

Matematika „A”
10. szakiskolai évfolyam

3. modul

Másodfokú függvények és egyenletek

Készítette Csákvári Ágnes

A modul célja	A másodfokú függvény tulajdonságainak ismerete, leolvasása grafikonról. Képlettel megadott egyszerű függvények ábrázolása értéktáblázzal és transzformációval. A függvény, mint modell alkalmazása egyszerű problémákban, a hétköznapi életben. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása grafikusan és megoldóképlettel.
Időkeret	Ajánlott óraszám: 16 óra, a modulban kidolgozott órák száma: 10 tanóra
Ajánlott korosztály	10. szakiskolai évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	<p>Tágabb környezetben: Fizika, hétköznapi szituációk, szakmai számítások</p> <p>Szűkebb környezetben: A nevezetes azonosságok felfedeztetése. Számok négyzete táblázat készítése. Táblázat alapján a leg-egyszerűbb másodfokú függvény ábrázolása koordináta-rendszerben. A másodfokú függvény tulajdonságainak vizsgálata. Egyszerű másodfokú egyenletre vezető problémák alapján egyenlet felírása, majd megoldás keresése, következtetéssel, próbálgatással, grafikus ábrázolással. A várható eredmény becslése, az eredmények ellenőrzése. Megoldóképlet levezetése elvének megmutatása egyszerű esetben. A képlet megadása. Másodfokú egyenlet megoldása megoldóképlet segítségével. Szöveg alapján egyszerűbb másodfokú egyenletek felírása és megoldása. A megoldás ellenőrzése, a szóba jöhető megoldás kiválasztása, a szövegnek megfelelően.</p> <p>Ajánlott megelőző tevékenységek: Műveletek végzése algebrai kifejezésekkel. Egy és többtagú algebrai (egész) kifejezések összeadása, kivonása, szorzása egy tagúval, és kéttagú kifejezéssel. Geometriai számítások (terület, kerület).</p> <p>Ajánlott követő tevékenységek: <u>Hasonlóság és alkalmazásai</u>, hatványozás általánosítása, térgeometria.</p>

A képességfejlesztés fókuszai	<p>Számolás, számlálás, számítás: Adott helyhez tartozó függvényértékek kiszámítása, illetve a függvényértékekhez tartozó x helyek kiszámítása. A függvényértékek közötti reláció meghatározása. Racionális számkör bővítése.</p> <p>Mennyiségi következtetés: A fizikában és a matematikában előforduló négyzetes összefüggések szemléltetése értéktáblázattal, illetve grafikonon.</p> <p>Becslés: Adott függvényértékekhez tartozó x helyek számának becslése. Másodfokú egyenlet megoldásai számának meghatározása.</p> <p>Szöveges feladatok, metakogníció: Az elméleti anyag csoportos feldolgozásakor a kiadott szöveg értelmezése. A valóságból merített szöveges feladatok algebrai megfogalmazása, az így leírt kétváltozós összefüggések ábrázolása a koordináta-rendszerben, értéktáblázatban. Szöveges feladatok alapján matematikai modellalkotás.</p> <p>Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: A geometriai transzformációk alkalmazása függvény-transzformációknál.</p> <p>Induktív, deduktív következtetés: Konkrét számokkal illetve összefüggésekkel megadott másodfokú függvényekről átlépés az általános képlettel megadottakra, illetve az általánosítás után azok konkrét alkalmazása. Műveleti tulajdonságok általánosítása a valós számok halmazára, továbbá az algebrai kifejezésekre. fejlesztése: a tanult azonosságok, képletek alkalmazása.</p>
--------------------------------------	---

TÁMOGATÓ RENDSZER

Táblázatok, grafikonok, feladatkétyák (3.1 – 3.5 kártyacsomagok), szakértői mozaik, dominó, triminó, számológép

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

- 1. óra:** Kéttényezős szorzatok
- 2. óra:** Nevezetes szorzatok
- 3. óra:** Másodfokú függvény definíciója, tulajdonságai
- 4. óra:** A másodfokú függvény grafikonjának ábrázolása függvénytranszformációkkal
- 5. óra:** Másodfokú egyenletek grafikus megoldása
- 6. óra:** Hiányos másodfokú egyenletek megoldása, nevezetes azonosságok alkalmazása
- 7. – 8. óra:** Másodfokú egyenlet megoldóképlete
- 9. – 10. óra:** Szöveges feladatok

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/Feladat/ Gyűjtemény
--	---------------------------	-------------------------------	-------------------------------

I. Kéttényezős szorzatok

1.	Mintapéldák megbeszélése	Induktív, deduktív következtetés, számolás	1., 2. mintapélda
2.	Csoportmunka párokban: A tanár minden párosnak kijelöl 2-2 példát a 2. feladatból.	Deduktív következtetés, számolás	1., 2. feladat

II. Nevezetes szorzatok

1.	Mintapéldák megbeszélése	Induktív, deduktív következtetés, számolás, számítás	3. mintapélda
2.	A 3. és 4. feladatok feldolgozhatóak párban, vagy a mellékelt triminóval	Deduktív következtetés, számolás, kombinatív gondolkodás	3.6 triminó; 3., 4. feladat

II. Másodfokú függvény definíciója, tulajdonságai

1.	A másodfokú alapfüggvény definíciója és grafikonja A tanulók 3 fős csoportokban dolgoznak	Szövegértés, számolás, számlálás, becslés	3.1 kártyakészlet 4 – 6. mintapélda
2.	A másodfokú alapfüggvény tulajdonságai	Rendszerezés	7. mintapélda
3.	Függvényértékek kiszámítása, értéktáblázat kitöltése A mintapélda közös megbeszélése után a tanulók ismét 3 fős csoportokban dolgoznak.	Számolás	8. mintapélda 5. feladat

IV. A másodfokú alapfüggvény transzformációkkal			
1.	A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak a szakértői mozaikkal: Egy csoporton belül az egyik tanuló a másodfokú függvény tulajdonságait (előző órai ismétlés), a másik az x tengely menti eltolásokat, a harmadik az y tengely menti eltolásokat, a negyedik pedig a zsugorítás/nyújtás részt kapja.	Szövegértés, induktív gondolkodás, rendszerezés	9., 10., 11. mintapélda 3.7 szakértői mozaik
2.	Függvényábrázolás torpedó játékkal	Deduktív, kombinatív gondolkodás, számlálás	6 – 8. feladat, 3.8 torpedó játék
3.	Szöveges feladatok megoldása	Szövegértés, kombinatív gondolkodás	9 – 11. feladat

V. Másodfokú egyenletek grafikus megoldása			
1.	Másodfokú egyenletek grafikus megoldása Minden csoportban osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint. Az azonos betűjelűek dolgoznak együtt, majd a tudásukat „visszaviszik” a saját csoportjukba.	Szövegértés, becslés, számlálás	12., 13. mintapélda 12 – 15. feladat 3.2 kártyakészlet
2.	Feldarabolt négyzetek módszere.	Kombinatív gondolkodás, valószínűségi szemlélet	3.3 kártyakészlet

VI. Hiányos másodfokú egyenletek megoldása, nevezetes azonosságok alkalmazása			
1.	Mintapéldák megbeszélése után szakértői mozaik	Szövegértés, metakogníció, kombinatív gondolkodás, számolás, számítás, induktív gondolkodás, rendszerezés	3.4 kártyakészlet 14 – 17. mintapélda
2.	Matematikai TOTÓ.	Számolás, számítás, deduktív gondolkodás	16. feladat

VII. Másodfokú egyenlet megoldóképlete			
1.	Másodfokú egyenlet megoldása teljes négyzetté alakítással	Induktív gondolkodás	18. mintapélda
2.	A másodfokú egyenlet megoldóképlete	Induktív gondolkodás, rendszerezés	19. mintapélda
3.	Differenciált gyakorlás. A tanulók itt 2 fős homogén csoportokban dolgoznak, ellenőrzik egymást.	Számítás, deduktív gondolkodás	17., 18., 19. feladat
4.	Dominó játék	Számítás, deduktív gondolkodás	3.9 dominó
5.	Diszkrimináns vizsgálata	Valószínűségi szemlélet, számítás	20. feladat

VIII. Szöveges feladatok			
1.	Mintapéldák megbeszélése után szakértői mozaik	Szövegértés, kombinatív gondolkodás, számítás, számolás	16. mintapélda 21 – 31. feladat

I. Kéttényezős szorzatok

Egyenletek megoldása közben gyakran előfordul a zárójelfelbontás. Legtöbbször egy számmal szoroztuk meg a zárójeles kifejezést.

Mintapélda₁

Bontsuk fel a zárójelet! a) $3 \cdot (x + 2)$; b) $2a \cdot (a + 5)$; c) $-k \cdot (3k - p)$; d) $7m \cdot (2n - 5m)$.

Megoldás:

$$\text{a) } 3 \cdot (x + 2) = 3x + 6; \quad \text{b) } 2a \cdot (a + 5) = 2a^2 + 10a; \quad \text{c) } -k \cdot (3k - p) = -3k^2 + kp;$$

$$\text{d) } 7m \cdot (2n - 5m) = 14mn - 35m^2.$$

A továbbiakban megnézzük, hogyan bontjuk fel a zárójelet akkor, amikor a szorzótényezők szintén zárójeles kifejezések.

Emlékeztető: Összeget összeggel úgy szorzunk, hogy az egyik összeg minden tagját megszorozzuk a másik összeg minden tagjával. Ha lehet, összevonunk.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Mintapélda₂

Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$\text{a) } (x + y) \cdot (w + z);$$

$$\text{b) } (2a + 1) \cdot (5 - a);$$

$$\text{c) } (2k + p) \cdot (-4p - 3);$$

$$\text{d) } (5x - 2y) \cdot (3y - 2x).$$

Megoldás:

$$\text{a) } (x + y) \cdot (w + z) = xw + xz + yw + yz;$$

$$\text{b) } (2a + 1) \cdot (5 - a) = 2a \cdot 5 + 2a \cdot (-a) + 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-a) = 10a - 2a^2 + 5 - a = -2a^2 + 9a + 5;$$

$$\text{c) } (2k + p) \cdot (-4p - 3) = 2k \cdot (-4p) + 2k \cdot (-3) + p \cdot (-4p) + p \cdot (-3) = -8kp - 6k - 4p^2 - 3p;$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (5x - 2y) \cdot (3y - 4x) &= 5x \cdot 3y + 5x \cdot (-4x) - 2y \cdot 3y - 2y \cdot (-4x) = 15xy - 20x^2 - 6y^2 + 8xy = \\ &= 23xy - 20x^2 - 6y^2. \end{aligned}$$

Módszertani ajánlás: A rövid emlékeztető után a tanulók 4 fős csoportokat alkotnak. Először az egy csoporton belüli tanulók párokban dolgoznak. A tanár minden párosnak kijelöl 2-2

példát a 2. feladatból. Füzetbe vagy írólapra felírják a feladatokat és a megoldásokat. Ha elkészültek, a párosok kicserélik papírjaikat, és ellenőrzik a megoldásokat. Majd megbeszélik a javítást. Végül osztályszinten is egyeztetik az eredményeket.

Feladatok

 1. Párosítsd össze a szorzatokat a kifejezésekkel!

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $(2x + 7) \cdot (5y - 1)$; | i) $4y^2 + 3xy - 3x - 4y$; |
| b) $(3x - 5) \cdot (2x - y)$; | ii) $10xy - 2x + 35y - 7$; |
| c) $(y - 1) \cdot (3x + 4y)$; | iii) $10x^2 + 3y^2 + 11xy$; |
| d) $(2x + y) \cdot (3y + 5x)$; | iv) $6x^2 - 3xy - 10x + 5y$. |

Megoldás: c) – i); a) – ii); d) – iii); b) – iv)

 2. Végezd el a kijelölt műveleteket! Vonj össze, ahol lehet!

- | | | |
|---|--|-----------------------------------|
| a) $(2a + 1) \cdot (3a - 2)$; | b) $(5 + 3c) \cdot (4b + 2)$; | c) $(2e - 3f) \cdot (-e + 5)$; |
| d) $(5g - 8h) \cdot (3h + 1)$; | e) $(2i + 5j) \cdot (3i + 4j)$; | f) $(-8k - 5l) \cdot (3l + 2k)$; |
| g) $(1,5m - n) \cdot (m - 2,8n)$; | h) $-(1,2o + 0,5p) \cdot (0,3o - p)$; | |
| i) $(3,6q + 0,8r) \cdot (2,1r - 1,9q)$; | j) $\left(\frac{2}{3}s + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2}s\right)$; | |
| k) $\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{5}u\right) \cdot (2t + 3u)$; | l) $(2,6v + 5,2y) \cdot (0,4x + 1,3z)$. | |

Megoldás:

- a) $(2a + 1) \cdot (3a - 2) = 6a^2 - 4a + 3a - 2 = 6a^2 - a - 2$;
- b) $(5 + 3c) \cdot (4b + 2) = 20b + 10 + 12bc + 6c$;
- c) $(2e - 3f) \cdot (-e + 5) = -2e^2 + 10e + 3ef - 15f$;
- d) $(5g - 8h) \cdot (3h + 1) = 15gh + 5g - 24h^2 - 8h$;
- e) $(2i + 5j) \cdot (3i + 4j) = 6i^2 + 8ij + 15ij + 20j^2 = 6i^2 + 23ij + 20j^2$;
- f) $(-8k - 5l) \cdot (3l + 2k) = -24kl - 16k^2 - 15l^2 - 10kl = -16k^2 - 15l^2 - 34kl$;
- g) $(1,5m - n) \cdot (m - 2,8n) = 1,5m^2 - 4,2mn - mn + 2,8n^2 = 1,5m^2 - 5,2mn + 2,8n^2$;
- h) $-(1,2o + 0,5p) \cdot (0,3o - p) = -0,36o^2 + 1,2op - 0,15po + 0,5p^2$;
 $= -0,36o^2 + 1,05op + 0,5p^2$;
- i) $(3,6q + 0,8r) \cdot (2,1r - 1,9q) = 7,56qr - 6,84q^2 + 1,68r^2 - 1,52rq =$
 $= 6,04qr - 6,84q^2 + 1,68r^2$;

$$\text{j) } \left(\frac{2}{3}s + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}s\right) = \frac{8}{9}s - s^2 + 1 - \frac{9}{8}s = -s^2 - \frac{17}{72}s + 1;$$

$$\text{k) } \left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{5}u\right)(2t + 3u) = \frac{2}{3}t^2 + tu - \frac{4}{5}ut - \frac{6}{5}u^2 = \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{5}ut - \frac{6}{5}u^2;$$

$$\text{l) } (2,6v + 5,2y) \cdot (0,4x + 1,3z) = 1,04vx + 3,38vz + 2,08yx + 6,76yz .$$

II. Nevezetes szorzatok

Vannak olyan kéttényezős szorzatok, ahol a tényezők megegyeznek, vagy csak egyetlen előjelben különböznek. Ezen szorzatokra tanultunk azonosságokat, amelyek alkalmazása meggyorsítja a feladatok megoldását.

Nevezetes szorzatok:

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Mintapélda₃

Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $(2x + 5y)^2$;

b) $(3a - 7b)^2$;

c) $(2k + 3m) \cdot (2k - 3m)$.

Megoldás:

a) $(2x + 5y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$;

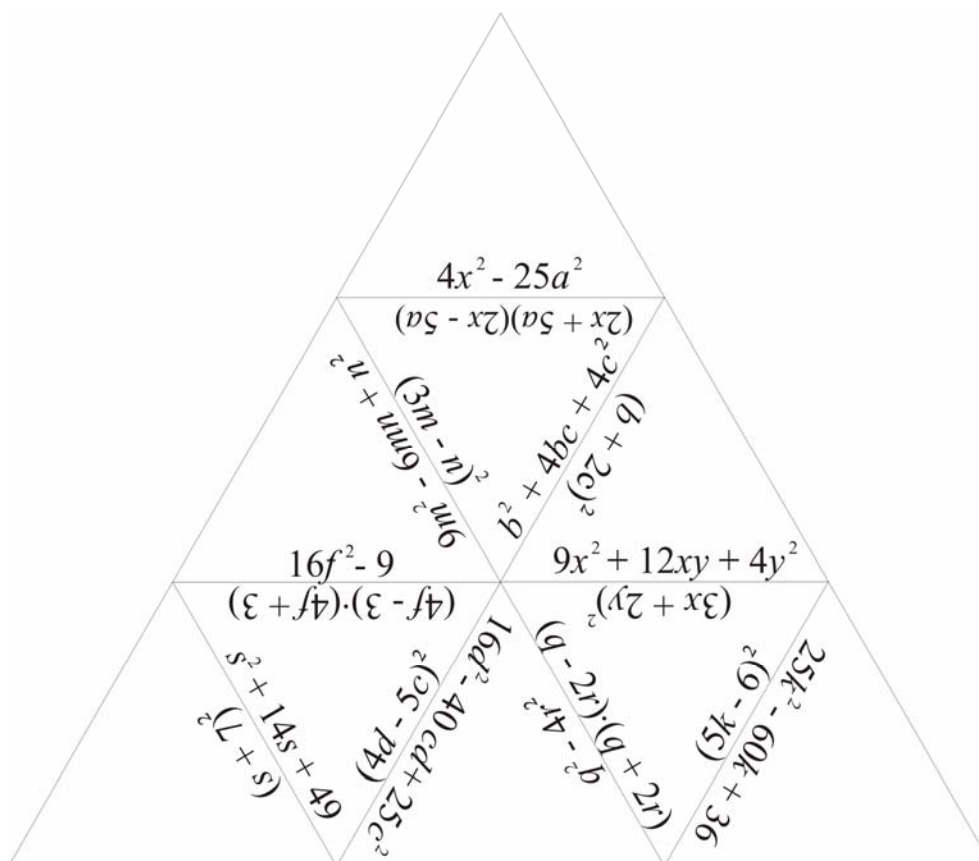
b) $(3a - 7b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 7b + (7b)^2 = 9a^2 - 42ab + 49b^2$;

c) $(2k + 3m) \cdot (2k - 3m) = (2k)^2 - (3m)^2 = 4k^2 - 9m^2$.

Módszertani javaslat: Triminó játék: Alakítsunk ki 2-3 fős csoportokat az osztályban. Minden csoport kap 9 db szabályos háromszöget. A kis háromszögek oldalait összeillesztve minden csoport elkészíti a nagy háromszöget. Úgy kell az oldalakat összeilleszteni, hogy az élek mentén a szorzatok és a nekik megfelelő kifejezések álljanak.

Aki nem szeretne triminózni, az megtalálja a példákat a 3.–4. feladatokban, és feldolgozhatja például páros csoportmunkában.

3.6 triminó



Feladatok



3. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $(s + 7)^2$;

b) $(5k - 6)^2$;

c) $(4f + 3)(4f - 3)$;

d) $(b + 2c)^2$;

e) $(3m - n)^2$;

f) $(q - 2r)(q + 2r)$.

Megoldás:

a) $s^2 + 14s + 49$; b) $25k^2 - 60k + 36$; c) $16f^2 - 9$; d) $b^2 + 4bc + 4c^2$;

e) $9m^2 - 6mn + n^2$; f) $q^2 - 4r^2$.



4. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $(2x + 5a)(2x - 5a)$;

b) $(3x + 2y)^2$;

c) $(4d - 5c)^2$;

d) $(1,2z + 0,7w)^2$;

e) $(3,7e - 8)^2$;

f) $\left(\frac{2}{5}y - \frac{1}{2}v\right)\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{2}v\right)$.

Megoldás:

a) $4x^2 - 25a^2$; b) $9x^2 + 12xy + 4y^2$; c) $16d^2 - 40cd + 25c^2$;

d) $1,44z^2 + 1,68wz + 0,49w^2$; e) $13,69e^2 - 59,2e + 64$; f) $\frac{4}{25}y^2 - \frac{1}{4}v^2$.

III. A másodfokú függvény definíciója

A másodfokú alapfüggvény definíciója és grafikonja

Módszertani megjegyzés: A tanulók 3 fős csoportokban dolgoznak. A tanár odaadja a **3.1 kártyakészletet** minden csoportnak. Ezeket a 4., 5. és 6. mintapélda található.

<p>1. feladat: Egy négyzet alakú kertet szeretnénk füvesíteni. Tudjuk, hogy 10 dkg fűmag 16 m² területre elég.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Hány dkg fűmag kell 1m; 135 cm; 2 m; 3 m; 3 m 20 cm; 4m; 4 m 5 dm; 5m 58 dm illetve 6 m oldalú, négyzet alakú kert füvesítéséhez? – Készíts grafikont a négyzet alakú kert oldala és a kert területe közötti kapcsolatról! 	<p>1. feladat: Egy négyzet alakú kert szeretnénk füvesíteni. Tudjuk, hogy 10 dkg fűmag 16 m² területre elég.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Hány dkg fűmag kell 1m; 135 cm; 2 m; 3 m; 3 m 20 cm; 4m; 4 m 5 dm; 5m 58 dm illetve 6 m oldalú, négyzet alakú kert füvesítéséhez? – Készíts grafikont a négyzet alakú kert oldala és a kert területe közötti kapcsolatról!
<p>2. feladat: Egy autó álló helyzetből 100 km/h sebességre 12,5 másodperc alatt egyenletesen gyorsul. Hány méterre lesz a kiindulási ponttól 1; 2; 3; 3,5; 4; 5,2; 8; 10,4; és 12,5 másodperc elteltével? Ábrázold grafikonon az eltelt idő és a megtett út kapcsolatát!</p>	<p>2. feladat: Egy autó álló helyzetből 100 km/h sebességre 12,5 másodperc alatt egyenletesen gyorsul. Hány méterre lesz a kiindulási ponttól 1; 2; 3; 3,5; 4; 5,2; 8; 10,4; és 12,5 másodperc elteltével? Ábrázold grafikonon az eltelt idő és a megtett út kapcsolatát!</p>
<p>3. feladat: Egy 15 m magas épület tetejéről le hull egy cserép. Hány méterre van a földtől 0,1; 0,2; 0,25; 0,5; 0,8; 1,1; 1,42 illetve 1,73 másodperc elteltével? Ábrázold grafikonon az eltelt idő és a földtől való távolság kapcsolatát!</p> <p>A megtett utat az $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ képlettel számítjuk ki, ahol $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gravitációs gyorsulás.</p>	<p>3. feladat: Egy 15 m magas épület tetejéről le hull egy cserép. Hány méterre van a földtől 0,1; 0,2; 0,25; 0,5; 0,8; 1,1; 1,42 illetve 1,73 másodperc elteltével? Ábrázold grafikonon az eltelt idő és a földtől való távolság kapcsolatát!</p> <p>A megtett utat az $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ képlettel számítjuk ki, ahol $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gravitációs gyorsulás.</p>

A csoport tagjai húznak egy-egy feladatot, amit megoldanak önállóan, vagy csoporttársaik segítségével. Ha készen vannak, közösen ellenőriznek. Végül a tanár definiálja a másodfokú alapfüggvényt és megbeszéli a függvény tulajdonságait.

Mintapélda₄

Egy négyzet alakú kertet szeretnénk füvesíteni. Tudjuk, hogy 10 dkg fűmag 16 m² területre elég.

- Hány dkg fűmag kell 1 m; 135 cm; 2 m; 3 m; 3 m 20 cm; 4 m; 4 m 5dm; 5m, 58 dm, illetve 6 m oldalú, négyzet alakú kert füvesítéséhez?
- Készíts grafikont a négyzet alakú kert oldala és a kert területe közötti kapcsolatról!

Megoldás:

Először számoljuk ki a megadott oldalak alapján a kert területét, majd határozzuk meg, hogy hány dkg fűmag szükséges. A számoláshoz végezzük el a szükséges átváltásokat!

$$135 \text{ cm} = 1,35 \text{ m}; \quad 3 \text{ m } 20 \text{ cm} = 3,2 \text{ m}; \quad 4 \text{ m } 5 \text{ dm} = 4,5 \text{ m}; \quad 58 \text{ dm} = 5,8 \text{ m}.$$

Jelöljük a kert oldalát a -val, a területét T -vel. Ekkor $T = a^2$.

Készítsünk értéktáblázatot!

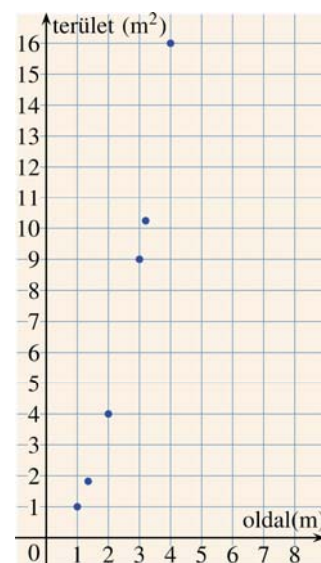
$a(m)$	1	1,35	2	3	3,2	4	4,5	5	5,8	6
$T(m^2)$	1	1,8225	4	9	10,24	16	20,25	25	33,64	36

Ábrázoljuk grafikonon a táblázat oszlopaiban található értékpárokat!

Tudjuk, hogy 16 m^2 kert füvesítéséhez 10 dkg fűmag kell, ezért 1 m^2 kert füvesítéséhez $\frac{10}{16} = 0,625 \text{ dkg}$ fűmagra van szükség.

T területű kert esetén $0,625 \cdot T \text{ dkg}$ fűmag kell.

Készítsünk értéktáblázatot a fűmag mennyiségének meghatározására is!



$T(m^2)$	1	1,8225	4	9	10,24	16	20,25	25	33,64	36
Fűmag (dkg)	0,63	1,14	2,6	5,63	6,4	10	12,81	15,63	21,03	22,5

Mintapélda₅

Egy autó álló helyzetből 100 km/h sebességre gyorsul $12,5$ másodperc alatt egyenletesen. Hány méterre lesz a kiindulási ponttól 1 ; 2 ; 3 ; $3,5$; 4 ; $5,2$; 8 ; $10,4$; és $12,5$ másodperc elteltével? Ábrázold grafikonon az eltelt idő és a megtett út kapcsolatát!

Megoldás:

A megtett út kiszámításához meghatározzuk a gyorsulást az $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ képlet alapján, ahol

Δv a sebességváltozást, Δt az időváltozást jelenti.

Mivel az idő másodpercben, a sebesség km/h -ban adott, és a feladat méterben kéri a távolságokat, ezért átváltjuk a sebességet m/s -ba.

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 100 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{100}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

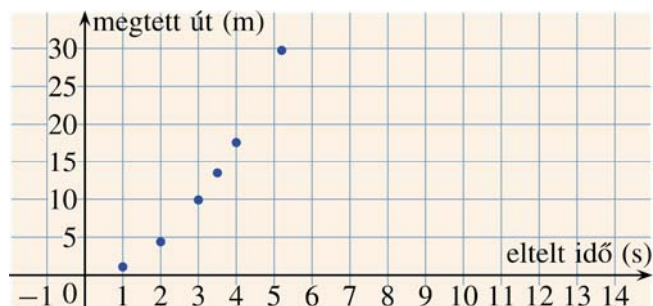
$$\text{Az autó gyorsulása: } a = \frac{27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{12,5 \text{ s}} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az utat az $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ képlettel számíthatjuk ki.

Készítsünk értéktáblázatot! A megtett utat elegendő egy tizedesjegy pontosan megadni.

t (s)	1	2	3	3,5	4	5,2	8	10,4	12,5
s (m)	1,1	4,4	9,9	13,5	17,6	29,75	70,4	119	171,9

Ábrázoljuk grafikonon a kapott értékpárokat.



Mintapélda₆

Egy 15 m magas épület tetejéről lezuhall egy cserép. Hány méterre van a földtől 0,1; 0,2; 0,25; 0,5; 0,8; 1,1; 1,42 illetve 1,73 másodperc elteltével? Ábrázold grafikonon az eltelt idő és a földtől való távolság kapcsolatát!

A megtett utat az $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ képlettel számítjuk ki, ahol $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gravitációs gyorsulás.

Megjegyzés: g értéke független a test tömegétől és anyagi minőségétől.

Megoldás:

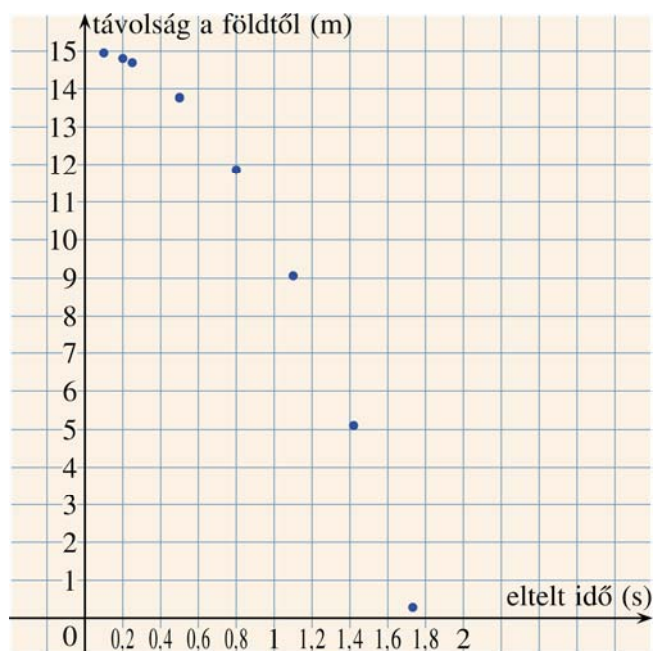
A megadott képlet segítségével a tetőtől való távolságot tudjuk meghatározni. A földtől való távolság $15 - s$.

Készítsünk értéktáblázatot!

t (s)	0,1	0,2	0,25	0,5
$15 - s$ (m)	$15 - 0,05 =$ $=14,95$	$15 - 0,2 =$ $=14,8$	$15 - 0,31 =$ $=14,69$	$15 - 1,25 =$ $=13,75$

t (s)	0,8	1,1	1,42	1,732
$15 - s$ (m)	$15 - 3,2 =$ $=11,8$	$15 - 6,05 =$ $=8,95$	$15 - 10,08 =$ $=4,92$	$15 - 15 =$ $=0$

Ábrázoljuk grafikonon a kapott értékpárokat.



Az előző mintapéldákban olyan feladatokkal találkoztunk, ahol a felsorolt értékek és a keresett mennyiségek (oldal és terület, eltelt idő és megtett út) között négyzetes összefüggés van. A grafikonok pontjait össze is köthetjük folytonos görbével, mert minden valós számnak van négyzete. Minél jobban közelítünk egy x értékhez, a számokhoz tartozó négyzetértékek is annál jobban közelítenek x^2 értékéhez.

Mintapélda₇

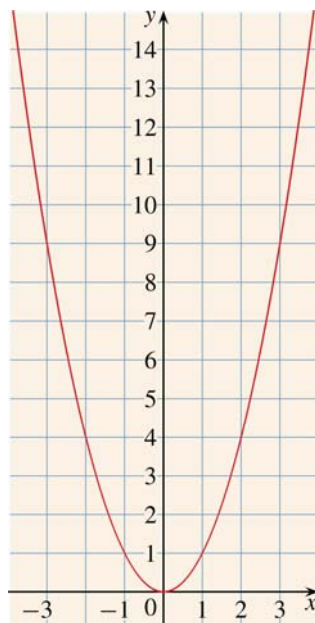
Minden valós számhoz rendeljük hozzá a négyzetét! Készítsük el a kapott függvény grafikonját!

Megoldás:

Ekkor a hozzárendelési utasítás $f(x) = x^2$ alakban írható fel.

x	-16	-10,5	-5	-4	$-\frac{3}{2}$	-1	-0,63	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,3
$f(x)$	256	110,25	25	16	$\frac{9}{4}$	1	0,3969	0	1	$\frac{4}{9}$	4	9	127,69

Mivel minden szám négyzete nemnegatív, ezért az $f(x) = x^2$ függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. Ha koordináta-rendszerben ábrázoljuk az összes olyan értékpárt, amelynek első tagja egy tetszőleges valós szám, második tagja pedig annak négyzete, a következő görbét kapjuk:



Ennek a görbének a neve *parabola*. Az ábrán látható, hogy a másodfokú alapfüggvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. A parabola szimmetriatengelyén lévő pontját tengelypontnak nevezzük.

Minden valós számhoz hozzárendelhetjük annak négyzetét. Az $f(x) = x^2$ hozzárendelési utasítással megadott függvényt **másodfokú alapfüggvénynek** nevezzük. Képe **parabola**.

Megjegyzés: Eddig az $x \mapsto x^2$ jelölést használtuk, de napjainkban inkább az $f(x) = x^2$ jelölés az elterjedtebb. A továbbiakban ez utóbbi jelölést használjuk.

A másodfokú alapfüggvény tulajdonságai

1. Monotonitás:

- Ha $x \leq 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Ezért a függvény ezen a tartományon **szigorúan monoton csökkenő**.
- Ha $x \geq 0$, akkor növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvényt ezen a tartományon **szigorúan monoton növekvőnek** nevezzük.

2. Zérushely: az értelmezési tartománynak azon eleme, ahol a függvényérték 0.

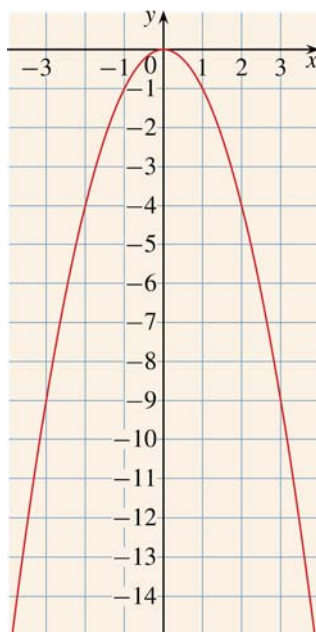
Az $f(x) = x^2$ függvénynek az $x = 0$ pontban van **zérushelye**. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ezen a helyen közös pontja van az x tengellyel.

3. Szélsőérték:

Az $f(x) = x^2$ függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen pozitív. Ezért az f függvénynek az $x = 0$ helyen szélsőértéke, nevezetesen **minimuma** van. (Látható, hogy az f függvény 0-nál kisebb értékek esetén szigorúan monoton csökkenő, 0-nál nagyobb értékek esetén pedig szigorúan monoton növekvő.) Másképp: az f függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ helyén veszi fel a legkisebb függvényértékét.

Tekintsük a $g(x) = -x^2$ függvényt!

x	-16	-10,5	-5	-4	$-\frac{3}{2}$	-1	-0,6	0	1	$\frac{2}{3}$	2	3	11,3
$g(x)$	-256	-110,25	-25	-16	$-\frac{9}{4}$	-1	-0,36	0	-1	$-\frac{4}{9}$	-4	-9	-127,69



A g függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív. Ezért a g függvénynek az $x = 0$ helyen szélsőértéke, nevezetesen **maximuma** van. (Látható, hogy a g függvény nem pozitív x -ek esetén szigorúan monoton növekvő, nem negatív x -ekre pedig szigorúan monoton csökkenő.)

Másképp: a g függvény az értelmezési tartományának $x = 0$ pontjában veszi fel a legnagyobb értékét.

Módszertani megjegyzés: Most a függvényértékek kiszámításának gyakorlása következik. A mintapélda közös megbeszélése után a tanulók ismét 3 fős csoportokban dolgoznak. Feladatuk kiszámítani a függvényértékeket a megadott helyeken, illetve kitölteni az értéktáblázatot. Utána körbeadják a füzetüket. Először az értéktáblázat helyes kitöltését ellenőrzik, majd to-

vábbadják és a függvényértékek számításának ellenőrzésével folytatják. A következő továbbadáskor a füzetek kijavítva visszakerülnek gazdájukhoz. *Ajánlás:* 5. b), c) és d).

Mintapélda₈

Az $f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 + 2$ hozzárendelési utasítás alapján számítsuk ki a függvényértékeket a megadott helyeken: $f(-0,7) = ?$; $f(3) = ?$

x	-3	0	4,3
$f(x)$			

Megoldás:

$$f(-0,7) = 2 \cdot (-0,7 - 3)^2 + 2 = 2 \cdot (-3,7)^2 + 2 = 2 \cdot 13,69 + 2 = 27,38 + 2 = 29,38.$$

A többi függvényérték kiszámítása kevésbé részletezve:

$$f(3) = 2 \cdot (3 - 3)^2 + 2 = 2.$$


Az értéktáblázat az előbbiekhöz hasonlóan kitölthető:

$$x = 4,3 \text{ esetén } f(4,3) = 2 \cdot (4,3 - 3)^2 + 2 = 5,38.$$

Az eredmény:

x	-3	0	4,3
$f(x)$	74	20	5,38

Feladat

 5. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot, illetve a tanult jelöléseket használva számítsd ki a függvényértékeket a megadott helyeken!

 a) $a(x) = -x^2 + 3$ $a(-1) = ?$; $a(2) = ?$; $a(4) = ?$

x	-6	-5	-2	0	1
$a(x)$					

b) $b(x) = (x + 4)^2 - 3$ $b(-1,2) = ?$; $b(0,3) = ?$; $b(1) = ?$

x	0	2	4	4,5	6
$b(x)$					

c) $c(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ $c(-16) = ?$; $c\left(-\frac{16}{3}\right) = ?$; $c(-4) = ?$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	4
$c(x)$					

d) $d(x) = 3(x-2)^2$ $d\left(-2\frac{2}{3}\right) = ?$; $d(0) = ?$; $d(0,1) = ?$

x	$-\frac{32}{3}$	-2	1	2	5,5
$d(x)$					

Megoldás:

a) $a(x) = -x^2 + 3$ $a(-1) = 2$; $a(2) = -1$; $a(4) = -13$.

x	-6	-5	-2	0	1
$a(x)$	-33	-22	-1	3	2

b) $b(x) = (x+4)^2 - 3$ $b(-1,2) = 4,84$; $b(0,3) = 15,49$; $b(1) = 22$.

x	0	2	4	4,5	6
$b(x)$	13	33	61	69,25	97

c) $c(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ $c(-16) = 62$; $c\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{46}{9}$; $c(-4) = 2$.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	4
$c(x)$	-1,75	-2	$-\frac{31}{16}$	-1	2

d) $d(x) = 3(x-2)^2$ $d\left(-2\frac{2}{3}\right) = \frac{196}{2}$; $d(0) = 12$; $d(0,1) = 10,83$.

x	$-\frac{32}{3}$	-2	1	2	5,5
$d(x)$	$\frac{1444}{3}$	48	3	0	36,75

IV. A másodfokú alapfüggvény transzformációi

A való életben a másodfokú alapfüggvénnyel találkozunk a legritkábban, viszont annak transzformáltjával annál gyakrabban, mint azt az előző három mintapéldában is láttuk. Most megnézzük, hogy a különböző transzformációk hogyan befolyásolják az alapfüggvény grafikonját.

Módszertani megjegyzés: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár kiosztja minden csoportnak a 2. szakértői mozaikot (másodfokú függvények tulajdonságai, valamint a 6.– 8. mintapéldák). Egy csoporton belül az egyik tanuló a másodfokú függvény tulajdonságait (előző órai ismétlés), a másik az x tengely menti eltolásokat, a 3. az y tengely menti eltolásokat, a 4. pedig a zsugorítás/nyújtás részt kapja.

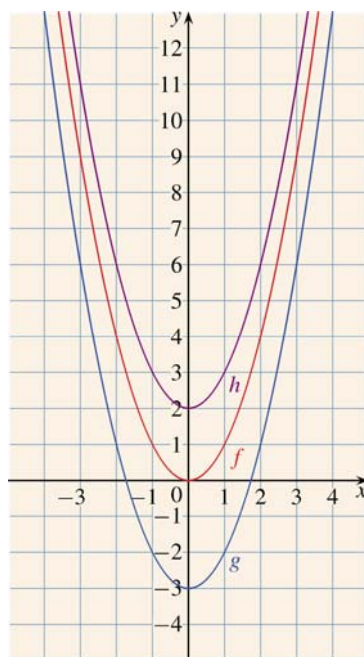
Az osztályon belül, akik ugyanazt a témát kapták, közös asztalhoz ülnek. Megbeszélik az anyagot, és vázlatot készítenek a füzetükbe. Ha elkészültek, visszamennek a csoportjukhoz. Mindenki elmagyarázza a saját részét a többieknek. Végül tanári irányítással összefoglalnak, és pontosítják a vázlatokat.

Mintapélda₉

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben, illetve értéktáblázattal az $f(x) = x^2$, a $g(x) = x^2 - 3$ illetve $h(x) = x^2 + 2$ függvények grafikonjait!

Megoldás:

Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot.

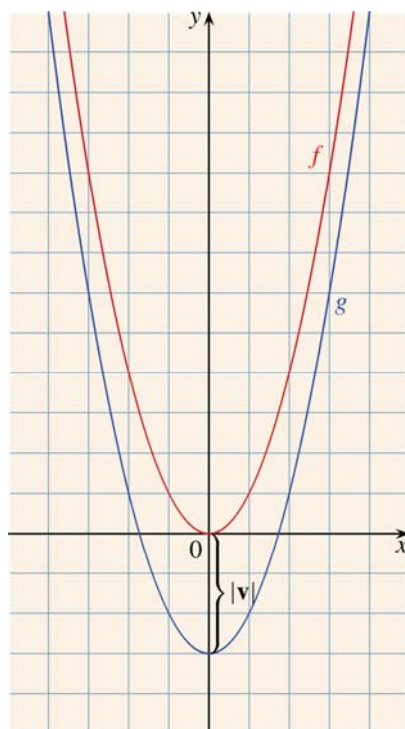


Összehasonlítjuk a megfelelő függvényértékeket:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	13	6	1	-2	-3	-2	1	6	13
$h(x)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Ha az f függvény értékeiből 3-at vonunk ki, akkor a g függvény értékeit kapjuk meg, ha pedig 2-t adunk hozzá, akkor a h függvény lesz az eredmény. Ez egyben a grafikon y tengely menti eltolását is jelent -3 illetve $+2$ egységgel.

Általánosságban: a $g(x) = x^2 + v$ („ v ” 0-ól különböző, tetszőleges valós szám) függvény grafikonját az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy f grafikonját eltoljuk az y tengely mentén $|v|$ egységgel $v < 0$ esetén lefelé, $v > 0$ esetén felfelé.

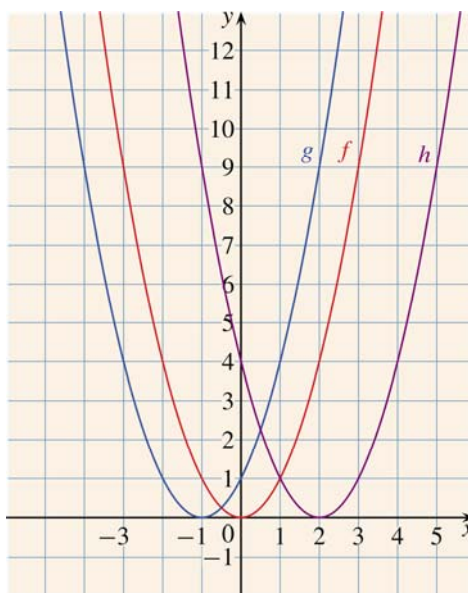


Mintapélda₁₀

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben illetve értéktáblázattal az $f(x) = x^2$, a $g(x) = (x+1)^2$, illetve a $h(x) = (x-2)^2$ függvények grafikonjait!

Megoldás:

Az ábrázoláshoz felhasználhatjuk az elkészített értéktáblázatot.



Összehasonlítjuk a megfelelő függvényértékeket:

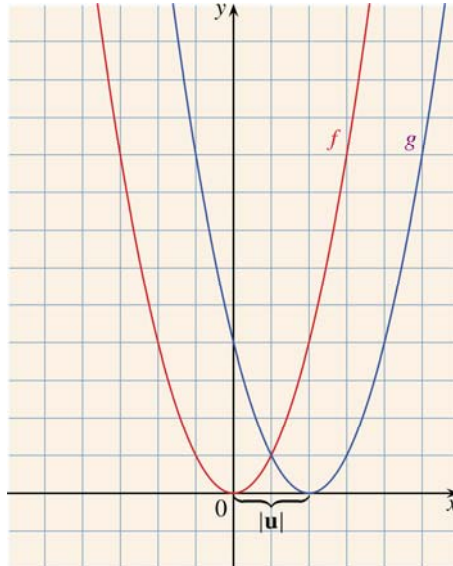
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9	16	25

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$h(x)$	36	25	16	9	4	1	0	1	4

Az értéktáblázatból látható, hogy a g függvény az értékeit 1 egységgel korábban veszi fel, mint az f függvény. Ez azt jelenti, hogy a g függvény grafikonját úgy kapjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy azt eltoljuk az x tengely mentén -1 egységgel, másképp fogalmazva negatív irányba 1 egységgel.

A h függvény az értékeit 2 egységgel később veszi fel, mint az f függvény. A h függvény grafikonját pedig az f függvény grafikonjának x tengely menti 2 egységgel, pozitív irányba történő eltolásával kapjuk meg.

Általánosságban: a $g(x) = (x + u)^2$ („ u ” 0-tól különböző tetszőleges valós szám) függvény grafikonját az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy f grafikonját eltoljuk az x tengely mentén $|u|$ egységgel „ u ” előjelével ellentétes irányba: $u < 0$ esetén pozitív, $u > 0$ esetén negatív irányba.

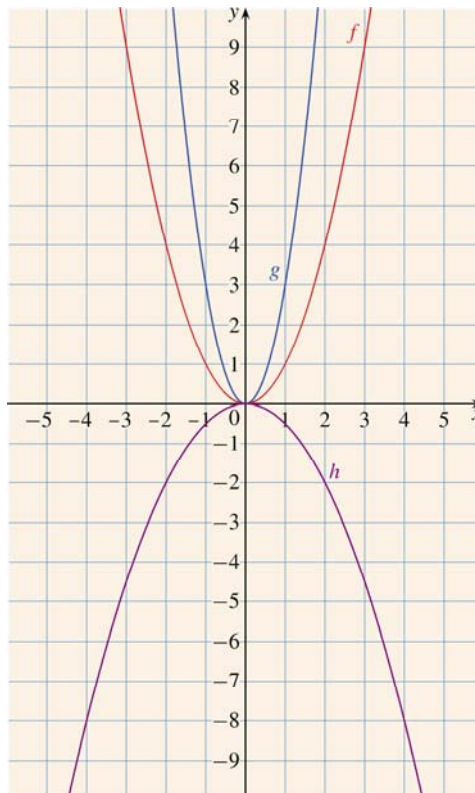


Mintapélda₁₁

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = 3x^2; \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

Megoldás:



Az f függvény értékeit 3-mal szorozva a g függvény megfelelő értékeit, míg $-\frac{1}{2}$ -del szorozva a h függvény megfelelő értékeit kapjuk meg.

Általánosan a függvény az $f(x) = a x^2$ hozzárendelési utasítással adható meg, ahol $a \neq 0$ valós számot jelöl.

Szemléletesen: ha az „ a ” *szorzótényező*

- 0 és 1 között van, akkor a másodfokú függvény grafikonja „szétnyílik”.
- 1-nél nagyobb, akkor a grafikon „szűkül”.
- negatív, akkor a grafikont az x tengelyre is tükrözzük.

Megjegyzés: Hozzárendelési utasítás alapján történő grafikon rajzolásánál segíthet, ha a felfelé nyíló parabolát mosolygós parabolának hívjuk, a lefelé nyílot pedig szomorú parabolának. Ezáltal gyerekek általában könnyebben megjegyzik az elnevezés és a főgyűthető közötti összefüggést: pozitív főgyűthető esetén mosolygós a parabola, negatív esetén pedig szomorú.

Módszertani megjegyzés a 2. – 4. feladatokhoz:

3. 8 Torpedójáték.

A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár kiválaszt a 2. – 4. feladatok közül nyolcat (személyenként kettőt). A csoportok legjobb tudásuk szerint megoldják a tanár által kijelölt példákat. Minden jó megoldásért adjunk 5 torpedót. Ezek után összegezzük, hogy melyik csoport hány lövéssel rendelkezik. A játékban a csoportok egy-egy hadiflottának a parancsnokai; céljuk az ellenfél flottájának elsüllyesztése. Az első teendő a flotta elhelyezése a bal oldali 10x10-es táblán úgy, hogy a többi csoport ne láthassa. Minden csoportnak 3 db 1-mezős, 2 db 2-mezős, 1-1 db 3, 4 és 5 mező nagyságú hajója van. Ügyeljünk arra, hogy az elhelyezett hajók ne érintsék egymást. Ha az összes csoport minden hajóját elhelyezte, megkezdődik a tényleges játék. Beszéljük meg, hogy melyik csoportnak melyik az ellenfele, majd kezdődhet az ütközet. A csoportok felváltva indítják a torpedóikat, és bemondják az éppen célzott mezőt (pl. C2). Válaszul az ellenfél bemondja, hogy sikeres volt-e a találat (pl.: nem talált, talált, süllyedt). A jobb oldali táblán



jelölhetik a csoportok az ellenfél flottájának elhelyezkedését. A játék nyertese az a csoport, aki előbb lövi ki az ellenfél összes hajóját.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Feladatok:

 6. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = x^2 - 3$; c) $f(x) = (x + 5)^2$;

d) $f(x) = (x - 3)^2$; e) $f(x) = 2x^2$; f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Megoldási útmutató: Ezek a függvények elemi transzformációkkal ábrázolhatók.

 7. Ábrázold koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

a) $f(x) = (x + 3)^2 + 2$; b) $f(x) = 2(x - 5)^2$; c) $f(x) = (x + 3)^2 - 5$;

d) $f(x) = 2x^2 - 6$; e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 6)^2$; f) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 1$.

Megoldási útmutató: Ezek a függvények elemi transzformációkkal ábrázolhatók.

 8. Ábrázold koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 3(x+3)^2 + 2; & \text{b) } f(x) &= \frac{1}{4}(x-5)^2 + 1; \\ \text{c) } f(x) &= -2(x+2)^2 - 3; & \text{d) } f(x) &= -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 1. \end{aligned}$$

Megoldási útmutató: Ezek a függvények elemi transzformációkkal ábrázolhatók.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokat a jobb képességű tanulók számára ajánljuk.



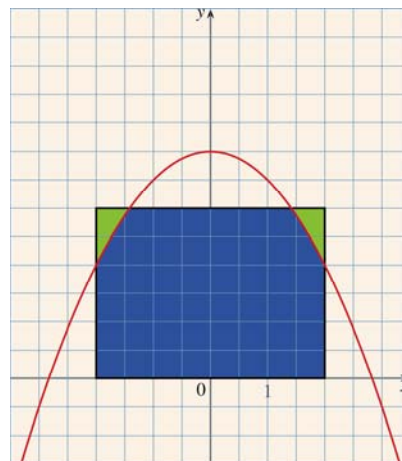
- 9.** Egy 4 m széles, 3 m magas kamion szeretne áthajtani az alagúton, mégpedig az autótút közepén haladva. Az alagút formája követi az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ másodfokú függvény grafikonját, ha az egység mindkét koordináta-tengelyen 1–1 méter. Át tud-e menni a kamion az alagúton?

Megoldás:

Az alagút 4 méteres belmagassága miatt elképzelhető, hogy a kamion át tudna menni. Az a kérdés, hogy a szélei is beférnek-e az alagútba. Mivel mind a kamion, mind az alagút szimmetrikus, így elegendő, ha a kamion szélességét megfeleztve csak a +2 helyen számoljuk ki az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ függvény helyettesítési értékét.

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4 = -2 + 4 = 2.$$

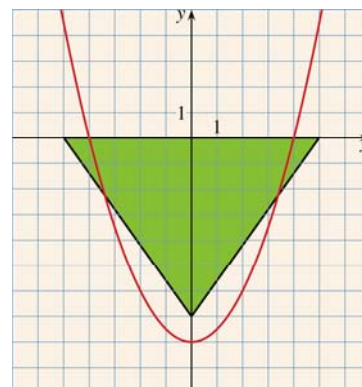
Mivel a kapott függvényérték kisebb, mint a kamion magassága, ezért az nem tud átmenni az alagúton.



- 10.** Egy tengerjáró hajó át szeretne kelni egy szoroson. A hajó 7 méterre süllyed a tenger szintje alá, a szélessége pedig 10 m a tengerszinten. Át tud-e kelni a hajó a szoroson, ha a tengerszoros medrének íve követi az $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$ függvény grafikonját, és az egység mindkét koordináta-tengelyen 1–1 méter?

Megoldás:


Mivel a hajó alja mindössze 7 méterrel van a víz alatt, így a szoros 8 méteres mélysége miatt biztosan át tudna kelni.



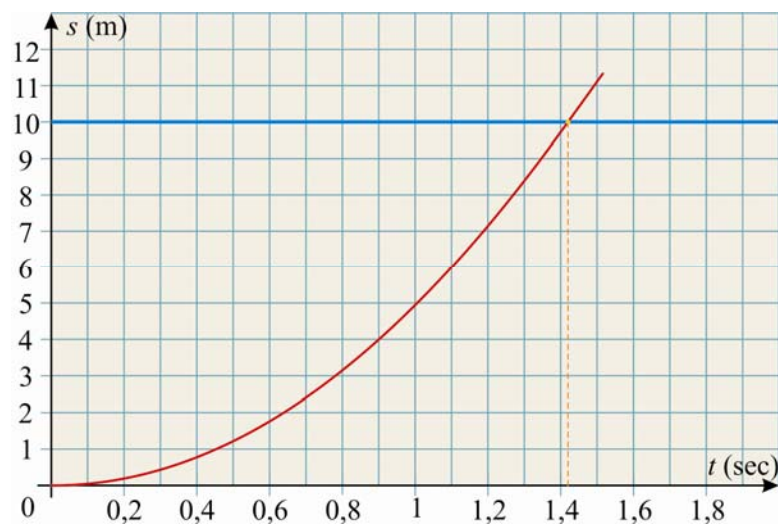
Az a kérdés, hogy a szoros elég széles-e ahhoz, hogy a hajó átférjen rajta.

Mivel a hajó és a szoros elhelyezkedése egyaránt tengelyesen szimmetrikus, így elegendő csak a fél távolságokat vizsgálnunk. A hajó esetén ez 5 métert jelent. Ha a szorost jelképező függvény értéke az $x=5$ helyen negatív, akkor a hajó át tud kelni rajta. Ha nullával egyenlő vagy pozitív, akkor nem.

$$f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 8 = \frac{25}{2} - \frac{16}{2} = \frac{9}{2} > 0. \text{ Tehát a hajó nem tud átkelni a szoroson.}$$

-  **11.** Egy műugró bajnok 10 m magasból ugrik a vízbe. Hány másodperce van a gyakorlata végrehajtására, mielőtt beleesne a vízbe? ($s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, ahol $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.)

Megoldás:



Itt szintén azokat a helyeket kell megkeresni, ahol a függvény felveszi a 10 értéket.

A zárójelben megadott képlet alapján $s = 10$; $t = ?$

Ezeket behelyettesítve kapjuk: $10 = \frac{9,81}{2} \cdot t^2$.

$$2,04 = t^2 \begin{cases} t_1 = \sqrt{2,04} \\ t_2 = -\sqrt{2,04} \end{cases}$$

Mivel eltelt időről van szó, így a negatív érték nem megoldás. Tehát a műugrónak 1,43 másodperce van, hogy elvégezze a gyakorlatát.

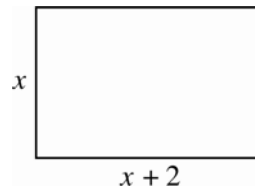
V. Másodfokú egyenletek és grafikus megoldásuk

Mintapélda₁₂

Péter a lakásában a nagyobbik szobájának padlóját padlószőnyeggel szeretné lefedni. Viszont elfelejtette a szoba méreteit. Csak arra emlékszik, hogy a szoba hossza 2 méterrel nagyobb, mint a szélessége, és a szoba területe 15 m^2 . Mekkora az oldalai?

Megoldás:

A szoba x méter széles, és $x + 2$ méter hosszú. A területe $x(x + 2)$, ami $15 \text{ (m}^2\text{)}$.



$$x(x + 2) = 15$$

A zárójelfelbontás után kapjuk: $x^2 + 2x = 15$.

Egy **másodfokú egyenletet** kaptunk, mert az ismeretlen második hatványon is szerepel benne.

Feltehetjük úgy is a feladatban szereplő kérdést, hogy melyik az a két szám, amelynek különbsége 2, és szorzata 15. Bontsuk kéttényezős szorzatokra a 15-öt!

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$$

Hamar megkapjuk a megoldást, ami 3 és 5. A szoba 5 méter hosszú és 3 méter széles.

Találgatás közben feltételeztük, hogy a szoba hossza egész szám, és a megoldásnak csak pozitív szám esetén van értelme.

Most fogalmazzuk meg másképp a problémát!

Mintapélda₁₃

Keressük azokat a számokat, amelyek különbsége 2, és szorzatuk 15.

Megoldás:

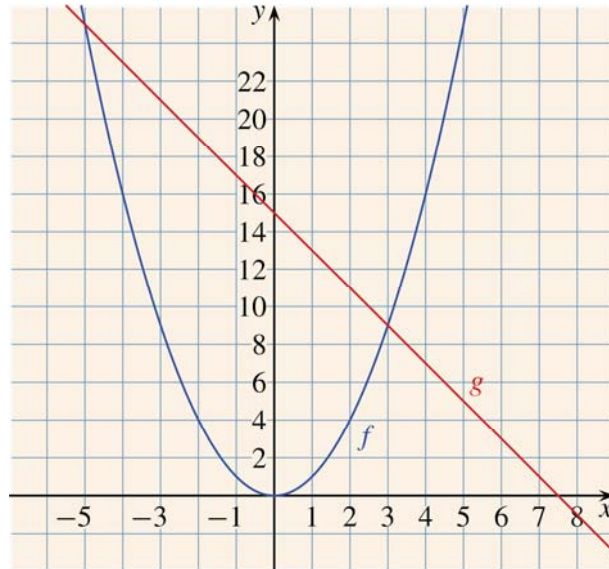
Az előző feladat alapján a megoldandó egyenlet:

$$x(x + 2) = 15 \Rightarrow x^2 + 2x = 15$$

Ezúttal x tetszőleges valós szám lehet. A találgatás hosszadalmas lenne, és nem biztos, hogy minden megoldást megtalálnánk. Más módszerre lenne szükség. Próbáljuk meg grafikusan megoldani!

Grafikus megoldáskor függvényeket képezünk, és azok grafikonját készítjük el. Külön az x^2 függvényt már tudjuk ábrázolni, és a lineáris függvény ábrázolása sem okozhat problémát. Ezért rendezzük át az egyenletet $x^2 = -2x + 15$ alakra.

Ekkor az egyik ábrázolandó függvény az $f(x) = x^2$, a másik pedig a $g(x) = -2x + 15$.



Olvassuk le az x tengelyről a metszéspontok helyét!

A két megoldás: $x_1 = 3$; $x_2 = -5$

Módszertani megjegyzés: Minden csoportba osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint! A csoportok kapjanak sorszámokat is. Szétváljanak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, az azonos betűsök dolgoznak most együtt.

3.2 kártyakészlet

1	2	3	4	A	B	C	D
5	6	7	8	A	B	C	D
				A	B	C	D
				A	B	C	D

A tanár a 12., 13., 14. és 15. feladatokból kijelöl egyet-egyét. Ha elkészültek a csoportok, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja feladatának a megoldását.

A csoporton belül összekeverik az A, B, C, D jelű kártyákat, mindenki húz egyet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoportszámát és betűjelét kihúzza a tanár.

Feladatok:

„A” jelűek feladata:



12. Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - 2x = 0; & \text{b) } x^2 - 9 = 0; & \text{c) } (x - 3)^2 = 0; \\ \text{d) } -2(x + 1)^2 = 0; & \text{e) } x^2 = -1; & \text{f) } 3 = -(x + 2)^2. \end{array}$$

Megoldás:

Az egyenletek jobb, illetve bal oldalát egy-egy függvény hozzárendelési utasításának tekintjük. Az így kapott függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A grafikonról a megoldások leolvashatók:

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } x_1 = 0; x_2 = 2; & \text{b) } x_1 = 3; x_2 = -3; & \text{c) } x = 3; & \text{d) } x = -1; & \text{e) } \text{nincs megoldás;} \\ \text{f) } \text{nincs megoldás.} & & & & & \end{array}$$

„B” jelűek feladata.



13. Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 + 2x + 1 = 0; & \text{b) } (x + 2)^2 = 4x; & \text{c) } x^2 - 2x + 1 = 1; \\ \text{d) } x^2 = 4x - 3; & \text{e) } x^2 + 1 = -4x - 3; & \text{f) } x^2 - x = 6. \end{array}$$

Megoldás:

Az egyenletek jobb illetve bal oldalát egy-egy függvény hozzárendelési utasításának tekintjük. A c), e) és f) feladatokban az alábbi átalakítások végezhetőek el:

$$\text{a) } (x+1)^2 = 0; \quad \text{c) } x^2 - 2x = 0; \quad \text{e) } x^2 = -4x - 4; \quad \text{f) } x^2 = x + 6.$$

Az így kapott függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A grafikonról a megoldások leolvashatók:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x = -1; & \text{b) } \text{nincs megoldás;} & \text{c) } x_1 = 0; x_2 = 2; & \text{d) } x_1 = 1; x_2 = 3; \\ \text{e) } x = -2; & \text{f) } x_1 = 3; x_2 = -2. & & \end{array}$$

„C” jelűek feladata:



14. Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - x + 1 = 0; & \text{b) } (x - 3)^2 + 2 = x + 1; & \text{c) } x^2 + 1 = -x^2 + 1; \\ \text{d) } (x + 1)^2 = -(x + 1)^2; & \text{e) } (x + 1)^2 = -x^2 + 1; & \text{f) } -(x + 1)^2 = x^2 + 1. \end{array}$$

Megoldás:

Eljárhatunk az 1. feladatban ismertetett módon, vagy elvégezzük a kijelölt műveleteket.

Ez utóbbi esetben az egyenletek a következőképpen alakulnak:

a) változatlan marad; b) $x^2 - 7x + 10 = 0$; c) $2x^2 = 0; \Rightarrow x^2 = 0$;

d) $2(x+1)^2 = 0; \Rightarrow (x+1)^2 = 0$; e) $2x^2 + 2x = 0; \Rightarrow x^2 + x = 0$;

f) $-2x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$.

A megoldások: a) nincs megoldás; b) $x_1 = 5; x_2 = 2$; c) $x = 0$; d) $x = -1$;

e) $x_1 = 0; x_2 = -1$; f) nincs megoldás.

„D” jelűek feladata:



15. Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket. A d), e) és f) feladatokban állapítsd meg, melyik két egész szám közé esik a megoldás!

a) $(x - 1)(x + 2) = 0$; b) $x(x + 2) = 0$; c) $2(x + 3)(x - 3) = 0$;

d) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$; e) $x^2 - 5 = 0$; f) $10x^2 - 3x - 1 = 0$.

Megoldás:

Az a), b) és c) feladatban elvégezzük a kijelölt műveleteket:

a) $x^2 + x - 2 = 0$; b) $x^2 + 2x = 0$; c) $2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$.

A megoldások: a) $x_1 = 1; x_2 = -2$; b) $x_1 = 0; x_2 = -2$; c) $x_1 = 3; x_2 = -3$;

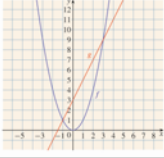
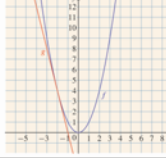
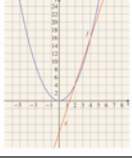
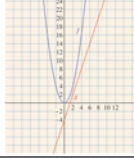
d) $x_1 \in (-1; 0); x_2 = 1$; e) $x_1 \in (2; 3); x_2 \in (-3; -2)$; f) $x_1 \in (0; 1); x_2 \in (-1; 0)$.

Módszertani megjegyzés: Feldarabolt négyzetek módszere.

A tanulók továbbra is 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden asztalra kiteszi összekeverve a 16 db kártyából álló **3.3 kártyakészletet**. A tanulók maradéktalanul szétosztják egymás között a paklit. Feladatuk az összetartozó négyesek megkeresése. A kártyáikat nem mutathatják meg egymásnak. Egymással nem beszélhetnek, nem nyúlhatnak át a másikhoz. A felesleges kártyát az asztal közepére tehetik ki, és onnan is vehetik el, ha szükséges.

Összetartozó négyest alkotnak az egyenletet, a neki megfelelő grafikont, a megoldások számát és a megoldásokat tartalmazó kártyák.

3.3 kártyakészlet

$x^2 - 2x - 3 = 0$		$x^2 + 4x + 4 = 0$	
2 megoldás	$x_1 = -1; x_2 = 3$	1 megoldás	$x = -2$
$x^2 - 6x + 8 = 0$		$x^2 - 3x + 4 = 0$	
2 megoldás	$x_1 = 2; x_2 = 4$	0 megoldás	nincs ilyen valós szám

VI. Hiányos másodfokú egyenletek megoldása nevezetes azonosságok alkalmazásával

A grafikus megoldás kapcsán többfajta másodfokú egyenlettel is találkoztunk. Általánosságban véve:

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenleteket **másodfokú egyenleteknek** nevezzük, ahol a , b és c tetszőleges valós számok, és $a \neq 0$.

Amikor kis számokkal dolgozunk, vagy a megoldások könnyen és pontosan leolvashatók a grafikonról, akkor a megfelelő grafikonok elkészítésével könnyen megkapjuk a megoldásokat. A grafikus megoldás szemléletesen megmutatja a megoldások számát.

A 11. feladatban viszont elsősorban olyan példákat láthatunk, amelyeket algebrai úton könnyebb megoldani. Az algebrai megoldás a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és a gyökvonás megfelelő sorrendben történő alkalmazását jelenti. Általa tetszőleges egyenlet pontos megoldását kapjuk meg.

Ahogy a cím is jelzi, egyelőre csak egyszerűbb egyenletekkel foglalkozunk. Olyanokkal, amelyekből vagy az elsőfokú x -es tag, vagy a konstans tényező hiányzik, illetve valamilyen nevezetes azonosság alkalmazásával szinte azonnal megkapjuk a megoldást.

Az előbbieket hiányos másodfokú egyenleteknek nevezzük.

Az $ax^2 + c = 0$, illetve az $ax^2 + bx = 0$ alakú egyenleteket **hiányos másodfokú egyenleteknek** nevezzük, ahol a , b és c tetszőleges valós számok, és $a \neq 0$.

Módszertani megjegyzés: Szakértői mozaik

A tanulók 4 fős csoportokat alkotnak. Egy csoporton belül mindenki kap egy számot a **3.4 kártyakészletből**. Akik ugyanazt a sorszámot kapták, csoportjukból kiválva közös asztalhoz ülnek, és megbeszélik az adott sorszámú mintapélda megoldását. Ha végeztek, visszaülnek a csoportjukhoz, és elmagyarázzák a többieknek a feladatuk megoldását.

3.4 kártyakészlet

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

Először egy olyan hiányos másodfokú egyenletet oldunk meg, amelyből az elsőfokú tag hiányzik.

Mintapélda₁₄

Oldjuk meg $2x^2 - 6 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A megoldandó egyenlet:	$2x^2 - 6 = 0$	$ax^2 + c = 0$
Az egyenletet átrendezve kapjuk:	$2x^2 = 6$	$ax^2 = -c$
Mindkét oldalt elosztjuk x^2 együtthatójával:	$x^2 = 3$	$x^2 = -\frac{c}{a}$
Vonjunk gyököt mindkét oldalból!	$x_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$ $x_2 = -\sqrt{3} \approx -1,73$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

A jobb oldali levezetésből a megoldások száma is leolvasható:

- ha $-\frac{c}{a} \geq 0$, akkor az egyenletnek két megoldása van.
- ha $c = 0$, akkor az egyenletnek 1 megoldása van, mégpedig az $x = 0$.
- ha $-\frac{c}{a} < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, mivel nincs olyan szám, amelynek a négyzete negatív.

A következő mintapéldában egy olyan hiányos másodfokú egyenlettel találkozunk, amelyből a konstans tag hiányzik.

Mintapélda₁₅

Oldjuk meg az $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A megoldandó egyenlet:	$\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$	$ax^2 + bx = 0$
Emeljük ki x -et!	$x\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 0$	$x(ax + b) = 0$
Egy szorzat értéke akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.		
Első tényező értéke 0:	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
Második tényező értéke 0:	$\frac{1}{2}x + 3 = 0$ $x_2 = -6$	$ax + b = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$

A jobb oldali levezetésből a megoldások száma is leolvasható:

- ha $b = 0$, akkor egyetlen megoldás van, mégpedig az $x = 0$.
- különben mindig két megoldás van: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

A 16. mintapélda olyan másodfokú egyenletet tartalmaz, amelynek megoldását az teszi egyszerűvé, hogy a kifejezés felírható két tényező különbségének (összegének) négyzeteként.

Mintapélda₁₆

Oldjuk meg $x^2 - 6x + 9 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A megoldandó egyenlet:	$x^2 - 6x + 9 = 0$	$x^2 + 2kx + k^2 = 0, k \in \mathbf{R}$
Írjuk fel a kifejezést két tényező összegének / különbségének négyzeteként!	$(x - 3)^2 = 0$	$(x + k)^2 = 0$
A megoldás:	$x = 3$	$x = -k$

Látható, hogy az ilyen típusú egyenleteknek mindig pontosan egy megoldásuk van.

A 17. mintapéldában olyan speciális hiányos másodfokú egyenlettel találkozunk, amelyet kétféleképpen is megoldhatunk. Egyik megoldással már találkoztunk az első mintapéldában, a másik megoldást az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosság alkalmazása adja.

Mintapélda₁₇

Oldjuk meg a $3x^2 - 27 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A megoldandó egyenlet:	$3x^2 - 27 = 0$	$ax^2 - c = 0$
Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk x^2 együtthatójával.	$x^2 - 9 = 0$	$x^2 - \frac{c}{a} = 0$
Alkalmazzuk az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságot!	$(x + 3)(x - 3) = 0$	$\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 0$
Egy szorzat értéke akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.		
Első tényező értéke 0:	$x + 3 = 0$ $x = -3$	$x + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$ $x = -\sqrt{\frac{c}{a}}$
Második tényező értéke 0:	$x - 3 = 0$ $x = 3$	$x - \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$

A jobb oldali levezetésből a megoldások száma is leolvasható:

- ha $\frac{c}{a} \geq 0$, akkor az egyenletnek két megoldása van.
- ha $c = 0$, akkor az egyenletnek 1 megoldása van, mégpedig az $x = 0$.
- ha $\frac{c}{a} < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, mivel nincs olyan szám, amelynek a négyzete negatív.

Módszertani megjegyzés: Matematikai TOTÓ. Minden tanuló egyedül dolgozik a feladatokon. Ha letelt az idő, vagy elkészültek a tanulók, akkor mindenki átadja a padtársának a füzetét, aki a feladatok megbeszélése alapján kijavítja a TOTÓ-t. A hibátlan kitöltőket megjutalmazhatjuk.

Feladatok:

 **16.** Töltsd ki a következő TOTÓ szelvényt!

	Egyenletek	A	B	C
1	$1 - x^2 = 0$	$x = 1$	nincs megoldása	$x_1 = 1; x_2 = -1$
2	$2x^2 + 6 = 0$	$x = -3$	nincs megoldása	$x_1 = 3; x_2 = -3$
3	$14x^2 - 21x = 0$	$x_1 = 0; x_2 = 7$	$x_1 = 0; x_2 = \frac{3}{2}$	$x_1 = 2; x_2 = 3$
4	$x^2 + 10x + 25 = 0$	nincs megoldása	$x = -5$	$x = 5$
5	$2x^2 + 5x = 0$	$x_1 = 0; x_2 = -2,5$	$x_1 = 2; x_2 = 5$	$x = 0$
6	$(x + 3)(x - 8) = 0$	$x_1 = 3; x_2 = -8$	$x_1 = -3; x_2 = 8$	$x_1 = -3; x_2 = -8$
7	$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$	$x_1 = \sqrt{2};$ $x_2 = -\sqrt{2}$	$x = 2$	$x = -2$
8	$x^2 + x + 0,25 = 0$	nincs megoldása	$x = 1$	$x = -0,5$
9	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	$x_1 = 2; x_2 = -3$	nincs megoldása	$x = 1,5$
10	$25x^2 - 9 = 0$	$x_1 = 0,6;$ $x_2 = -\frac{3}{5}$	$x_1 = \frac{5}{3};$ $x_2 = -\frac{5}{3}$	$x_1 = 3;$ $x_2 = -3$
11	$-2x(5x + 3) = 0$	$x_1 = 2; x_2 = -3$	$x_1 = 0; x_2 = -0,6$	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{5}{3}$
12	$x^2 - \frac{1}{2} = 0$	$x = 0,5$	$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$ $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	nincs megoldása
13	$\left(\frac{5}{8}x - 1\right)^2 = 0$	$x = 1$	$x_1 = 1; x_2 = -1,6$	$x = 1,6$
+1	$\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 = 0$	$x = \frac{3}{2}$	nincs megoldása	$x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = -\frac{2}{3};$

Megoldás:

1 – C; 2 – B; 3 – B; 4 – B; 5 – A; 6 – B; 7 – A; 8 – C; 9 – C;
10 – A; 11 – B; 12 – B; 13 – C; +1 – A.

VII. Másodfokú egyenletek megoldása

Különböző hétköznapi problémák kapcsán találkoztunk másodfokú egyenletekkel. Megpróbáltuk megoldani őket korábbi ismereteink alapján. Kezdtük találgatással, de rájöttünk, hogy ez csak speciális esetekben működik, és nem biztos, hogy mindegyik megoldást megkapjuk vele. Folytattuk grafikusan, de ott, ha nem egész szám az eredmény, vagy túl nagy számokkal dolgozunk, szintén nem kapunk pontos megoldást. Így az algebrai utat választottuk. Láttuk, hogyha az egyenlet speciális alakú, akkor hatékony eszközeink vannak a megoldására. De még mindig kérdés, hogyan oldhatunk meg egy teljesen általános másodfokú egyenletet.

Másodfokú egyenlet megoldása teljes négyzetté alakítással

Korábban láttuk, hogy ha az egyenlet 0-ra rendezett alakban felírható két kifejezés négyzetének különbségéként, akkor alkalmazva az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ azonosságot, máris adódik a megoldás. A négyzetes tagok felírásához pedig használhatjuk az $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ azonosságot.

Alkalmazzuk meglévő ismereteinket!

Mintapélda₁₈

Oldjuk meg az $x^2 + 8x - 33 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Célunk felírni az egyenlet bal oldalát két kifejezés négyzetének különbségéként.

Az $x^2 + 8x$ lehetne egy kéttagú kifejezés négyzetének első két tagja is:

Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ azonosságból az $a^2 + 2ab$ ismert. Most $a^2 = x^2$ -nek és $2ab = 8x$ -nek felel meg. Az elsőből adódik, hogy az $a = x$; a másodikból pedig (mivel a értékét már ismerjük) kapjuk, hogy a $b = 4$.

Így megkaptuk az a -t és a b -t. Nézzük meg, mivel egyenlő összegük négyzete!

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

A fenti egyenletben írjunk $x^2 + 8x$ helyébe $(x + 4)^2$ -t! Ekkor az egyenlet bal oldalát megnöveltük 16-tal, hiszen $x^2 + 8x$ helyébe $x^2 + 8x + 16$ -ot írtunk. Hogy ne boruljon fel az egyenlőség, vonjunk ki a bal oldalból 16-ot. (A kifejezés legvégén álló -33 -hoz nem nyúlunk hozzá.) Tehát

$$(x + 4)^2 - 16 - 33 = 0,$$

ebből $(x + 4)^2 - 49 = 0$. Ez nem más, mint $(x + 4)^2 - 7^2 = 0$.

Sikerült a célnak megfelelően átalakítani az egyenletet. Most már alkalmazható az azonosság:

$$(x + 4 + 7)(x + 4 - 7) = 0,$$

ebből $(x + 11)(x - 3) = 0$.

Egy szorzat értéke akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezőjének értéke 0. Ezért

$$\text{ha } x + 11 = 0, \text{ akkor } x_1 = -11;$$

$$\text{ha } x - 3 = 0, \text{ akkor } x_2 = 3.$$

Vagyis a másodfokú egyenletünknek két megoldása van: $x_1 = -11$ és $x_2 = 3$.

Ellenőrizzük, hogy a kapott értékek valóban az egyenlet megoldásai-e!

$$x_1 = -11 \text{ esetben: } (-11)^2 + 8 \cdot (-11) - 33 = 121 - 88 - 33 = 0;$$

$$x_2 = 3 \text{ esetben } 3^2 + 8 \cdot 3 - 33 = 9 + 24 - 33 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az fenti eljárás kicsit hosszadalmas, de majd találkozunk olyan problémákkal, amikhez ezzel kapjuk meg leggyorsabban a megoldást.

Ezt az eljárást általánosították az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenletre, melyben a , b , c tetszőleges valós paraméterek, és $a \neq 0$. Bebizonyítható, hogy az egyenlet megoldásait az

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ és}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

képletek adják. A két képletet össze is vonhatjuk:

A másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A megoldóképlet segítségével csupán az együtthatók behelyettesítésével megkapjuk az egyenlet gyökeit, ha azok léteznek.

A megoldások száma, illetve létezése nyilvánvalóan attól függ, hogy milyen előjelű szám áll a számlálóban a gyökjel alatt.

A gyökjel alatti kifejezést nevezzük az egyenlet **diszkriminánsának**. Jele: **D**

$$D = b^2 - 4ac$$

Ha **D > 0**, akkor **két megoldás** van.

Ha **D = 0**, akkor **egy megoldás** van.

Ha **D < 0**, akkor pedig **nincs megoldás**.

Mintapélda₁₉

Oldjuk meg megoldóképlet használatával a $3x^2 + 7x - 5 = 0$ egyenletet!

Megoldás:

Megjegyzés: Ha az egyenlet nem $ax^2 + bx + c = 0$ alakú, akkor első lépésként ilyen alakra hozzuk. Állapítsuk meg a , b , és c értékeit!

$a = 3$, mert x^2 szorzótényezője 3; $b = 7$, mert x szorzótényezője +7;

$c = -5$, mert a konstans tag -5 (**a paraméterek megállapításakor figyelembe vesszük a szám előtti műveleti jelet is**).

Helyettesítsünk be a képletbe!

$$x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 60}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{109}}{6} \approx \frac{-7 \pm 10,44}{6},$$

$$\text{ebből } x_1 = \frac{-7 + 10,44}{6} = 0,5733;$$

$$x_2 = \frac{-7 - 10,44}{6} = -2,9067.$$

Visszahelyettesítéssel ellenőrizzük a megoldásokat!

$$\text{Ha } x_1 = 0,5733, \text{ akkor } 3 \cdot 0,5733^2 + 7 \cdot 0,5733 - 5 = -0,00088;$$

$$\text{ha } x_2 = -2,9067, \text{ akkor } 3 \cdot (-2,9067)^2 + 7 \cdot (-2,9067) - 5 = -0,000185.$$

Mivel a gyökvonás eredménye egy végtelen, általában nem szakaszos tizedestört, ezért az egyenlet két megoldása csak közelítő érték. Ezeket a közelítő értékeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe, az is csak közelítően teljesül. Mivel tízezred nagyságrendű az eltérés, ezért a megoldásokat elfogadjuk.

Ha a gyökvonás előtti értékeket, jelen esetben a $\frac{-7 \pm \sqrt{109}}{6}$ -ot helyettesítenénk vissza az egyenletbe, akkor, ha jól számolunk, pontos értékeket kapunk.

A 17., 18., 19. és 20. feladatok differenciált gyakorlási lehetőséget biztosítanak. A tanulók itt 2 fős homogén csoportokban dolgoznak. Megoldanak 1–1 példát, majd ellenőrzik egymás megoldását. Utána következhet a Dominó játék, ahol már 4 fős heterogén csoportokban oldják meg az egyenleteket.

Módszertani megjegyzés:

A tanulók 4 fős csoportokban játszanak. A dominókon (**3.9 dominókészlet**) másodfokú egyenletek találhatók. Minden tanuló választ 2 dominót. A csoportok feladata a lenti alakzat kirakása a jelzett irányoknak megfelelően. Azok az egyenletek kerülhetnek egymás mellé, amelyeknek ugyanaz a megoldása. A legügyesebb csoportot jutalmazhatjuk.

De természetesen más kirakási forma és irány is megadható. Aki nem szeretne dominózni, differenciált csoportmunkában is kiadhatja a feladatokat.

3.9 dominó

$(5x-1)(2x+1)=0$	$x^2+2x=0$	$(x+1)^2=1$	$x^2-x-6=0$
$(x-0,5)^2-6,25=0$	$x^2+4x-21=0$	$(x+3)(x+1)=24$	$x^2-6x+8=0$
$x^2+x+1=0$	$\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$	$x^2+4x+4=0$	$x^2+2x+2=0$
$x^2+4x-5=0$	$x(x+4)=-4$	$10x^2+3x-1=0$	$-2x^2-3x=5x-10$

Megoldás:

$(5x-1)(2x+1)=0$ és $10x^2+3x-1=0$ egyenletek megoldásai: $x_1=0,2$; $x_2=-0,5$.

$x^2+2x=0$ és $(x+1)^2=1$ egyenletek megoldásai: $x_1=0$; $x_2=-2$.

$x^2-x-6=0$ és $(x-0,5)^2-6,25=0$ egyenletek megoldásai: $x_1=3$; $x_2=-2$.

$x^2+4x-21=0$ és $(x+3)(x+1)=24$ egyenletek megoldásai: $x_1=3$; $x_2=-7$.

$x^2-6x+8=0$ és $\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$ egyenletek megoldásai: $x_1=4$; $x_2=2$.

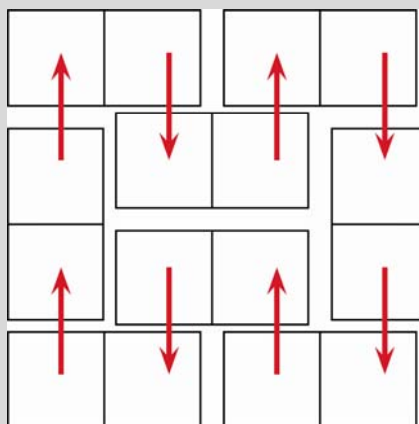
$x^2+x+1=0$ és $x^2+2x+2=0$ egyenleteknek nincsen megoldásuk.

$x^2 + 4x + 4 = 0$ és $x(x + 4) = -4$ egyenletek megoldása: $x = -2$.

$x^2 + 4x - 5 = 0$ és $-2x^2 - 3x = 5x - 10$ egyenletek megoldásai: $x_1 = 1$; $x_2 = -5$.

$(5x-1)(2x+1)=0$	$x^2+2x=0$	$(x-0,5)^2-6,25=0$	$x^2+4x-21=0$
$10x^2+3x-1=0$	$(x+1)^2=1$	$x^2-x-6=0$	$(x+3)(x+1)=24$
$-2x^2-3x=5x-10$	$x^2+4x+4=0$	$x^2+2x+2=0$	$x^2-6x+8=0$
$x^2+4x-5=0$	$x(x+4)=-4$	$x^2+x+1=0$	$\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$

A kirakás iránya:



Feladatok:



17. Oldd meg megoldóképlet segítségével a következő egyenleteket!

- a) $x^2 + 12x + 35 = 0$; b) $x^2 + 3x - 4 = 0$; c) $-x^2 + 6x - 5 = 0$;
 d) $x^2 - 8x + 25 = 0$; e) $x^2 - 8x + 16 = 0$; f) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Megoldás:

- a) $x_1 = -5$; $x_2 = -7$; b) $x_1 = 1$; $x_2 = -4$; c) $x_1 = 5$; $x_2 = 1$; d) nincs megoldása;
 e) $x = 4$; f) $x_1 = 5$; $x_2 = -2$.



18. Oldd meg megoldóképlet segítségével a következő egyenleteket!

a) $x^2 + 1 = -2,5x$; b) $2x^2 - 7x = -6$; c) $4x^2 - 13x + 5 = -5$;
 d) $5x^2 - x + 3 = 0$; e) $-5x^2 = 2x - 11$; f) $3x^2 + 5x - 4 = 0$.

Megoldás:

a) $x_1 = -2$; $x_2 = -0,5$; b) $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{3}{2}$; c) $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{5}{4}$; d) nincs megoldása;
 e) $x_{1,2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{14}}{-5}$; f) $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{6}$.



19. Oldd meg megoldóképlet segítségével a következő egyenleteket!

a) $(x + 5)(x + 14) = 400$; b) $(x + 3)(2x + 7) + 10 = 0$; c) $(3x + 8)(2x - 1) = 6$.

Megoldás: a) $x_1 = 11$; $x_2 = -30$; b) nincs megoldása; c) $x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{505}}{12}$.

Módszertani megjegyzés a 20. feladathoz:

A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár kijelöl 8 példát, amit a tanulók egymás közt szétosztva megoldanak, majd összegyűjtik a megoldásokat. A csoportok kijelölnek egy szóvivőt, aki kézfeltartással jelzi, hogy a csoport elkészült. Ha minden csoport megadta a készenléti jelet, a tanár elkezd felolvasni a példákat. A szóvivő az összesített megoldások alapján ökölbe szorított kézzel jelzi, ha a másodfokú egyenletnek nincs megoldása, 1 ujjat mutat, ha egy megoldása van, és 2 ujjat mutat, ha két megoldás van. Minden példa elhangzása után megbeszélik az eredményeket, ha szükséges.



20. Állapítsd meg az egyenletek megoldása nélkül a megoldások számát (0, 1, 2 megoldás lehetséges)!

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$; b) $x^2 - 12x + 36 = 0$; c) $2x^2 + 3x + 5 = 0$;
 d) $x^2 - 4x + 5 = 0$; e) $x^2 + 17x + 15 = 0$; f) $-2x^2 + 6x + 9 = 0$;
 g) $x^2 + 2x + 3 = 0$; h) $x^2 - 6x + 10 = 0$; i) $12x = x^2 + 4$;
 j) $-x + 3 - 7x^2 = 0$; k) $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0$; l) $4x^2 + 9 - 12x = 0$.

Megoldás:

a) $D > 0$; 2 megoldás; b) $D = 0$; 1 megoldás; c) $D < 0$; nincs megoldás;

- d) $D < 0$; nincs megoldás; e) $D > 0$; 2 megoldás; f) $D > 0$; 2 megoldás;
g) $D < 0$; nincs megoldás; h) $D < 0$; nincs megoldás; i) $D > 0$; 2 megoldás;
j) $D > 0$; 2 megoldás; k) $D = 0$; 1 megoldás; l) $D = 0$; 1 megoldás.

VIII. Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok

A másodfokú egyenletek megoldásához most már minden eszköz rendelkezésre áll. Ebben a fejezetben olyan szöveges feladatokkal találkozunk, amelyekben hasznosítani is tudjuk ezeket.

Mintapélda₂₀

Egy szoba egyik oldala 1,5 m-rel hosszabb a másiknál. A szoba területe $17,5 \text{ m}^2$. Hány méter szegő szükséges a parkettához, ha a 90 cm széles ajtóhoz nem teszünk szegőt?

Megoldás:

A szoba egyik oldala:	x
A másik oldala 1,5 m-rel hosszabb:	$x + 1,5$
A szoba területe $17,5 \text{ m}^2$	$17,5 = x(x + 1,5)$
Annyi szegő kell, amekkora a szoba kerülete, mínusz 0,9 m.	$K - 0,9$

Oldjuk meg a $17,5 = x(x + 1,5)$ egyenletet!

Felbontjuk a zárójelet: $17,5 = x^2 + 1,5x$.

Nullára rendezünk: $0 = x^2 + 1,5x - 17,5$.

Alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a = 1; b = 1,5; c = -17,5;$$

$$x_{1;2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17,5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 70}}{2} = \frac{-1,5 \pm 8,5}{2};$$

$$x_1 = \frac{-1,5 + 8,5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5;$$

$$x_2 = \frac{-1,5 - 8,5}{2} < 0 \Rightarrow \text{nem megoldás.}$$

A szoba egyik oldala 3,5 m, a másik $3,5 \text{ m} + 1,5 \text{ m} = 5 \text{ m}$ hosszú.

A kerülete $K = 2 \cdot (3,5 + 5) \text{ m} = 17 \text{ m}$.

$K - 0,9 \text{ m} = 16,1 \text{ m}$. A szobához 16,1 m szegő szükséges.

Módszertani megjegyzés: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár kijelöl 4 különböző feladatot. Akik ugyanazt a példát kapták, közösen megoldják a feladatukat, és meggyőződnek arról, hogy mindenki megértette. Majd visszamennek eredeti csoportjukhoz, és elmagyarázzák egymásnak a megoldásokat. A tanár találomra kihív 4 tanulót a táblához, akik ott is megoldják a feladatokat. Végül ellenőrzik a megoldásokat.

Feladatok:



21. Két szám szorzata 60. Egyik szám 7-tel kisebb a másiknál. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

Az egyik szám x , a másik $x - 7$. Ekkor $x(x - 7) = 60 \Rightarrow x^2 - 7x - 60 = 0$.

A keresett számok az 5 és a 12.



22. Két szám összege 13, szorzatuk 42. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

Az egyik szám x , a másik $13 - x$. Ekkor $x(13 - x) = 42 \Rightarrow -x^2 + 13x - 42 = 0$.

A keresett számok a 6 és a 7.



23. Egy háromszög magassága 1,4-szerese a hozzá tartozó oldalának. A háromszög területe 70 területetegység. Mekkora a háromszögnek ez az oldala?

Megoldás:

A háromszög egyik oldala x , a magassága $1,4x$.

$T = \frac{x \cdot 1,4x}{2} = 70, 1,4x^2 = 140 \Rightarrow x = 10$. A háromszög keresett oldala 10 egység.



24. Egy kert egyik oldala 70 méterrel kisebb a másik oldalánál. A területe 26000 m².
Hány méter dróra van szükség a körülkerítéséhez?

Megoldás:

A kert egyik oldala x , a másik oldala $x - 70$.

Ekkor $T = 26000 = x(x - 70) \Rightarrow x^2 - 70x - 26000 = 0$.

A kert oldalai 130 és 200 m hosszúak, bekerítéséhez 660 m dróra van szükség.



25. Egy négyzet alapú strandmedence 1,5 m mély. Úgy tervezték, hogy 384 ezer liter víz férjen bele, ha teljesen feltöltik. Hány négyzetméter csempe szükséges az alapjának és az oldalainak beborításához?

Megoldás:

A strandmedence alapja x . Ekkor $384 = 1,5x^2 \Rightarrow x = 16$ m.

$A = 16^2 + 4 \cdot 1,5 \cdot 16 = 352$ m². A medence beborításához 352 m² csempe szükséges.



26. Egy biciklis csoport 200 km-es túrára indult. Minden nap ugyanannyit haladtak. Ha 10 km-rel többet tettek volna meg naponta, akkor útjuk 1 nappal hamarabb véget ért volna. Hány kilométert tett meg a csoport naponta?

Megoldás:

A csoport t nap alatt tette meg az utat, és naponta x km-t tett meg.

Ekkor $200 = xt \Rightarrow t = \frac{200}{x}$, de ugyanakkor $(x+10)(x-1) = 200$.

Behelyettesítünk: $(x+10)\left(\frac{200}{x}-1\right) = 200 \Rightarrow -x^2 - 10x + 2000 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 8000}}{-2} = \frac{10 \pm 90}{-2} \Rightarrow x_1 = -50; \boxed{x_2 = 40}.$$

A csoport naponta 40 km-t tett meg.



27. Két szám közül az egyik 8-cal nagyobb a másiknál. Négyzetük összege 194. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

Az egyik szám x ; a másik szám y . Ekkor $y = x + 8$, továbbá $x^2 + y^2 = 194$.

y -t behelyettesítjük a második egyenletbe: $x^2 + (x+8)^2 = 194 \Rightarrow x^2 + 8x - 65 = 0$.

Ennek megoldásai -13 és 5 , ezekhez ki kell számítani a számpár másik elemét:

$$x_1 = -13; y_1 = -5, \text{ valamint } x_2 = 5; y_2 = 13.$$

Két számpárt kaptunk: 5 és 13 , illetve -5 és -13 .



28. Egy fából készült képkeret felülete $6,375 \text{ dm}^2$. A keret külső részének hosszabbik oldala 40 cm -rel nagyobb a rövidebbik oldalánál. A keret vastagsága pedig 32 -ed része a rövidebbik oldalnak. Mekkora a képkeret belső élei?

Megoldás:

A képkeret külső szélessége legyen x . Ekkor a hosszabbik külső éle $x + 4 \text{ dm}$.

A keret vastagságát z -vel jelölve $z = \frac{x}{32}$.

Az ábrán látható feldarabolás segítségével felírható:

$$6,735 = \frac{x}{32} \cdot x \cdot 2 + \frac{x}{32} \cdot \left(x + 4 - 2 \cdot \frac{x}{32} \right) \cdot 2$$

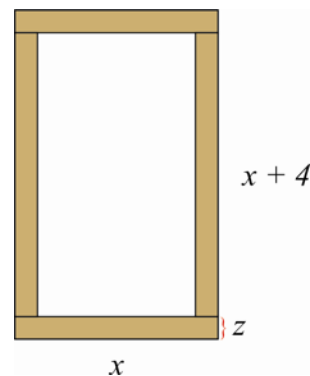
$$6,735 = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{16} \left(\frac{15x}{16} + 4 \right) \Rightarrow 107,76 = x^2 + x \frac{15x + 64}{16} \Rightarrow 0 = 31x^2 + 64x - 1724,16$$

$$x_{1,2} = \frac{-64 \pm \sqrt{4096 + 213795,84}}{62} = \frac{-64 \pm 466,79}{62}, \text{ ahonnan } x_1 \approx 6,5; x_2 \approx -8,56, \text{ nem}$$

megoldás.

Azt kaptuk, hogy a képkeret külső szélessége kb. $6,5 \text{ dm}$. Ekkor hosszúsága $10,5 \text{ dm}$, a keret vastagsága pedig kb. 2 cm .

Ezek alapján a képkeret belső szélessége $6,1 \text{ dm}$, belső hosszúsága pedig $10,1 \text{ dm}$.



29. Egy összegövetelre édes és sós aprósüteményből egyaránt vásároltunk. Az édesből 1650 Ft értékben, a sósból 1700 Ft értékben. Az édes aprósütemény 250 Ft -tal drágább a sósnál. Ez utóbbiból fél kg -mal többet vettünk. Hány kg édes, és hány kg sós aprósüteményt vásároltunk?

Megoldás:

Az édes aprósüteményből $x \text{ kg}$ -ot vettünk, $y \text{ Ft/kg}$ áron: $xy = 1650$.

A sós aprósüteményből pedig $x + 0,5 \text{ kg}$ -ot vettünk, $y - 250 \text{ Ft/kg}$ -os áron:

$$(x + 0,5)(y - 250) = 1700.$$

Elvégezve a beszorzást:

$$xy - 250x + 0,5y - 125 = 1700 \Rightarrow 1650 - 250x + 0,5y - 125 = 1700.$$

Ebből: $-250x - 175 = -0,5y \Rightarrow 500x + 350 = y$.

Visszahelyettesítjük az első összefüggésbe: $x(500x + 350) = 1650$,

$$500x^2 + 350x - 1650 = 0 \Rightarrow 10x^2 + 7x - 33 = 0.$$

$$x_1 = 1,5; \quad x_2 = -2,2, \text{ nem megoldás.}$$

Az édes süteményből 1,5 kg-ot, míg a sósból 2 kg-t vásároltunk.



- 30.** Egy úszómedencét két csövön keresztül 2 és fél óra alatt töltenek fel. Az első cső másfél órával hamarabb tudja megtölteni a medencét, mint a második. Mennyi idő alatt tudja megtölteni a medencét a két cső külön-külön?

Megoldás:

	egyik cső	másik cső
külön teletöltik (óra)	t	$t + 1,5$
1 óra alatt ennyied részét töltik meg:	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t + 1,5}$
ketten 2,5 órán át dolgoznak:	$\frac{2,5}{t}$	$\frac{2,5}{t + 1,5}$

$$\frac{2,5}{t} + \frac{2,5}{t + 1,5} = 1 \Rightarrow 0 = t^2 - 3,5t - 3,75, \text{ ebből } t_{1,2} = \frac{3,5 \pm \sqrt{27,25}}{2}.$$

$$t_1 \approx 4,36; \quad t_2 \approx -0,86; \quad 4,36 + 1,5 = 5,86.$$

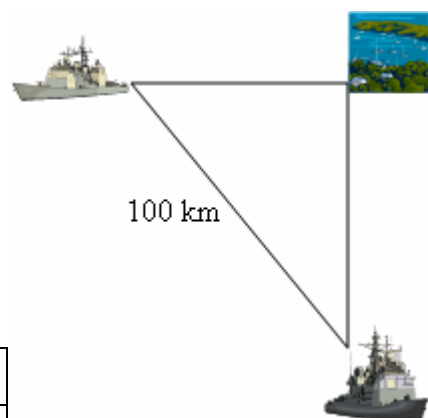
Az első cső 4,36 óra alatt, a másik 5,86 óra alatt tölti fel egyedül az úszómedencét.



- 31.** Egy kikötőből egyszerre indul el két hajó: az egyik délre, a másik nyugatra. 2 óra múlva 100 km-nyire lesznek egymástól. Állapítsuk meg mindkét hajó sebességét, ha az egyik 4 km/h-val lassabban halad, mint a másik.

Megoldás:

	egyik hajó	másik hajó
sebesség:	v	$v + 4$
eltelt idő:	2 óra	2 óra
megtett út:	$2v$	$2(v + 4)$



Alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt: $10000 = (2v)^2 + (2(v + 4))^2 \Rightarrow 0 = v^2 + 2v - 121$.

Ebből $v_1 = 10,05$ km/h, és $10,05 + 4 = 14,05$; $v_2 = -12,05$, nem megoldás.

Az egyik hajó $10,05$ km/h, a másik pedig $14,05$ km/h sebességgel haladt.