromszögnek a kerülete és területe, amelynek csúcsai $A(-6;\ 0)$, $B(4;\ 2)$ és $C(0;\ -5)$?

Megoldás:

Kihasználjuk a derékszögű négyzetrács adta lehetőségeket. Rajzoljuk meg az ábrán látható derékszögű háromszögeket, amelyek átfogói adják az ABC háromszög oldalait.



Az ABD derékszögű háromszögben

$AB = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} \approx 10{,}2$ egység. Hasonlóan a másik két oldal hossza 8,1 és 7,8 egység, a kerület az oldalak összege: 26,1 egység.

A területet úgy számítjuk ki, hogy a bennfoglaló 10x7-es téglalap területéből kivonjuk a derékszögű háromszögek $T_{derékszögű\ háromszög} = \frac{a \cdot b}{2}$ képlettel számítható területét:

$$T_{háromszög} = 10 \cdot 7 - \left(\frac{2 \cdot 10}{2} + \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2} \right) = 31 \text{ területegység.}$$

Feladatok

21. Számítsd ki a négyzet átlóját, ha oldala

a) 4 cm; b) 2,8 cm; c) 22,3 m; d) 10,1 dm.

Megoldás: a) $4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}66\,\text{cm}$; b) 3,96 cm; c) 31,54 m; d) 14,28 dm.

22. Számítsd ki a négyzet oldalát, ha átlója

a) 14 cm; b) 1,1 cm; c) 11,2 m; d) 8,5 dm.

Megoldás: a) $\frac{14}{\sqrt{2}} \approx 9{,}9\,\text{cm}$; b) 0,78 cm; c) 7,92 m; d) 6,0 dm.

23. Határozd meg a szabályos háromszög magasságának hosszát, ha oldala

a) 10 cm; b) 15 cm; c) 5,6 cm!

Készíts rajzot minden esetben!

Megoldás: a) 8,7 cm; b) 13 cm; c) 4,8 cm.

24. Számítsd ki a szabályos háromszög magasságát és területét, ha oldala

a) 35 cm; b) 11,8 cm; c) 2,3 m; d) 14,8 dm.

Megoldás: a) $m = a\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm} \approx 30{,}3\,\text{cm}$ és $T = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 530{,}4\,\text{cm}^2$; b) 10,2 cm és 60,3 cm^2;

c) 2,0 m és 2,3 m^2; d) 12,8 dm és 94,8 dm^2.

25. Számítsd ki a szabályos háromszög oldalát, ha

a) magassága 23 cm; b) magassága 25,5 dm;

c) területe 15,8 cm^2; d) területe 23 mm^2 ?

Megoldás: a) $a = \frac{2m}{\sqrt{3}}\text{cm} \approx 26{,}6\,\text{cm}$; b) 29,4 dm; c) $a = \sqrt{\frac{4T}{\sqrt{3}}}\text{cm} \approx 6{,}04\,\text{cm}$; d) 7,3 mm.

26. Mekkora a szabályos hatszög területe, ha 8,5 cm sugarú kör írható a hatszög köré?

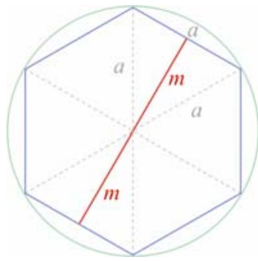
Megoldás: $T = 6 \cdot r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2 \approx 187{,}7\,\text{cm}^2$.

27. Mekkora a szabályos hatszög oldala, ha területe 125,9 cm^2?

Megoldás: 6,96 cm.

28. Egy szabályos hatszög szemközti oldalfelező pontjait összekötő szakasz hossza 12 cm. Mekkora a hatszög oldala, területe, és mekkora átmérőjű kör írható a hatszög köré?

Megoldás: $m = 6\,\text{cm}$, és $m = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2m}{\sqrt{3}}$; $a \approx 6{,}93\,\text{cm}$ az oldalhossz. A terület $T = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $T \approx 124{,}8\,\text{m}^2$, a köré írható kör átmérője: $2a \approx 13{,}9\,\text{cm}$.



29. A főútvonaljelző tábla négyzet alakú, átlójának fele 28,3 cm.

a) Mekkora a tábla oldala?

b) Mennyi anyag kell 24 darab tábla elkészítéséhez, ha 10% anyagveszteséggel számolunk?

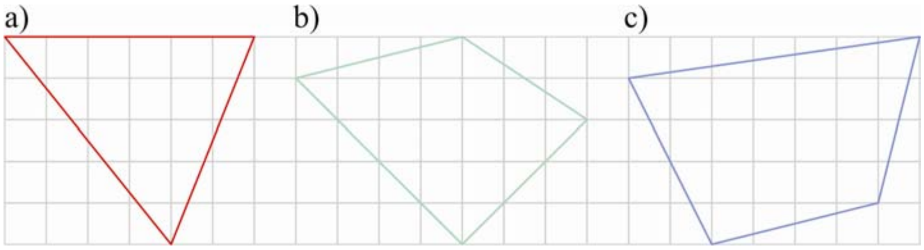
Megoldás: a) 40 cm; b) $24 \cdot 0{,}4^2 \cdot 1{,}1\,\text{m}^2 \approx 4{,}3\,\text{m}^2$.

30. Milyen messze vannak a következő pontok a koordináta-rendszerben az origótól?

A(3; 4); B(5; 12); C(–10; –10); D(–5; 8); E(–3; –6).

Megoldás: A koordináta-rendszerben ábrázoljuk a pontokat, és a négyzetrács segítségével derékszögű háromszöget keresünk, amiben a Pitagorasz-tételt felírva adódik a távolság. Eredmények: A: 5; B: 13; C: 14,1; D: 9,4; E: 6,7.

31. Határozd meg az ábrán levő sokszögek területét és kerületét!



Megoldás: a) 15 te. és 17,8 e; b) 17,5 te. és 17,6 e; c) 22,5 te. és 19,8 e.

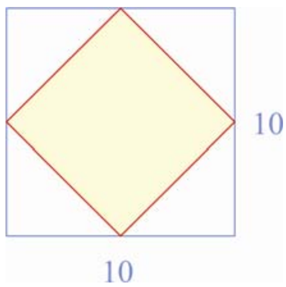
32. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 10,5 cm. Mekkora a befogója?

Megoldás: $\frac{10,5}{\sqrt{2}} \approx 7{,}42$ cm.

33. Mekkora a szabályos háromszög magassága és területe, ha oldala 4 dm?

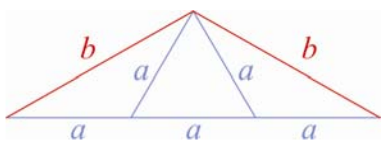
Megoldás: $m = 4\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}5$ dm; $T = 4^2\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 6{,}9$ dm^2.

34. Mekkora a sárga négyzet kerülete és területe, ha a nagy négyzet oldalhossza 10 egység, és a sárga négyzet csúcsai az oldalainak a felezőpontjai?



Megoldás: 28,3 egység és 50 e^2.

35. A következő tetőszerkezet a-val jelölt gerendáinak hossza 3,4 m. Mekkorák a b-vel jelölt gerendák?



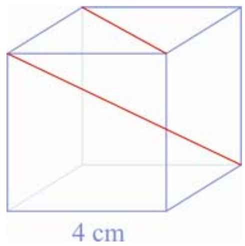
Megoldás: A Pitagorasz-tételt felírjuk arra a derékszögű háromszögre, amelynek átfogója b, egyik befogója pedig a középen levő szabályos háromszög magassága (m):

$b^2=\left(\frac{3}{2}a\right)^2+m^2$. A szabályos háromszög magassága: $m=a\frac{\sqrt{3}}{2}$, így $b^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2=3a^2$, ahonnan $b=a\sqrt{3}$; $b\approx 5{,}9$ m.

36. Egy téglalap alakú gipszkartont az átlójánál kell szétvágni. Mekkora a vágás hossza, ha a gipszkarton méretei 1250x2000 mm?

Megoldás: $\sqrt{1250^2+2000^2}\approx 2358$ mm.

37. a) Számítsd ki az ábrán látható kocka lapátlóit (az oldallapok négyzeteinek átlóit)!



b) Keress olyan derékszögű háromszöget, amelynek segítségével meghatározható a testátló (az a szakasz, amely összeköt két, nem ugyanazon a lapon levő csúcsot), és határozd meg a hosszát!

c) Fejezd ki a testátló hosszát a négyzet oldalával!

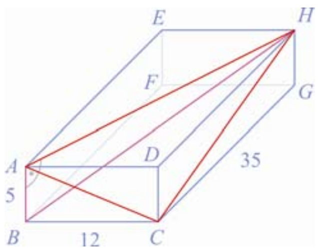
Megoldás: a) $4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ cm; b) Lapátló – testátló – oldal által alkotott derékszögű háromszögből a testátló hossza 6,93 cm; c) $d=a\sqrt{3}$.

38. Egy téglatest élei 5 cm, 12 cm és 35 cm.

a) Készíts ábrát, és számítsd ki a lapátlók hosszát!

b) Mekkora annak a szakasznak a hossza, amely a téglatest két legtávolabbi csúcsát köti össze (több ilyen szakasz is van, de a hosszuk egyenlő)?

Megoldás:



a) Az ABC derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt: $AC^2=5^2+12^2$, ahonnan a lapátló 13 cm. Hasonlóan a másik két lapátló 37 cm és 35,4 cm.

b) Az ABH derékszögű háromszög átfogóját keressük, az a testátló. Hossza: $BH^2=AB^2+AH^2$, vagyis $BH^2=5^2+12^2+35^2$, így $BH\approx 37{,}3$ cm.

39. Fejezd ki a téglatest testátlóját az a, b és c oldalakkal!

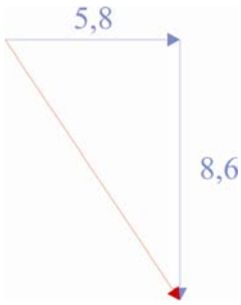
Megoldás: Az előző feladat ábrájához hasonló ábra alapján: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

40. Egy szigetről egy hajó kelet felé indul, és megtesz 5,8 km-t. Ezután dél felé fordul, és további 8,6 km-t halad.

a) Milyen távolságra van ekkor a hajó a szigettől? A megoldáshoz készíts ábrát!

b) Mekkora ez a távolság légvonalban a térképen lemérve, ha a térkép méretaránya 1 : 150 000 ?

Megoldás:



a) $\sqrt{5{,}8^2+8{,}6^2}\approx 10{,}37$ km;

b) A térképen $\dfrac{1037000\,\text{cm}}{150000}=6{,}9\,\text{cm}.$

41. Egy túra során egy pihenőhelytől észak felé haladunk 4,5 km-t, nyugat felé további 3,2 km-t.

a) Milyen távolságra vagyunk ekkor a pihenőhelytől?

b) Mekkora ez a távolság légvonalban a térképen lemérve, ha a térkép méretaránya 1 : 60 000 ?

Megoldás: a) $\sqrt{3{,}2^2+4{,}5^2}\approx 5{,}52\,(\text{km})$; b) A térképen $\dfrac{552000\,\text{cm}}{60000}=9{,}2\,\text{cm}.$

42. Egy kétágú létra ágainak hossza 2,5 méter. Milyen magasan lesz a teteje a talajtól, ha a két ágát egymástól 1,4 méterre tudjuk kinyitni?

Megoldás: 2,4 m.

43. Egy 8 m magas oszlopot 8,7 m hosszú tartókötelekkel akarnak rögzíteni. Az oszlop tövétől milyen távolságra rögzítsék a földhöz a köteleket (lásd ábra)?

Megoldás: 3,42 m.

44. Egy ház homlokzatának szélessége 14 méter, a tetőgerendák hossza 7,4 m. Mekkora területű a homlokzat, ha alakja egyenlőszárú háromszög?

Megoldás: A magasság Pitagorasz-tétellel számítható, 2,4 m. A terület 16,8 m^2.

45. Egy téglalap átlójának a fele 72 mm, egyik oldala 1,2 dm. Mekkora a másik oldal?

Megoldás: kb. 8 cm.

46. Mekkora a monitor képernyőjének két oldala, ha az átlója 17 coll, és a képernyő oldalainak aránya 3:4? (1 coll = 1 inch = 1 hüvelyk = 2,54 cm).

Megoldás: 10,2 hüvelyk = 26 cm és 13,6 hüvelyk = 34,6 cm.

47. A képernyő egyik oldala 38 cm, képátlója 77 cm. Határozd meg a másik oldalt és válaszd ki a megfelelő képarányt! A. 4 : 3; B. 16 : 9; C. 14 : 7.

Megoldás: 67 cm, B.

48. Egy négyzet alakú terítőre átlós irányban díszcsíkot varrunk. Milyen hosszú szalagra van szükség, ha a varrás miatt 5 cm-t hozzá kell adni, és a terítő oldala

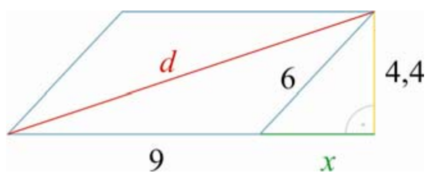
a) 52 cm; b) 30 cm; c) 120 cm.

Megoldás: a) 78,5 cm; b) 47,4 cm; c) 174,7 cm.

Mintapélda$_5$

Mekkora annak a paralelogrammának az átlója, amelynek oldalai 9 cm és 6 cm, magassága pedig 4,4 cm?

Megoldás:



Az ábra megrajzolása után látható, hogy az átló (d) egy olyan derékszögű háromszögben található, amelyiknek oldalai 4,4 és $9+x$.

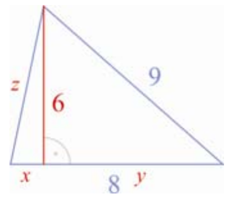
x meghatározásához a 6 cm átfogójú derékszögű háromszögre felírjuk Pitagorasz tételét:

$4{,}4^2 + x^2 = 6^2$, ahonnan $x^2 = 6^2 - 4{,}4^2$, vagyis $x^2 = 16{,}64$, $x = \sqrt{16{,}64} \approx 4{,}1$.

Újra alkalmazva a Pitagorasz-tételt: $d^2 = 13{,}1^2 + 4{,}4^2$, azaz $d^2 = 190{,}97$. Gyökvonás után: $d \approx 13{,}8\,\text{cm}$.

Feladatok

49. Mekkora a háromszög harmadik (c) oldala, ha a = 8 cm, b = 9 cm, m_a= 6cm. Szerkeszd meg a háromszöget!



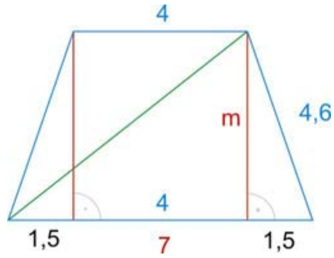
Megoldás: A Pitagorasz-tételt kétszer írjuk fel a megoldás során:

$y = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7\ \text{cm}$; $\qquad x = 8 - y \approx 1{,}3\ \text{cm}$;

$z = \sqrt{x^2 + 6^2} \approx 6{,}1\ \text{cm}$.

50. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 4 cm és 7 cm, szárai 4,6 cm hosszúak. Mekkora a trapéz területe és átlója?

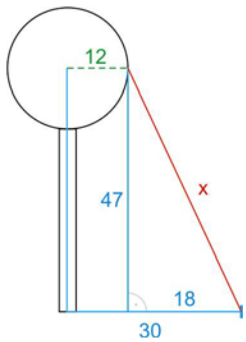
Megoldás:



A Pitagorasz-tételt alkalmazva $m = 4{,}35\ \text{cm}$, így a terület 23,9 cm^2. Átlója $\sqrt{5{,}5^2 + 4{,}35^2} = 7{,}01\ \text{cm}$.

51. A város szélén egy oszlopon víztároló gömböt állítanak fel (hidroglóbusz), amit a gömb „egyenlítőjéhez” rögzített drótkötelekkel is megerősítenek. Mekkora egy drótkötél hossza, ha a gömb középpontja 47 méterre van a földtől, a gömb átmérője 24 méter, és a földön a tartóoszlop középpontjától 30 méterre rögzítik?

Megoldás:

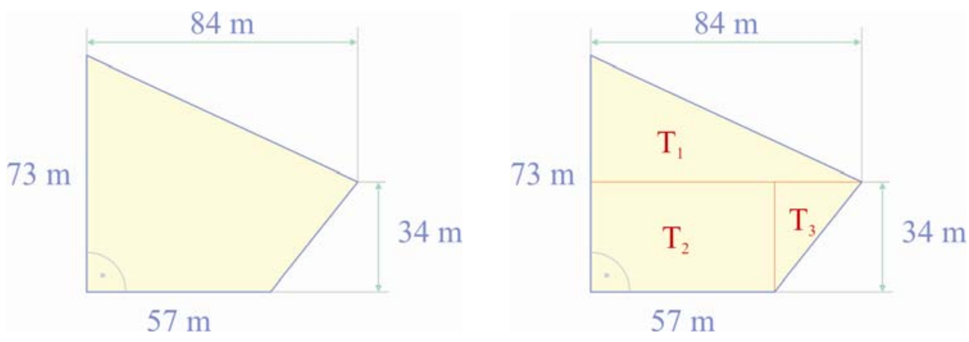


A vázlatról leolvasható, hogy a Pitagorasz-tételt kell alkalmazni. Az eredmény: $x = \sqrt{18^2 + 47^2} = 50{,}33$ m.

52. Egy 4 cm sugarú körhöz a középpontjától 10 cm távolságról érintőt húzunk. Mekkora az érintő egyenesén a ponttól a körig tartó érintőszakasz hossza?

Megoldás: $\sqrt{84} \approx 9{,}2\ \text{cm}$

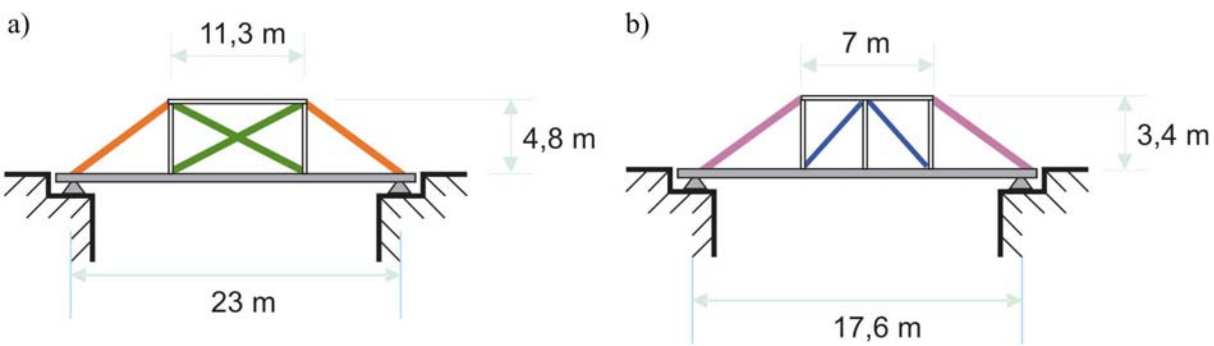
53. Számítsd ki ennek a szabálytalan alakú teleknek a területét!



Megoldás: $T_1 = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot (73-34) = 1638\ (\mathrm{m}^2)$; $T_2 = 57 \cdot 34 = 1938\ (\mathrm{m}^2)$;

$T_3 = \frac{1}{2} \cdot (84-57) \cdot 34 = 459\ (\mathrm{m}^2)$; $T = T_1 + T_2 + T_3 = 4035\ \mathrm{m}^2$.

54. Mekkora keresztgerendákat kell gyártani a hidakhoz? (A keresztgerendákat az ábrán narancs, zöld, lila és kék színnel jelöltük.)



Megoldás: a) 7,57 m, 12,28m; b) 6,30 m; 4,88 m.

55. Egy rombusz alakú papírsárkányt szeretnénk készíteni. Az átlós irányú merevítők hossza 1,7 m és 2,8 m.

a) Mekkora a rombusz oldala?

b) Mekkora felületű anyag szükséges a papírsárkány elkészítéséhez?

Megoldás: a) kb. 1,64 m; b) 2,38 m^2.

56. Egy téglalap egyik oldala háromszor akkora, mint a másik. Mekkorák az oldalai, ha a területe 147 cm^2?

Megoldás: $x \cdot 3x = 147 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad x = 7\,\mathrm{cm}$.

57. Számold ki a téglalapok oldalait és kerületét, ha tudod, hogy

a) egyik oldala kétszer akkora, mint a másik, és területe 32 cm^2;

b) egyik oldala $\frac{2}{3}$ része a másik oldalhossznak, és területe 2400 mm^2;

c) egyik oldala 38%-kal hosszabb, mint a másik oldala, és területe 34,5 m^2!

Megoldás: Egyenletek felállításával történik. Az eredmények: a) 4 cm, 8 cm, 24 cm;

b) 40 mm, 60 mm, 200 mm; c) 5 m, 6,9 m, 23,8 m.

58. Egy trapéz hosszabbik alapja 20 cm, szárai 8 cm és 6 cm, magassága 5 cm.

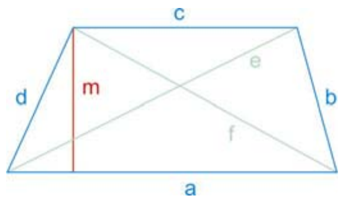
a) Mekkora a trapéz rövidebbik alapja és területe?

b) Mekkora a két átló hossza?

Megoldás: a) 10,4 cm, 76,1 cm^2; b) 17,4 cm és 14,6 cm.

59. Töltsd ki a táblázatot (minden távolság cm-ben értendő)!

	a)	b)	c)
a	20	27	35
b	8		18
c		10	16
d	6	13	
m	5	11	9
e			
f			
T			

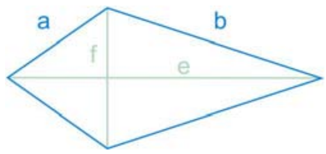


Megoldás:

a	20	27	35
b	8	*14, 9*	18
c	*10,4*	10	16
d	6	13	*9,6*
m	5	11	9
e	*17,4*	*20,2*	*21,4*
f	*14,6*	*22,9*	*32,9*
T	*76,1*	*203,5*	*229,5*

60. Töltsd ki a táblázatot! (e és f a deltoid két átlója)

	a)	b)	c)
e		8 egység	52 m
f	10 cm		
a	12 cm	5 egység	25 m
b	23 cm		
T		20 egység^2	624 m^2

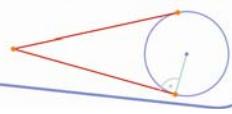


Megoldás:

	a)	b)	c)
e	*33,36 cm*	8 egység	52 m
f	10 cm	*5 egység*	*24 m*
a	12 cm	*5 egység*	25 m
b	23 cm	*4,44 egység*	*32,31 m*
T	*166,8 cm^2*	20 egység^2	624 m^2

Emlékeztető: a kör érintője

- A kör érintői merőlegesek az érintési pontba húzott sugárra.
- A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.



61. Egy 6 cm sugarú körnek meghúztuk a 10 cm-es húrját. Mekkora a húr és a kör középpontjának a távolsága?

Megoldás: $x = \sqrt{6^2 - 5^2} \approx 3{,}3\,\text{cm}$.

62. Egy 12,4 cm hosszúságú húr a kör középpontjától 4,5 cm távolságra található. Mekkora a kör átmérője?

Megoldás: $r = \sqrt{4{,}5^2 + 6{,}2^2} \approx 7{,}7$ cm, az átmérő hossza 15,4 cm.

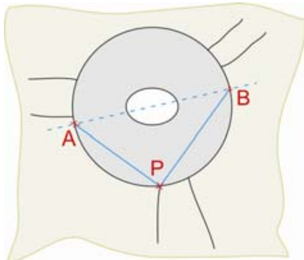
63. Egy 6 cm sugarú kör egyik húrja 8 cm-es. Mekkora a középpontból a húrra bocsátott merőleges szakasz hossza (vagyis a húr és a középpont távolsága)?

Megoldás: $\sqrt{20} \approx 4{,}5\,\text{cm}$.

64. Egy 7 cm átmérőjű narancsból levágtunk egy darabot, aminek a helyén egy 5,5 cm átmérőjű kör keletkezett. Milyen magasan lesz a talajtól a narancs „teteje”, ha erre a körre állítjuk?

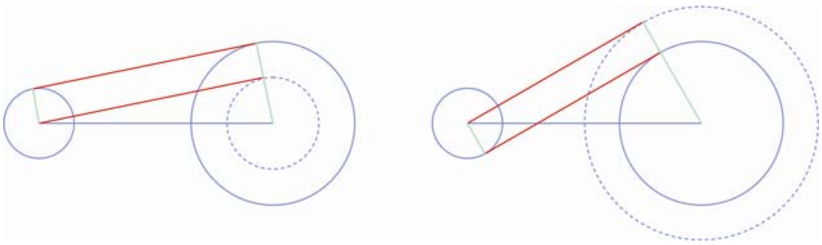

Megoldás: $\sqrt{3{,}5^2 - 2{,}25^2} \approx 2{,}68$ (cm) a síkmetszet és a gömb középpontjának távolsága, ehhez a sugarat hozzáadva 6,18 cm a keresett távolság.

65. Karcsi egy kör alakú tér *AB* átmérőjét akarja meghatározni, de a tér közepén egy szökőkút áll. Készített egy tervet, amely a segítségére lesz, és méréseket végzett: az *AP* távolságot 34 lépésnek, a *PB* távolságot 44 lépésnek mérte. Mekkora a tér átmérője, ha Karcsi átlagos lépését 0,8 méteresnek vesszük?



Megoldás: 55,6 lépés, vagyis kb. 44,5 m. (Alkalmazhatjuk a Thalész-tételt!)

66. Szíjáttétel modelljéből két kör közös érintőit akarjuk kiszámítani. A körök sugara 3 cm és 7 cm, a középpontjaik távolsága 20 cm. Mekkora a közös külső és belső érintők hossza? Az ábra segít a megoldásban.

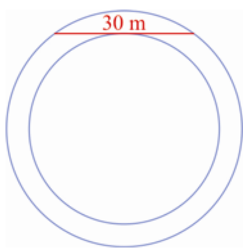


Megoldás: A feladat megoldásához alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt. A külső érintők esetén

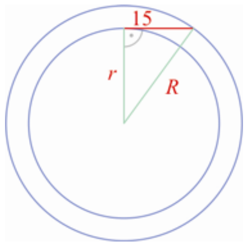
$x^2 + (7-3)^2 = 20^2$, ahonnan $x = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{384} \approx 19{,}6$ cm. A belső érintőkre

$x^2 + (7+3)^2 = 20^2$, ahonnan $x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}3$ cm.

67. A planetárium körfolyosóját le kell burkolni. A burkoló az ábrán látható távolságot mérte le. Miért elegendő ez az adat a burkolat



anyagmennyiségének meghatározásához? Mennyibe kerül a burkolás, ha anyaggal együtt 2600 Ft-ot kérnek 1 m^2 burkolásáért?



Megoldás: A Pitagorasz tételt alkalmazva $R^2 = r^2 + 15^2$, amiből $R^2 - r^2 = 225$. A körgyűrű területe ennek π-szerese, ami 706,5 m^2. Az ár 1 836 900 Ft.

IV. Vektorok

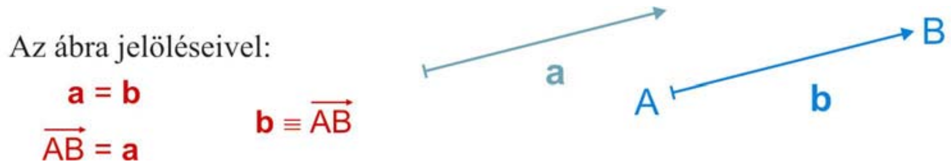
Módszertani megjegyzés: A vektorok a Pitagorasz-tétel alkalmazásaként kerültek bele ebbe a modulba.

Ismétlés

Az irányított szakaszt **vektornak** nevezzük**. A** fizikában több vektormennyiséget megismertünk: elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő stb.

A vektorok kezdőpontjukkal és végpontjukkal kijelölnek egy irányt és egy távolságot. A távolságot a vektor hosszának vagy **abszolútértékének** nevezzük, és mindig valamilyen hosszúságegységhez viszonyítjuk.

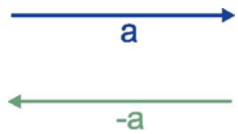
A vektorok *egyenlősége* és *azonossága* különböző fogalmak. Két vektor **azonos**, ha kezdőpontjaik és végpontjaik páronként megegyeznek, jelölés: **a** ≡ **b**. Egy adott vektorral azonos vektor a síkon vagy a térben ugyanott helyezkedik el. Ezzel szemben egy adott vektorral egyenlő vektort a sík vagy tér bármely pontjából felmérhetünk, így egy adott vektorral egyenlő vektorból végtelen sok van. Két vektor **egyenlő**, ha hosszuk és irányuk megegyezik (vagyis egyeneseik párhuzamosak és irányításuk azonos).



Egységvektor (**e**): egységnyi hosszúságú vektor: | **e** | = 1.

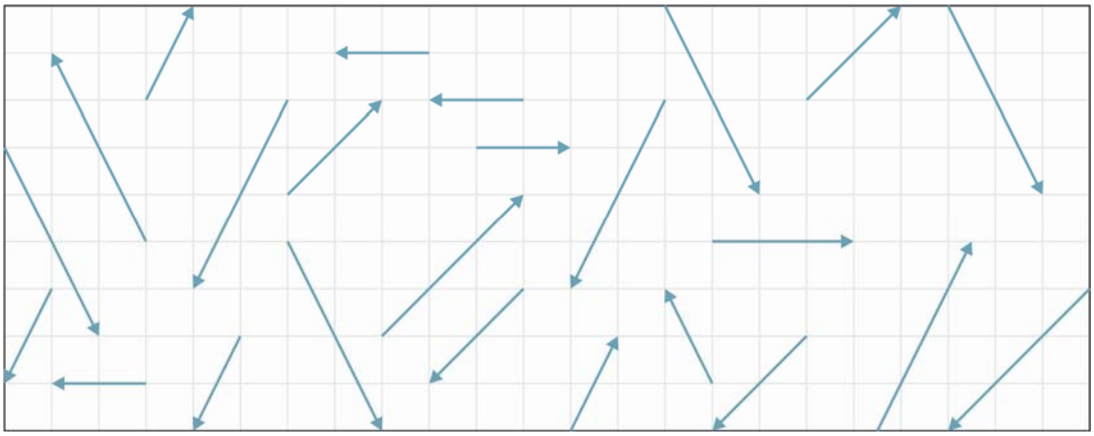
Nullvektor (**0**): 0 hosszúságú vektor. Definíciója: olyan vektor, amelynek megegyezik a kezdőpontja és a végpontja. Irányát tetszőlegesnek tekintjük.

Az **a** vektor **ellentettjének** nevezzük azt a vektort, amelyik vele egyenlő abszolútértékű, egyező állású, de vele ellentétes irányú. Jelölése: – **a** .

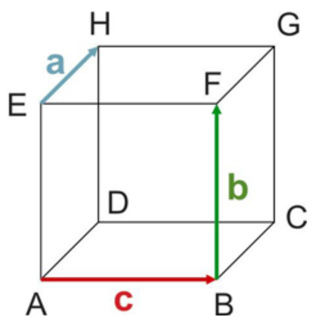


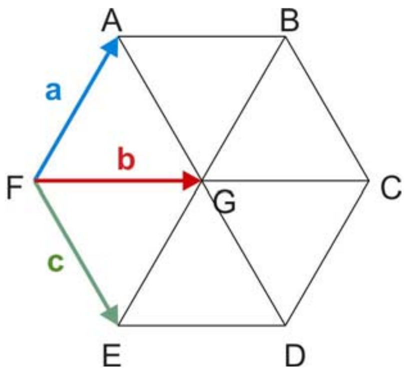
Feladatok

68. Keress egyenlő, egyenlő abszolútértékű, illetve ellentett vektorokat az ábrán!



69. Keress egyenlő, ellentett és azonos vektorokat a kockán és a szabályos hatszögön!



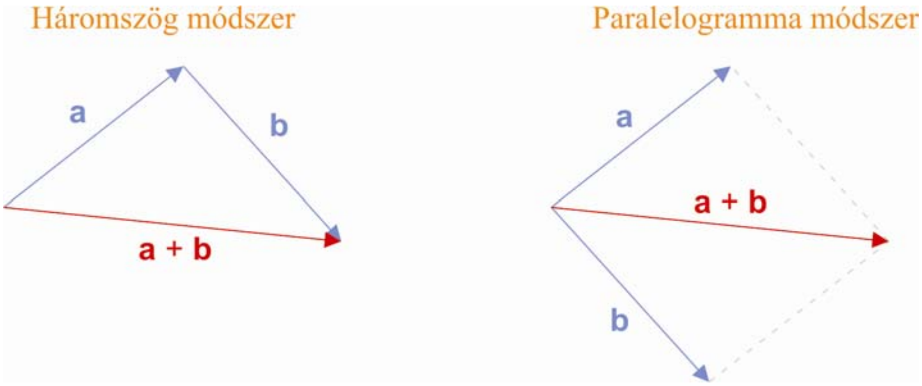


Vektorműveletek

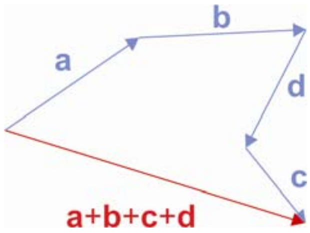
Két vektor összegét kétféle módszer szerint szerkeszthetjük meg:

a) **háromszög-módszer:** az **a** végpontjából mérjük fel a **b** vektort; ekkor az **a** + **b** vektor az **a** kezdőpontjából a **b** végpontjába mutat.

b) **paralelogramma-módszer:** ha **a** és **b** nem párhuzamosak, akkor az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, kiegészítjük paralelogrammává; ekkor az **a** + **b** vektor a paralelogramma közös kezdőpontból kiinduló átló vektora.



Több vektor összeadásánál használható a **láncszabály**:

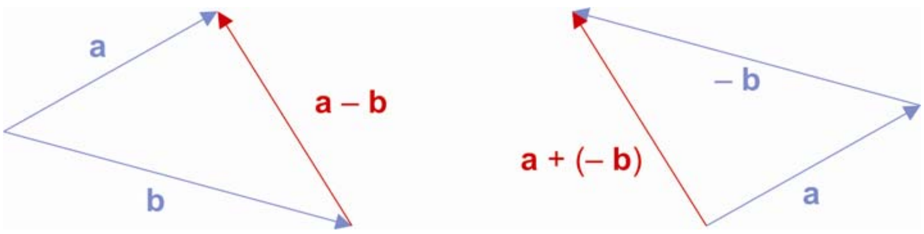


Egy **a** vektor és a nullvektor összege az **a** vektorral egyenlő: $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

A vektorok összeadása a számokkal végzett összeadáshoz hasonlóan kommutatív (felcserélhető) és asszociatív (csoportosítható) művelet:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

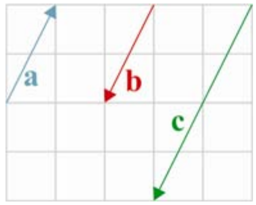
A vektorok összeadásának ellentett művelete a vektorok kivonása. Az **a** és **b** vektorok különbségét úgy képezzük, hogy közös kezdőpontból mérjük fel őket. A végpontjaikat összekötő, **a** végpontja felé mutató vektor az **a – b** vektor. Az **a** – **b** vektort úgy is megszerkeszthetjük, hogy az **a** vektorhoz hozzáadjuk **b** ellentett vektorát (– **b** vektort).



A vektorok kivonására a számok kivonásához hasonlóan nem teljesül sem a kommutativitás, sem az asszociativitás.

A vektorok nyújtására és összenyomására a számmal (skalárral) történő szorzást használjuk.

Az ábrán az **a**, **b** és **c** vektorok között összefüggések állapíthatók meg:

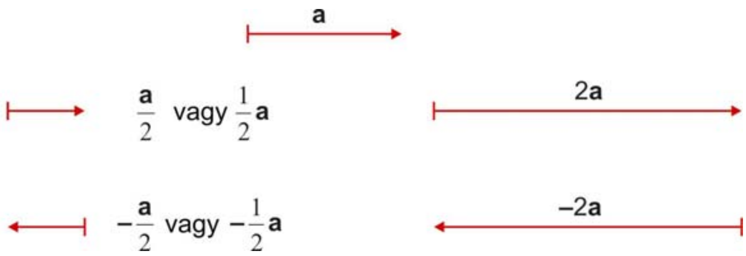


b = – **a** (ellentett vektorok), írhatjuk úgy is, hogy **b** = –1·**a**;

c = 2**b**, valamint

c = 2·(– **a**) = –2·**a**.

További példák vektorok számmal való szorzására:



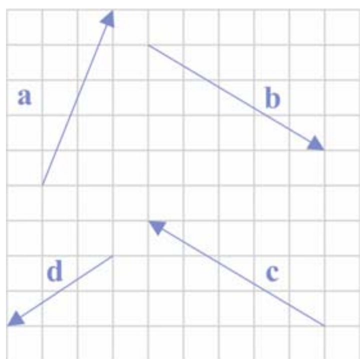
> Az **a vektor *k*-szorosa** ($k \in \mathbf{R}$, vagyis *k* egy valós szám) az a vektor, amelynek hossza $|k|\cdot|\mathbf{a}|$, iránya pedig $k > 0$ esetén **a** irányával megegyező, $k < 0$ esetén **a** irányával ellentétes. $k = 0$ esetén nullvektort kapunk.

1-nél nagyobb abszolútértékű számmal megszorozva a vektort, a hossza növekszik (nyújtás). Ha a szám abszolútértéke 0 és 1 közé esik, akkor a vektort vele megszorozva a vektor hossza csökken (összenyomás). A csupán szorzótényezőjükben különböző vektorokat egyneműeknek tekintjük, így azok összevonhatók: **a** + 2**a** = 3**a**.

A vektorok összeadását és számmal való szorzását használjuk vektorok összetevőkre bontásakor is. A koordináta-rendszerben kihasználjuk a négyzetrács adta lehetőségeket, ami sokat segít a szerkesztések alkalmával.

Feladatok

70. Másold át a füzetedbe az ábráról a vektorokat, majd szerkeszd meg az adott vektorműveletek eredményét!



a) **a** + **b**; b) **a** – **b**; c) **b** + **c**;

d) **a** – **d**; e) **c** – **a**; f) **a** + 2**d**;

g) **b** – 2**c**; h) 3**d** – **c**.

71. Határozd meg az előző feladatban szereplő **a**, **b**, **c** és **d** vektorok hosszát!

Megoldás: A Pitagorasz-tétel alkalmazásával oldjuk meg a feladatot. Az eredmények:

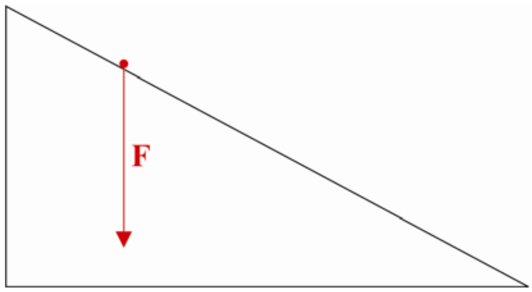
$|\,\mathbf{a}\,| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$ egység; $|\,\mathbf{b}\,| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ egység;

$|\,\mathbf{c}\,| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ egység; $|\,\mathbf{d}\,| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \approx 5{,}61$ egység.

Vektor felbontása adott irányú összetevőkre

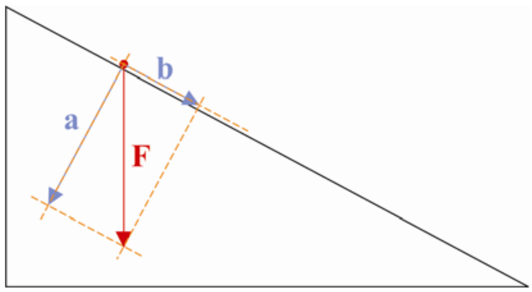
Mintapélda₆

Az ábrán egy lejtőn nyugvó testre ható nehézségi erő vektorát rajzoltuk meg. Bontsuk fel a nehézségi erőt egy lejtőre merőleges és egy lejtővel párhuzamos irányú összetevőre!



Megoldás:

A keresett erők összege az adott **F** nehézségi erő, kezdőpontjuk megegyezik **F** kezsőpontjával. Ha a paralelogramma módszer szerint összegezzük a lejtőre párhuzamos és a lejtőre merőleges erőket, akkor az összegvektor a paralelogramma átlója.

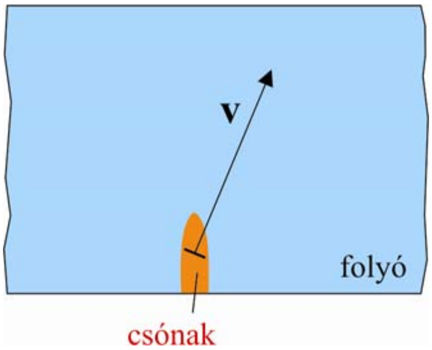


Olyan paralelogrammát szerkesztünk tehát, amelynek oldalai a kívánt irányokkal párhuzamosak, átlója pedig a megadott vektor (szerkesztéskor F kezdő- és végpontján keresztül a lejtővel párhuzamost, illetve a lejtőre merőleges egyeneseket húzunk, és a keletkező metszéspontok adják az összetevők végpontjait) . A paralelogramma oldalainak vektorai **a** és **b**. **a** az **F** erő lejtőre merőleges összetevője, **b** pedig a lejtővel párhuzamos összetevő.

A vektorok ilyen jellegű, adott irányokkal párhuzamos összetevőkre bontása fontos szerepet játszik például az épületek, tartószerkezetek statikai megtervezésekor. A vektorok összeadásával írható le az a jelenség is, hogy fékezéskor a buszban az utasok előre dőlnek. Mivel a gyakorlati életben nagy jelentőségű a vektorok összeadása és felbontása, mi is megismernünk az alkamazásukkal.

Feladatok

72. Egy csónak a partra merőlegesen indult útjára, de a folyó elsodorta. Az ábrán megrajzoltuk a csónak sebességének vektorát. Szerkeszd meg a folyó és a csónak partra merőleges sebességének vektorait!



73. Egy csónak egy erős sodrású folyón elindul a másik part felé a folyó partjára merőleges irányban, 7 m/s sebességgel. A folyóban a víz áramlásának a sebessége 2,5 m/s.

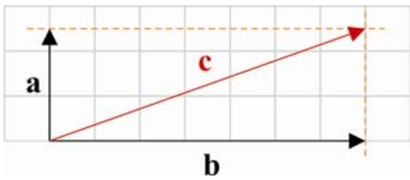
a) Készíts ábrát a feladathoz, amelyben a sebességeket a nagyságukkal arányos hosszúságú vektorokkal ábrázolod!

b) Szerkeszd meg a csónak és a folyó sebességének megfelelő vektorok összegét!

c) Számítsd ki a csónak parthoz viszonyított sebességét a vektorok felhasználásával!

Megoldás:

a) – b)



c) $|\mathbf{c}| = \sqrt{2{,}5^2 + 7^2} = \sqrt{55{,}25} \approx 7{,}43$, a csónak sebessége tehát 7,3 m/s.

74. Az ábrán egy téglára ható **F** húzóerőt ábrázoltunk. Bontsd fel az **F** vektort két összetevőre: egyik legyen a talajjal merőleges (emelő erő), a másik pedig a talajjal párhuzamos (gyorsító erő)! (Mindkét erő **F**-hez hasonlóan a test tömegközéppontjából induljon ki.)

Megoldás: