Matematika „A”

10. szakiskolai évfolyam

4. modul
Hasonlóság és alkalmazásai

Készítette: Vidra Gábor

A modul célja	A hasonlóság alkalmazásának gyakorlása. A szögfüggvények megismerése, alkalmazása valóságközeli feladatokban.
Időkeret	Ajánlott óraszám: 19 óra, a modulban kidolgozott órák száma: 10 óra
Ajánlott korosztály	10. szakiskolai évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Korábbi tanulmányok a síkidomokról és testekről, egyenes arányosság, nevezetes ponthalmazok, szögfelező, szakaszfelező merőleges, magasságvonal. Másodfokú kifejezések, négyzetgyök. Egybevágósági transzformációk, síkidomok tulajdonságai, háromszögek egybevágósága. Arányosság.
A képességfejlesztés fókuszai	Zsebszámológép biztos használatának elsajátítása. A valós mérőszámmal megadott mennyiségek, a folytonosság fogalmának továbbfejlesztése. A valóságos tárgyak méretei, és azok geometriai modellje közötti arány becslése. Síkidomok kerületének, területének, térbeli alakzatok felszínének becslése. Szövegértelmezés továbbfejlesztése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek továbbfejlesztése. A geometriai feladatok algebrai eszközökkel történő megoldási képességének fejlesztése. A geometriai fogalmak segítségével az absztrakciós képesség fejlesztése. Összefüggések, képletek felfedezése gyakorlati tapasztalatból kiindulva, azok általánosítása és alkalmazása más esetekben, más tantárgyakban. Geometriai tételek bizonyítása során használt logikai műveletekkel az induktív illetve a deduktív következtetés képességét fejlesztjük. Hasonló alakzatok adatai közötti összefüggések alkalmazása valóság-közeli feladatok megoldásánál az arányérzéket fejleszti.

TÁMOGATÓ RENDSZER

- 4.1 feladatlap (1. – 5. feladatok);
- 4.2 feladatlap (egybevágóság – hasonlóság eseteinek részletezése);
- 4.3 kártyakészlet (segítség a 4.2 feladatlaphoz).

A hasonlósághoz használható néhány ötlet:

- Tyúktojás és strucctojás összehasonlítása: például hány ember lakik jól egy strucctojásból, ha mindenki 2 tojást eszik? (Jó példa a hasonló testek térfogatának összehasonlítására, ha elkészítjük; a strucctojás egy 25 cm×12 cm-es téglalapból vágható ki, a tyúktojást mérjük le.)
- Polydron feladatok:
  - Egy háromszög mellé hány vele egybevágó háromszöget kell összerakni, hogy a keletkezett és az eredeti hasonló legyen? Itt megvizsgáljuk az oldalak arányát, a megfelelő magasságok arányát, majd a területek arányát. Ezt követi a háromszoros oldalhossz, utána jön a tetraéderrel ugyanez.
  - 2-szeres élű testek vizsgálata (kocka, tetraéder, négyzet alapú gúla): határoló háromszöglapok száma, testmagasság vizsgálata, hányszor fér bele a kicsi tetraéder; itt az élek, oldallapok magasságai, testmagasságok összehasonlítása után térjünk rá a felszínek, majd a térfogatok összehasonlítására.
  - 4 db szabályos háromszögből álló szabályos háromszögből tetraéder összehajtogatása, és ugyanez nagyobbal;
- A Lénárt-féle gömbkészlet rajzfóliájának vastagsága 0,3–0,5 mm, a gömb sugara nagyjából 100 mm. A Föld sugara 6370 km, a Himalája legmagasabb csúcsának tengerszint feletti magassága kevesebb, mint 9 kilométer. Ha a Földet a gömbkészlettel modellezzük, akkor a Himalája belefér-e a gömbfóliába?

További javasolt tevékenységek:

Csoportmunka:

– hasonló háromszögek megfelelő szögeinek összehasonlítása;

– parkettázás hasonló síkidomokkal;

– hasonló testek hálójának elkészítése.

Kutatómunka:

– matematikatörténeti érdekességek.(kör, hasonlóság);

– előadás, vetítés számítógéppel, interaktív programok az internetről;

– geometriai motívumok a művészetekben.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Hasonlóság, középpontos hasonlóság			
1.	Csoportalakítás tetszőleges módszerrel Bevezető feladatok (csoportmunka)	Számolás, becslés, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, metakogníció, induktív gondolkodás	1–5. feladatok, illetve 1. feladatlap
2.	Szerkesztések (csoportban is feldolgozható, de jellemzően egyéni munka).	Szerkesztés, műveletek sorrendje, kombinatív gondolkodás	6–8. feladatok.
3.	Középpontos hasonlósághoz vezető kérdések (csoportmunka, diákkvartett)	Induktív és deduktív gondolkodás, a valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek továbbfejlesztése	Tanári útmutató kérdései
4.	A középpontos hasonlóság meghatározása (frontális, tanári magyarázat).	Szövegértés, figyelem	
5.	A középpontos hasonlóság végrehajtása (egyéni munka)	Szerkesztés, műveletek sorrendje, figyelem	A tankönyv ábráiból kiindulva, alapfeladatok
6.	A középpontos hasonlóság tulajdonságai, a hasonlóság fogalma (frontális megbeszélés, tanári magyarázat)	Szövegértés, figyelem	

7.	Nagyítás és kicsinyítés végrehajtásának gyakorlása	Pontos másolás, szövegértés, szerkesztések	9–20. feladatok közül válogatunk
8.	Síkidomok hasonlósága (arányos nagyítás-kicsinyítésből, és az egybevágóság fogalmából csoportmunkával eljutunk a háromszögek hasonlóságához, majd a sokszögek hasonlóságához; csoportmunka)	Kombinatív, induktív és deduktív gondolkodás, metakogníció	Tanári útmutató kérdései, 4.2 feladatlap, 4.3 kártyakészlet
9.	Feladatok megoldása (tetszőleges módszerrel)	Számolás, a valóság modellezése geometriai módszerekkel, induktív gondolkodás	21–42. feladatok közül válogatunk, 1–3. mintapélda

II. Szögfüggvények			
1.	A szögfüggvények meghatározásai (tanári magyarázat, frontális)	Kombinatív gondolkodás, rendszerezés	
2.	Bevezető feladatok (frontális)	Rendszerezés, figyelem	4–6. mintapélda
3.	Feladatok megoldása (elsősorban csoportmunka, tetszőleges módszerrel)	A geometriai feladatok algebrai eszközökkel történő megoldási képességének fejlesztése. A valóság problémáinak modellezése. Számolás, kombinatív gondolkodás, rendszerezés, induktív gondolkodás, metakogníció.	43–97. feladatok közül válogatunk

I. Hasonlóság, középpontos hasonlóság

Módszertani megjegyzés:

Amennyiben lehetséges, igyekezzünk másolópapír használatára ösztönözni a tanulókat. Így elérhető, hogy a munkafüzetet többször felhasználhatja az iskola.

A középpontos hasonlóságot tanári magyarázattal készítjük elő, diavetítő és egy egyszerű, könnyen mérhető ábrával ellátott dia szükséges hozzá.

Grafikákat sokszor úgy festenek a falra, hogy rávetítik diavetítővel, és a vetített kép szerint végzik a festést. A diavetítőben egy pontszerű fényforrás sugarakat bocsát ki, a sugarak (vetítő sugarak) a diafilm kockáján annak nagyított képét állítják elő a falon. Ez azt jelenti, hogy **a diafilm minden egyes pontjához a fénysugár kivetít egy annak megfelelő pontot a vetítővásznon**. A filmkockán és a falon lévő kép hasonló egymáshoz. Ezt szemléltethetjük a diavetítő elé rakott kezünkkel, megmutatva az egymásnak megfelelő részleteket is. Tapasztaljuk, hogy minél messzebb visszük a vásznat a diavetítőtől, annál nagyobb lesz a kivetített kép (ezt megmutathatjuk kezünk mozgatásával). Milyen messze kell elhelyezni a vásznat, ha azt szeretnénk, hogy a kapott kép az eredeti nagyságának a négyszerese legyen? **Azt mondjuk, hogy az eredeti és a kapott kép középpontosan hasonló**. Ha egy pontból nagyítunk, akkor ugyanolyan szabály szerint állítjuk elő a képet, mint ahogy a diavetítő működik, csak a nagyítást síkban végezzük.

Korábban tanultunk már geometriai transzformációkról: tükrözésekről, forgatásról, eltolásról. Ezek egybevágóságok voltak, vagyis például egy háromszöget elforgatva vele egybevágó háromszöget kaptunk. A gyakorlati életben azonban szükség van arra, hogy a pici dolgokat (például vírusokat, atomszerkezetet) nagyban, nagy dolgokat (épületet, galaxist, autót) kicsiben ábrázoljunk. Ehhez a hasonlóságot használjuk.

Feladatok

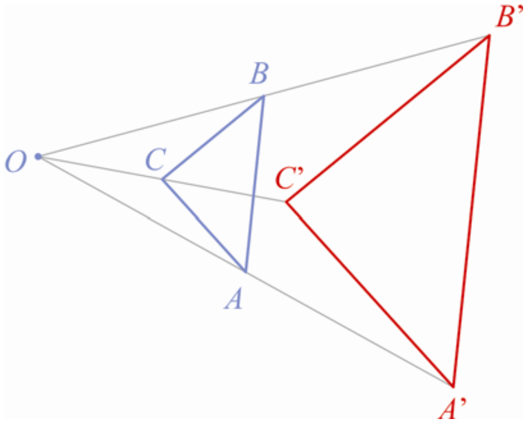
4.1 feladatlap alkalmazása

Módszertani megjegyzés: Az 1. – 4. feladatok feldolgozását csoportmunkában javasoljuk, mintha ez a négy feladat egy feladatlapot alkotna: a tanulók önállóan dolgoznak, de a megoldásokat megbeszélik, egyeztetik, és a csoport a feladatok megoldásaival kapcsolatban közös véleményt alakít ki. A 2. b) és c), valamint a 3. feladatban javasoljuk a csoporton belüli munkamegosztást. Az ellenőrzés a megoldások beszedésével és javításával történik.

A feladatok célja a középpontos hasonlóság szerkesztésének és a szakaszok arányának felelevenítése. Akkor is megoldhatók, ha a hasonlósággal kapcsolatos előzetes ismeretek hiányoznak. Csoportmunkához sokszorosíthatjuk és kioszthatjuk a 4.1 feladatlapot, amely az 1. – 5. feladatokat tartalmazza.

1. Az ábrán látható *ABC* háromszöget kétszeresére nagyítottuk az *O* pontból, úgy kaptuk az *A'B'C'* háromszöget.

a) Állítsd megfelelő sorrendbe a szerkesztés lépéseit!



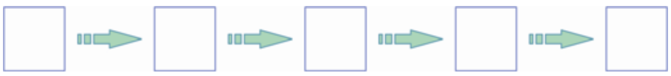
A. *C'* pontból párhuzamost húzunk a *BC* szakasszal.

B. *A'* pontból párhuzamost húzunk az *AC* szakasszal, és erre az *A'* pontból felmérjük az *AC* szakasz hosszának kétszeresét.

C. Az *OA* félegyenesre rámérjük *O*-ból az *OA* távolság kétszeresét.

D. Összekötjük *A*-t *O*-val.

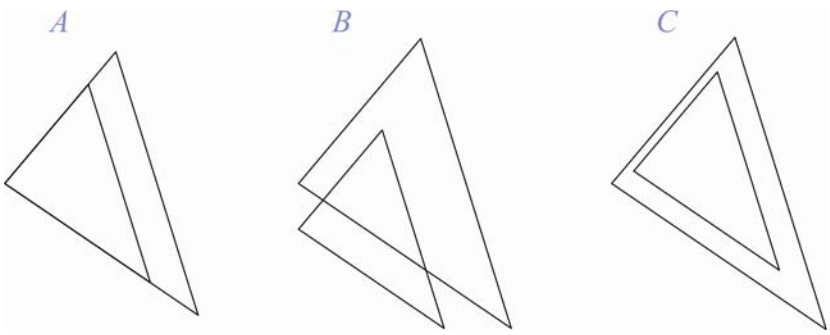
E. *A'* pontból körívezünk az *AB* távolság kétszeresével, és ennek a körívnek a metszéspontja a már meglévő *OB* félegyenessel adja a *B'* pontot.

A helyes sorrend: 

Megoldás: D – C – B – A – E.

b) A szerkesztés többféleképpen is elvégezhető. Írd le egy másik lehetséges szerkesztés menetét!

c) Az ábrákon ugyanazt a háromszöget nagyítottuk úgy, hogy mindig ugyanazokat a képháromszögeket kaptuk. Melyik ábrát melyik pontból nagyíthattuk?



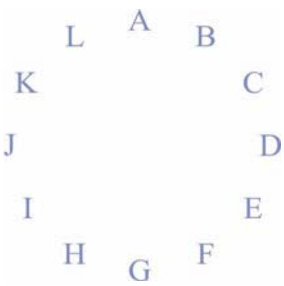
Háromszögön belüli pontból történt a nagyítás: ☐

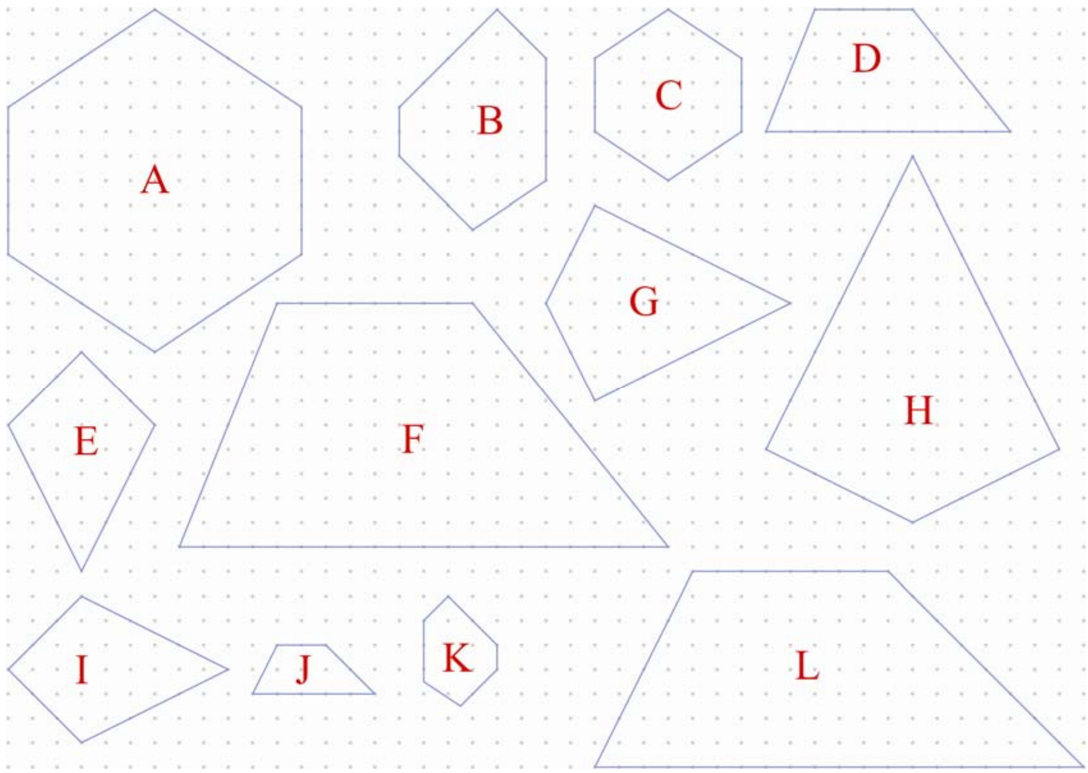
A háromszög egyik csúcsából történt a nagyítás: ☐

Háromszögön kívüli pontból történt a nagyítás: ☐

Módszertani megjegyzés: Itt még hasonló alatt érthető a „pontosan ugyanolyan alakú is”.

2. a) Kösd össze a hasonló síkidomok betűjeleit!





b) Határozd meg a hasonlóságok arányát a megfelelő oldalak segítségével! Folytasd a táblázatot: az egymás alatti cellákba kerüljön rendre a két hasonló síkidom jele és a hasonlóság aránya! A hatékonyabb megoldás miatt osszátok meg a feladatokat!

Síkidom jele	C					
Síkidom jele	A					
Oldalak aránya	2					

c) Határozd meg a trapézok területeit és azt is, hogy mennyi a hasonló trapézok területeinek aránya! Milyen összefüggést találsz az oldalak aránya és a területek aránya között?

Megoldás: a) és b) A–C: 2; B–K: 2; D–F: 2; E–I: 1; G–H: 3:2; J–L. 4. Természetesen az arányok reciproka is helyes megoldás.

c) $T_D = \frac{10+4}{2}\cdot 5 = 35$; $T_F = \frac{20+8}{2}\cdot 10 = 140 = 4\cdot T_D$; $T_J = \frac{5+2}{2}\cdot 2 = 7$;

$T_L = \frac{20+8}{2}\cdot 8 = 112 = 16\cdot T_J$; a területek aránya az oldalak arányának négyzete.

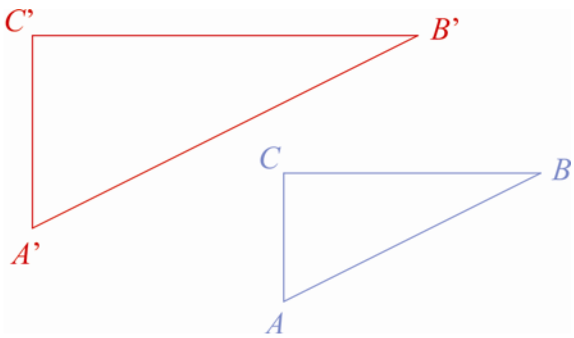
3. Az *A’B’C’* háromszög az *ABC* háromszög nagyított képe. Mérd meg a lenti szakaszokat, és számítsd ki az arányukat! Ahol egyforma arányokat kapsz, magyarázd meg, hogy miért egyeznek!

$\frac{A'B'}{AB}$; $\frac{B'C'}{BC}$; $\frac{A'C'}{AC}$;

$\frac{AB}{BC}$; $\frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{AC}{BC}$;

$\frac{A'C'}{B'C'}$; $\frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{AB}{AC}$;

$\frac{B'C'}{A'C'}$; $\frac{BC}{AC}$; $\frac{AC}{A'C'}$.



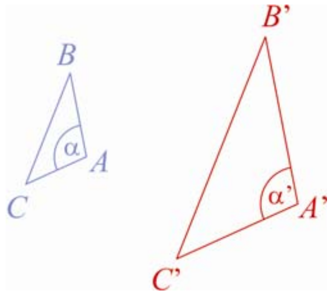
Megoldás:

$\frac{A'B'}{AB} = 1{,}5$; $\frac{B'C'}{BC} = 1{,}5$; $\frac{A'C'}{AC} = 1{,}5$; $\frac{AB}{BC} = 1{,}1$; $\frac{A'B'}{B'C'} = 1{,}1$; $\frac{AC}{BC} = 0{,}5$;

$\frac{A'C'}{B'C'} = 0{,}5$; $\frac{A'B'}{A'C'} = 2{,}2$; $\frac{AB}{AC} = 2{,}2$; $\frac{B'C'}{A'C'} = 2$; $\frac{BC}{AC} = 2$; $\frac{AC}{A'C'} = \frac{2}{3}$.

Módszertani megjegyzés: A következő feladat megoldását lehetőség szerint a füzetbe írják le tanulók.

4. A képen egy háromszöget kétszeresére nagyítottunk.
Figyeld meg a rajzot, és egészítsd ki a szöveget!



a) Az *AB* oldal és a .... oldal párhuzamos egymással.

b) A .... oldal és a .... oldal párhuzamos egymással.

c) Az α szög és a .... szög egyállásúak, ezért nagyságuk

....

d) A .... szög és a .... szög egyenlő nagyságú, mert ....

e) Az *A'B'* és az *AB* oldal hosszának aránya: ....

f) Az *A'C'* és az *AC* oldal hosszának aránya: ....

g) A *B'C'* és a *BC* oldal aránya egyenlő a .... és a .... oldalak arányával.

h) Hasonlóság esetén a megfelelő oldalak aránya ....

i) Hasonlóság esetén a megfelelő szögek nagysága ....

Megoldás: a) *A'B'*; b) *AC* és *A'C'*, vagy *BC* és *B'C'*; c) α'; d) β és β'; e) 2; f) 2; g) például *B'A'* és *BA*; h) egyenlő; i) egyenlő.

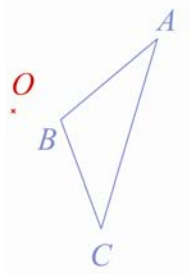
Szerkesszünk, mérjünk, számoljunk!

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok célja a középpontos hasonlóság alkalmazása ábrákon, és további tapasztalatok gyűjtése a tanulók által szerkesztett rajzok segítségével. Javasoljuk a csoportbontást: mintha a csoport egy feladatlapot oldana meg, de mindenki füzetébe kerüljön bele a megoldás.

5. Egy háromszög oldalainak hossza: 5 cm, 7 cm és 10 cm. A háromszöget 2,5-szeresére nagyítjuk.

a) Mekkorák a keletkező háromszög oldalai?

b) Hányszorosára változik a háromszög kerülete?



Megoldás: a) 12,5 cm, 17,5 cm, 25 cm. b) 2,5-szörösére.

6. Nagyítsd az ABC háromszöget az O pontból 3-szorosára!

a) Készítsd el az ábrát!

b) Mekkora az OA’ és az OA szakasz aránya?

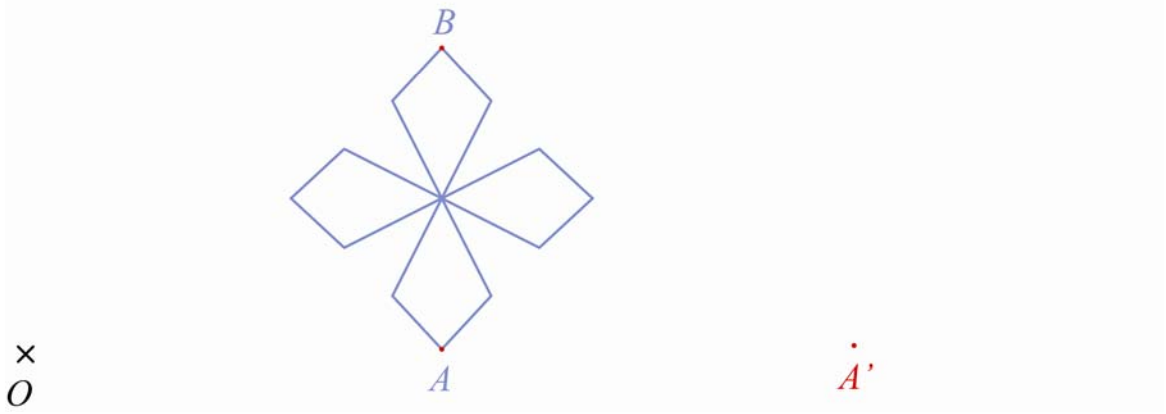
$\frac{OA'}{OA} =$

c) Mekkora a háromszögek megfelelő oldalainak aránya?

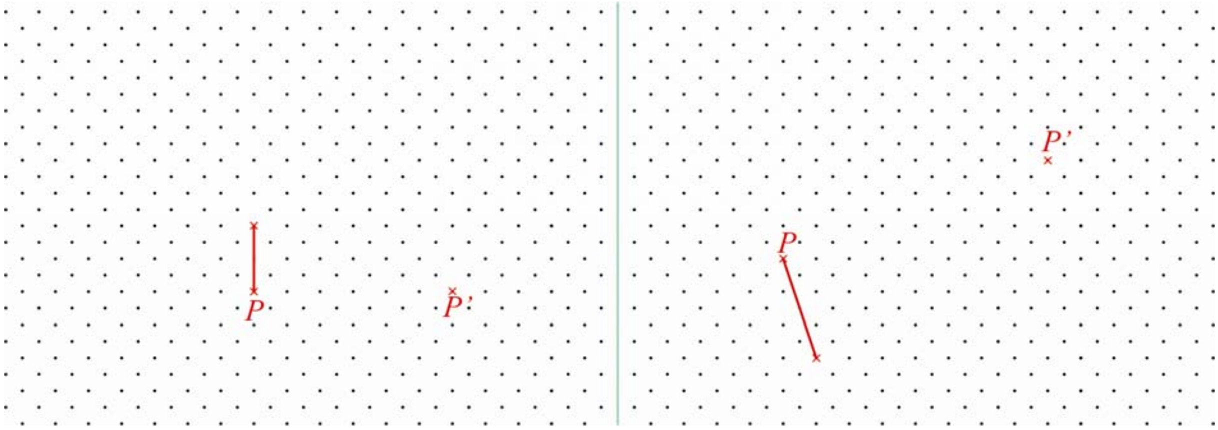
$\frac{a'}{a}$; $\frac{b'}{b}$; $\frac{c'}{c}$.

7. Nagyítsd az ábrát az O pontból úgy, hogy az A pont képe A’ legyen! Az eredetihez hasonló ábrát kapunk.

a) Melyik aránnyal egyezik meg a hasonlóság aránya: az $\frac{A'B'}{AB}$ távolságok arányával, vagy az $\frac{OA'}{OA}$ aránnyal?



8. A szakaszokat háromszorosára nagyítottuk középpontosan, de csak az egyik végpont képét adtuk meg. Keresd meg, hogy hol lehet a középpont, és végezd el a nagyítást!



A hasonlóság és a középpontos hasonlóság

Az alábbi ***igaz-hamis kérdéseket*** javasoljuk ***diákkvartett módszerrel*** feldolgozni.

Megfigyeléseid alapján döntsd el, hogy melyik állítás biztos igaz (I), melyik hamis (H), melyik lehet hogy igaz, de nem minden esetben (L).

a) Hasonló alakzatok megfelelő szöge egyenlő.

b) Egy egyenes és egy körív lehet hasonló.

c) Ha két sokszög hasonló, akkor oldalaik páronként párhuzamosak.

d) Hasonló alakzatok körüljárási iránya megegyezik.

e) Ha két háromszög hasonló, és az egyik egyenlőszárú, akkor a másik is az.

f) Ha egy sokszög két oldala egyforma hosszú, akkor a hozzá hasonló alakzatnak is lesz két egyforma hosszú oldala.

g) Ha egy háromszög oldala kétszer akkora, mint egy hozzá hasonló másik háromszög oldala, akkor a területe is kétszerese a másik háromszög területének.

h) Hasonlóságnál a megfelelő távolságadatok aránya megegyezik.

i) Ha két sokszög szögei egyenlők, akkor azok hasonlók.

j) Ha két sokszögben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, akkor azok hasonlók.

Megoldás: a) I; b) H; c) L; d) L; e) I; f) I; g) H; h) I; i) L; j) L.

(Az utolsó kettőre kerestessünk ellenpéldát a tanulókkal.)

Válaszolj a következő kérdésekre!

a) Alkalmazható-e a középpontos hasonlóság pontokra?

b) Mit mondhatunk a megfelelő szakaszok arányáról, ha középpontos hasonlóságot alkalmazunk?

c) A következő két állításból melyik biztosan igaz?

A. Ha egy szakaszra alkalmazzuk a középpontos hasonlóságot, akkor a szakasz hossza annyival változik, amennyi a hasonlóság aránya.

B. Ha egy szakaszra alkalmazzuk a középpontos hasonlóságot, akkor a szakasz hossza annyiszorosára változik, amennyi a hasonlóság aránya.

Megoldás: a) Igen; b) egyenlők az arányok; c) B biztosan igaz, A lehet igaz (pl. ha 2 cm-es szakaszt kétszeresére nagyítunk, A is és B is teljesül).

A nagyítás/kicsinyítés neve a matematikában: **középpontos hasonlóság**.
Nagyításkor vagy kicsinyítéskor középpontos hasonlóságot alkalmazunk.
A középpontos hasonlóság megadásakor megadjuk a hasonlóság középpontját és a hasonlóság arányát.

Módszertani megjegyzés: Az előzőekben nagyításokat és kicsinyítéseket végeztünk, és megvizsgáltuk a hasonló síkidomok néhány tulajdonságát. Most áttekintjük azokat az elméleti vonatkozásokat, amelyek segítenek megérteni és rendszerezni a megszerzett ismereteket.

A geometriai transzformációk egyik fajtája a **középpontos hasonlóság**. Adott egy O középpont és egy k pozitív arányszám. Ha például $k = 2$, akkor bármely P pont képét úgy kapjuk meg, hogy összekötjük az O ponttal, és az OP félegyenesre felmérjük az OP távolság kétszeresét. Ha $k = \frac{1}{3}$, akkor egy tetszőleges S pont képét úgy kapjuk meg, hogy összekötjük az O ponttal, és az OS félegyenesre felmérjük az OS távolság $\frac{1}{3}$ részét.

Középpontos hasonlóság megadásakor meg kell adnunk:

- a nagyítás középpontját
- egy pozitív arányszámot (a hasonlóság aránya)

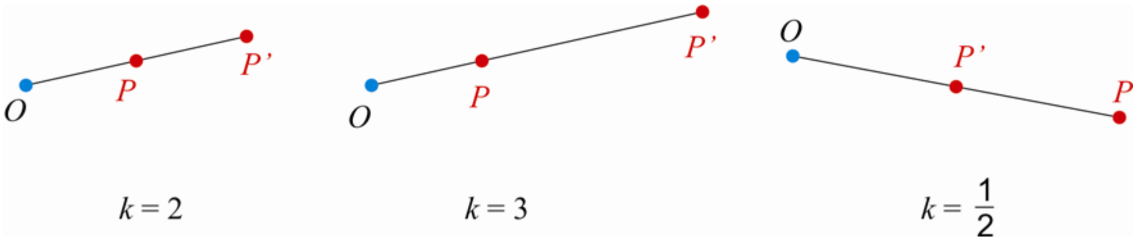
Az egybevágóságokhoz hasonlóan nem adjuk meg, hogy mit nagyítunk. De meg kell tudnunk mondani minden pont esetén, hogy mi lesz annak az adott pontnak a képe: erre szabályt fogalmazunk meg. A **középpontos hasonlóság definíciója** a következő:

Adott a síkon egy O pont (középpont), és egy k pozitív szám. Rendeljük O -hoz önmagát. A sík bármely más P pontjához rendeljük úgy az OP félegyenes P' pontját, hogy legyen $OP' = k \cdot OP$, és P' az O-ból kiinduló, P-t tartalmazó félegyenes pontja.

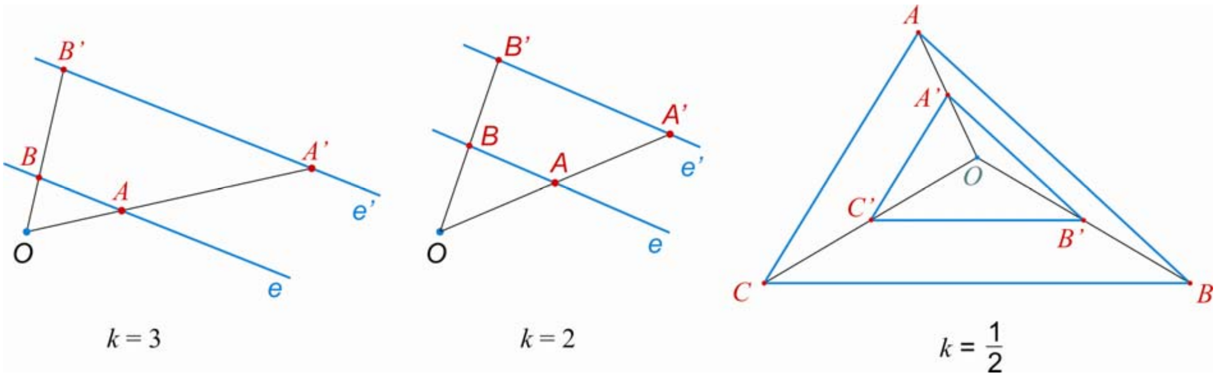
Az O pontból kiinduló félegyeneseket vetítősugaraknak nevezzük. Ha k értéke egynél nagyobb, akkor középpontos **nagyításról** beszélünk, mert a szakaszok hossza a transzformáció végrehajtása után növekszik (k-val, vagyis 1-nél nagyobb számmal szorzódik a hossz). Ha k értéke kisebb mint egy, akkor középpontos **kicsinyítésről** van szó. $k = 1$ esetén az ábra változatlan, és a transzformáció egybevágóság.

Módszertani megjegyzés: A következő ábrákat javasolt átmásoltatni a gyerekek füzetébe, hogy ezzel is gyakorolják a nagyítás és zsugorítás végrehajtását.

Pont transzformálása



Egyenes, háromszög transzformálása



A geometriai transzformációk (pl. tengelyes tükrözés, forgatás stb.) meghatározásakor pontok képéről beszélünk, ezért minden síkidomot mint ponthalmazt kell transzformálnunk. **A síkidomok transzformációja „nevezetes” pontjaik transzformálásával történik**: a körnek például a középpontját és egy tetszőleges pontját transzformáljuk.

Általánosságban elmondhatjuk, hogy ha egy síkidomot k-szorosára nagyítunk vagy kicsinyítünk, akkor minden távolságadata k-szorosára, területe pedig k^2-szeresére változik.

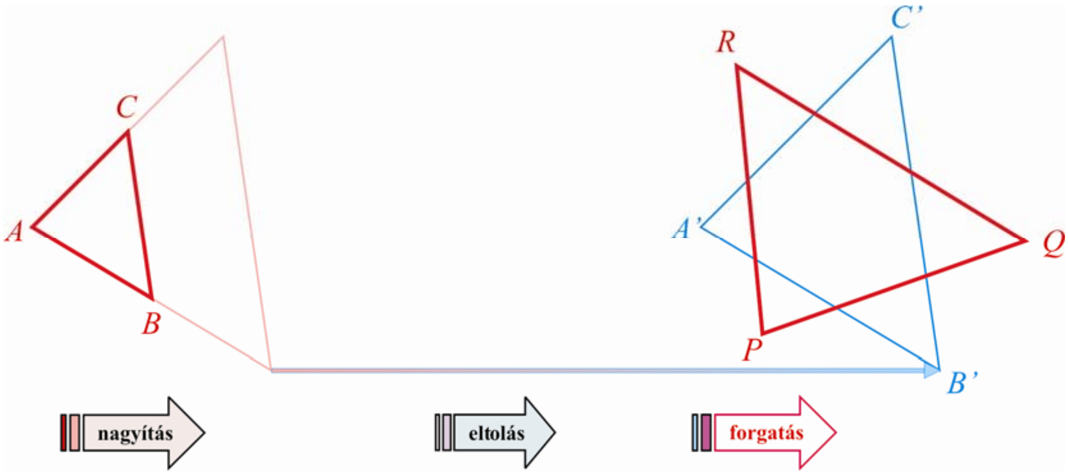
Középpontos hasonlóság esetén a megfelelő távolságadatok aránya egyenlő – ezt a tulajdonságot **aránytartásnak** nevezzük. Ha összehasonlítjuk a képet az eredeti ábrával, akkor megállapíthatjuk, hogy a megfelelő szögek nagysága egyenlő (**szögtartás**) – ezért „hasonlít" a kép az eredeti tárgyra (például makettek).

Megjegyzés: a középpontos hasonlóság további tulajdonságai:

- egyenestartó (egy egyenes képe is egyenes; sőt az eredetivel párhuzamos egyenes);
- párhuzamosságtartó (ha két egyenes párhuzamos egymással, akkor képeik is párhuzamosak lesznek);
- illeszkedéstartó (ha egy pont illeszkedik egy egyenesre, akkor a pont képe is illeszkedni fog az egyenes képére; úgy is mondhatjuk, hogy metsző alakzatok képe is metszi egymást);
- körüljárási irány tartó.

A középpontos hasonlóság nem mozdítja el a középpontot és a középponton áthaladó egyeneseket.

Hasonlóságnak nevezzük azokat a geometriai transzformációkat, amelyek középpontos hasonlóság és egybevágóság véges sokszor történő egymás utáni végrehajtásával keletkeznek. Az olyan síkidomokhoz, amelyek „egyforma alakúak", vagyis megfelelő szakaszaik aránya és szögeik egyenlők, mindig található hasonlóság, amely őket egymásba viszi.

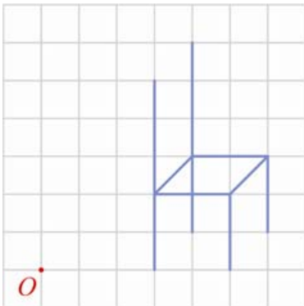


Két síkidomot **hasonlónak** nevezünk, ha található olyan hasonlóság, amely azokat egymásba viszi. A hasonlóság jele: ~ (például $ABC\triangle \sim PQR\triangle$).

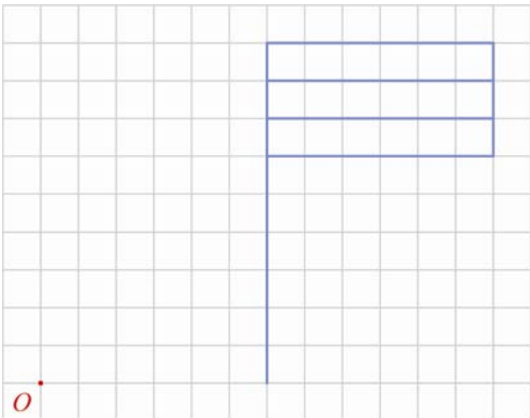
A hasonlóság és a középpontos hasonlóság különböző fogalmak. A középpontos hasonlóság során transzformációt végzünk: pontok (vagy ponthalmazok) képét szerkesztjük meg. Ez azt jelenti, hogy a középpontos hasonlóság pont-pont függvény: a sík minden pontjához hozzárendel egy pontot. Ha egy síkidomot nagyítunk vagy kicsinyítünk, akkor az oldalegyeneseik párhuzamosok maradnak.
A hasonlóság két síkidom viszonyát kifejező fogalom. Ha két síkidom hasonló, akkor az oldalaik aránya és szögeik biztosan egyenlők (vagyis alakjuk „egyforma”, legfeljebb méreteikben különböznek egymástól), azonban oldalaik nem feltétlenül párhuzamosak.

Feladatok

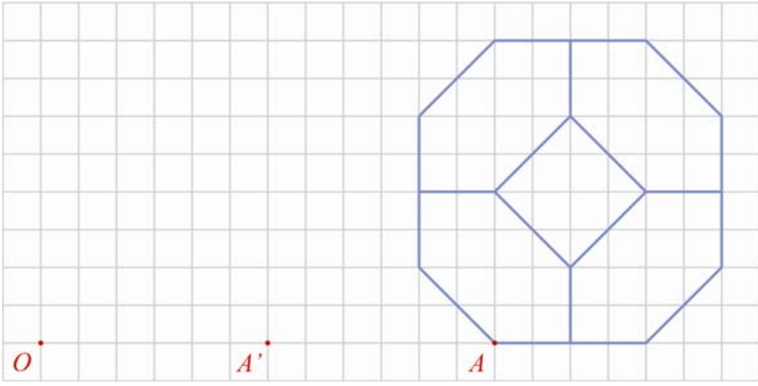
9. Másold át a füzetedbe az ábrát, utána nagyítsd az *O* pontból középpontosan kétszeresére a kisszéket!



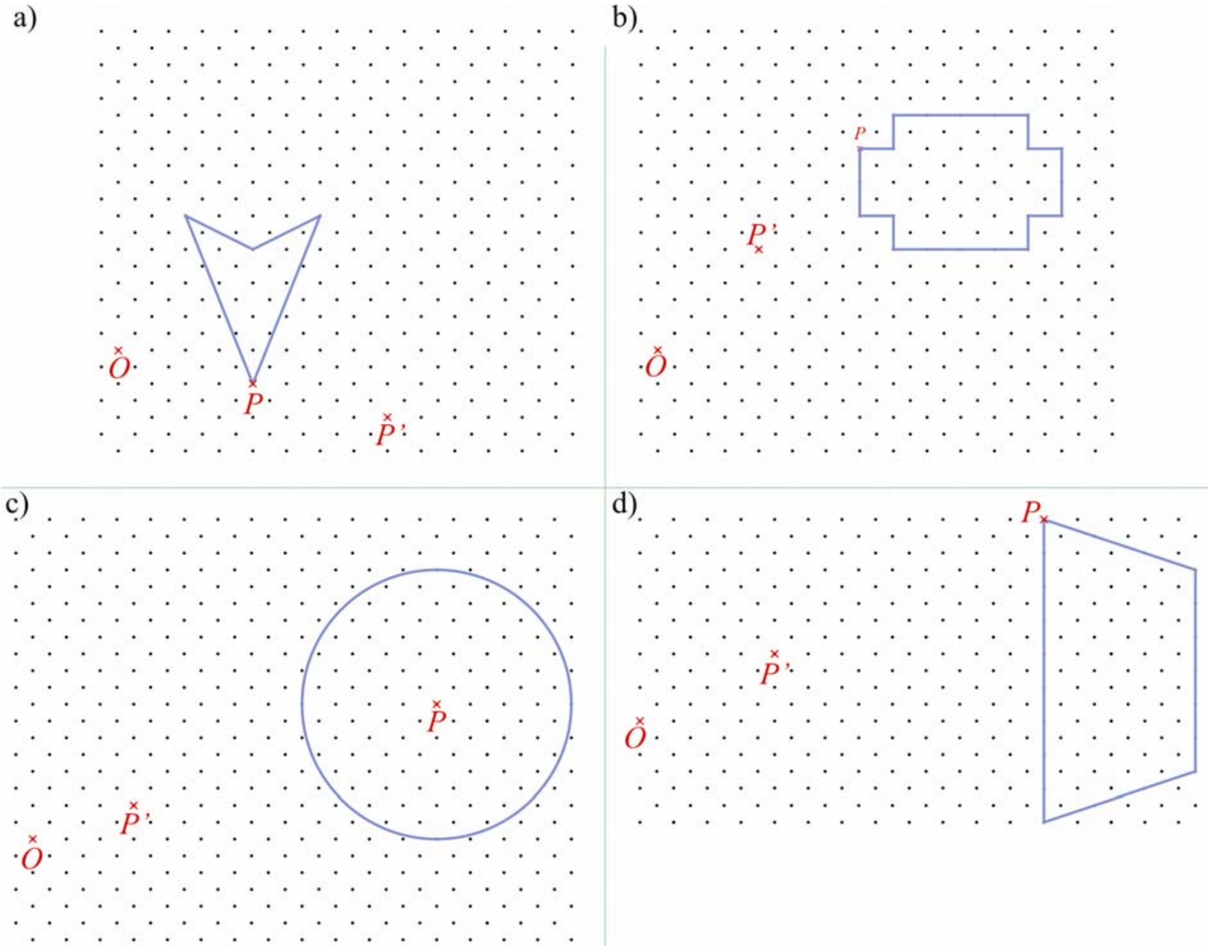
10. Kicsinyítsd a zászlót az *O* pontból $\frac{1}{3}$-ára középpontosan!



11. Mennyi a hasonlóság aránya, ha az *O* középpont, és az *A* pont képe *A*'? Készítsd el az alakzat középpontosan hasonló képét!



12. A pontrácson alakzatokat és középpontokat adtunk meg. Minden alakzat valamely pontjának középpontosan nagyított vagy kicsinyített képét megtalálod az ábrán. Határozd meg a középpontos hasonlóság arányát, és végezd el az alakzat nagyítását, illetve kicsinyítését a pontrács segítségével!



13. Rajzolj a füzetedbe két pontot! Az egyiket jelöld *A*-val, a másikat *O*-val! Legyen az *O* a hasonlóság középpontja. Hol lesz az *A* pont képe (*A*’), ha

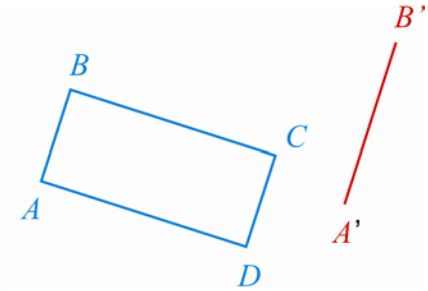
a) a hasonlóság aránya: 2,

b) a hasonlóság aránya: 3,

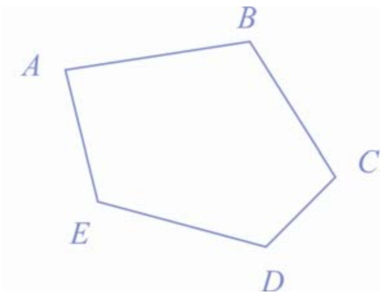
c) a hasonlóság aránya: $\frac{1}{2}$?

Mindegyik esetben szerkeszd meg az *A*’ pontot!

14. Az ábrán egy téglalapot nagyítottunk. Keresd meg a nagyítás centrumát (középpontját), és egészítsd ki a rajzot!



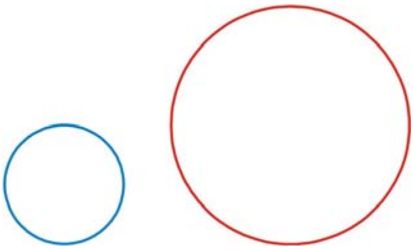
15. Adott a síkon az *ABCDE* ötszög, nagyítsd *A* pontból a háromszorosára! Mérd meg az oldalakat, és foglald táblázatba az eredményeket!



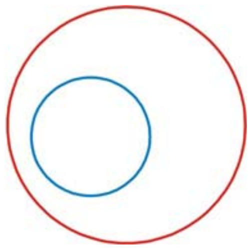
AB	*BC*	*CD*	*DE*	*EA*	*A’B’*	*B’C’*	*C’D’*	*D’E’*	*E’A’*

16. A kék kört C centrumból 2-szeresére nagyítottuk. Keresd meg a nagyítás középpontját!

a)

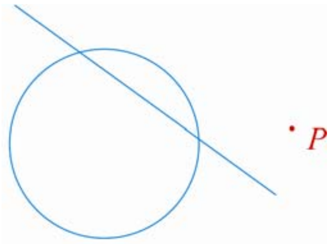


b)

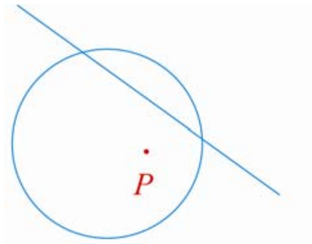


17. Kicsinyítsd 0,5-szörösére az egyenest és a kört tartalmazó alakzatot a P pontból!

a)



b)



18. Rajzolj a füzetedbe egy négyszöget! Először nagyítsd a kétszeresére az egyik csúcsából, majd a kapott képet kicsinyítsd az ötödrészére! Az eredetinek milyen arányú hasonló képét kaptad?

Megoldás: $\frac{2}{5}$.

19. Rajzolj egy paralelogrammát, és jelöld be a szimmetria középpontját (O) is! Szerkeszd meg a középpontosan hasonló képét úgy, hogy legyen O a hasonlóság középpontja, és az arány pedig $\frac{2}{3}$!

Módszertani megjegyzés: A következő feladat feldolgozásához javasoljuk a diákkvartett módszert.

20. Válaszolj a következő kérdésekre: mit kell megadni, amikor definiáljuk a következő transzformációkat:

- tengelyes tükrözés,
- középpontos tükrözés,
- eltolás,
- pont körüli forgatás,
- hasonlósági transzformáció?

Meg kell-e adni azt, hogy mit transzformálunk? Miért?

Síkidomok hasonlósága

A sokszögek (végső soron a síkidomok) hasonlósága adja a hasonlóság gyakorlati hasznát: kicsinyítve vagy nagyítva megalkothatjuk a tárgyak modelljeit, és azon kísérleteket hajthatunk végre (például szélcsatornában hajómodelleken, vagy kilengési teszteket megépítendő toronyházak modelljein). Hasonlóság nélkül nem lenne fényképezés, kivetítés a rendezvényeken, és nem értenénk meg azt sem, hogyan keringenek a bolygók a naprendszerben, vagy éppen az elektron az atommag körül. A síkidomok hasonlóságának vizsgálatát a háromszögek hasonlóságának vizsgálatával kezdjük.

Tudjuk, hogy **ha két síkidom hasonló egymáshoz, akkor a megfelelő szakaszok aránya egyenlő**. A háromszögek esetén ez megfordítható állítás: **ha a háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, akkor hasonlóak**. A későbbiekben látni fogjuk, hogy **a síkidomok hasonlóságához általában nem elég, ha a megfelelő oldalaik aránya egyenlő**. A háromszögek egybevágóságának kritériuma, hogy a megfelelő távolságadatok megegyezzenek. A hasonlóságnál nincs ilyen feltétel. A háromszögek hasonlósága fontos kérdés, mert a gyakorlati életben sokféle, háromszögekből összeállítható sokszöggel találkozunk.

Módszertani megjegyzés: Alakítsunk csoportokat, majd vegyük át a hasonlóság és az egybevágóság közötti kapcsolatot pár kérdéssel, diákkvartett módszerrel:

a) Ha két síkidom egybevágó, akkor hasonlók-e vagy sem? (igen)

b) Igaz-e, hogy ha két háromszög egybevágó, akkor hasonló is? (igen)

c) Igaz-e, hogy ha két háromszög hasonló, akkor egybevágó is? (nem)

Módszertani megjegyzés: A háromszöget 3 független adat határozza meg. Ez azt is jelenti, hogy két háromszög három-három adatából eldönthető, ha azok egybevágók vagy hasonlók.

4.2 munkalap 4.3 kártyakészlet

A kártyakészlet 9 különböző állítást tartalmaz:

$a = a'$ $b = b'$ $c = c'$ $\frac{a'}{a} = 3$ $\frac{b'}{b} = 3$ $\frac{c'}{c} = 3$

$\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$

A kártyakészletben minden kártyából két darab áll rendelkezésre, hogy abban az esetben is elég legyen, ha 4 fős csoport helyett párban szeretnek dolgozni a gyerekek. A csoportok feladata az, hogy hármasokat alkossanak: próbálják kitalálni az egybevágóság és a hasonlóság **összes alapesetének megfelelő eseteket**. Segítségképpen megkapják a 4.2 munkalapot, amely a háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának alapeseteit tartalmazza, szöveggel. A diákok a füzetlapot középen osszák ketté, és az egyik oszlop tetejére az „EGYBEVÁGÓSÁG” a másik tetejére a „HASONLÓSÁG” felirat kerül. A feladat egyik célja az, hogy segítsen az egybevágóság és a hasonlóság között található fogalmi különbség kialakításában.

A munkalapok kiosztása után segítsünk megértetni a feladatot: Az egybevágóság egyik alapesete az, hogy két oldal és a közbezárt szög egyenlő; ehhez tartoznak a következő hármasok:

$a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$;

$a = a'$, $c = c'$, $\beta = \beta'$;

$b = b'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$.

Ezt a három hármast az „EGYBEVÁGÓSÁG” oszlopba írjuk.

A feladat célja az, hogy a lehetséges 2x10 hármasból minél többet megtaláljanak.

4.2 munkalap

Két háromszög egybevágó, ha

1. oldalaik páronként egyenlők;
2. 1-1 megfelelő oldaluk, és a rajtuk fekvő két szög páronként egyenlő;
3. két oldaluk és az általuk közbezárt szög páronként egyenlő;
4. két oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szög páronként egyenlő.

Két háromszög hasonló, ha

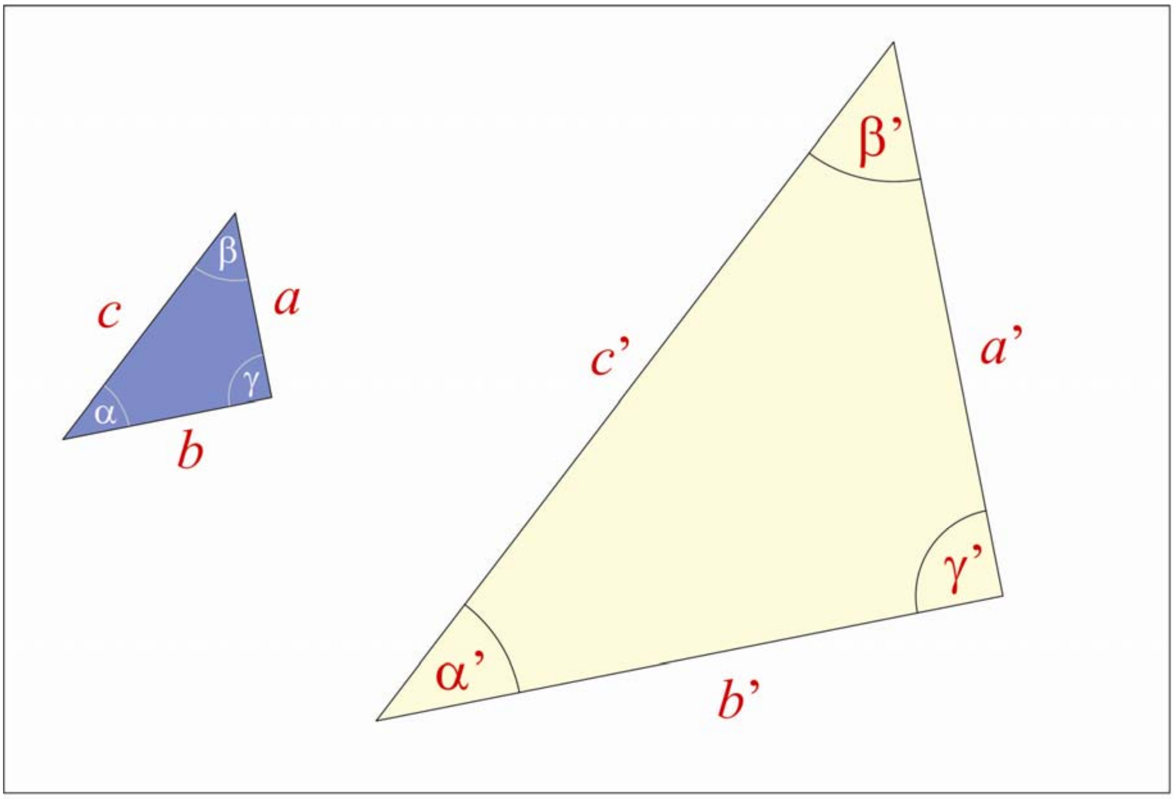
1. megfelelő oldalaik aránya páronként egyenlő;
2. két-két szögük egyenlő;
3. két-két oldal aránya, és az általuk közbezárt szög egyenlő;
4. két-két oldal aránya, és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő.

Az egyik háromszög oldalai: a, b és c, szögei: α, β és γ.
A másik háromszög oldalai: a', b' és c', szögei: α', β' és γ'.

Gyűjtsétek össze két háromszög egybevágóságának és hasonlóságának összes esetét! Segítségül használjátok a 4.3 kártyakészletet!

Egybevágóság	Hasonlóság
$a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$ $c = c'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ $a = a'$, $c = c'$, $\beta = \beta'$ ……………………………………	

4.3 kártyakészlet



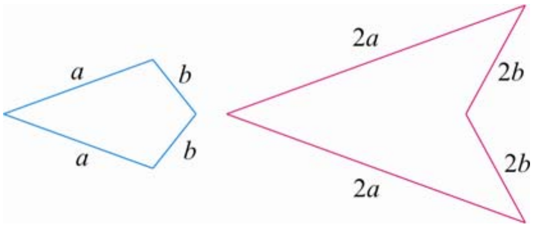
$\alpha = \alpha'$	$\alpha = \alpha'$	$\beta = \beta'$	$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$	$\gamma = \gamma'$	$a = a'$	$a = a'$
$b = b'$	$b = b'$	$c = c'$	$c = c'$
$\frac{a'}{a} = 3$	$\frac{a'}{a} = 3$	$\frac{b'}{b} = 3$	$\frac{b'}{b} = 3$
$\frac{c'}{c} = 3$	$\frac{c'}{c} = 3$		

A háromszögek hasonlóságának alapesetei

Két háromszög hasonló, ha

1. megfelelő oldalainak aránya megegyezik $\left(\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}\right)$;
2. két-két szögük egyenlő $(\alpha=\alpha',\ \beta=\beta',\ \gamma=\gamma')$;
3. két-két oldal aránya és az általuk közbezárt szög megegyezik $\left(\text{például } \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\ \textit{és}\ \gamma=\gamma'\right)$;
4. két-két oldal aránya és a hosszabbikkal szemközti szög megegyezik $\left(\text{például } b>a \text{ esetén } \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\ \textit{és}\ \beta=\beta'\right)$.

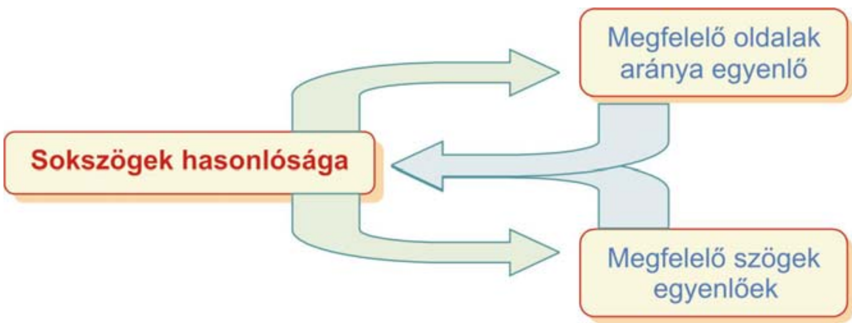
Sokszögek hasonlósága



A definíció szerint két síkidom akkor hasonló, ha van olyan hasonlóság, amely azokat egymásba viszi. A háromszögek hasonlóságához elég, hogy a megfelelő oldalak aránya egyenlő legyen, de a sokszögek hasonlóságához ez általában nem elegendő. Például az ábrán látható két deltoid megfelelő oldalainak aránya kettő, és mégsem hasonlók.

Négyszögek körében a megfelelő szögek egyenlősége sem biztosítja a két négyszög hasonlóságát (például négyzet és téglalap). Bonyolultabb síkidomok hasonlóságára nincs is általánosan használható szabály.

Két sokszög biztosan hasonló, ha megfelelő oldalaik aránya és megfelelő szögeik egyenlők.



Két azonos oldalszámú szabályos sokszög mindig hasonló.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok megoldását célszerű csapatban kezdeni, hogy a gyerekek segíthessenek egymásnak a hasonlósággal kapcsolatos feladatok megoldásában. Az egyenletrendezés ismétlésére javaslunk néhány algebrai törtekkel kapcsolatos egyszerű példát megoldani. Az utánuk következő feladatok a megfelelő szakaszok arányának felírását kérik.

21. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{4}{3}\cdot 3$; b) $\frac{4}{3}:3$; c) $\frac{\frac{15}{4}}{3}=$; d) $3\cdot\frac{x+1}{5}$; e) $\frac{x+3}{3}:2$;

f) $\frac{4x+8}{2}$; g) $(3x+6)\cdot\frac{5}{3}$; h) $(2x-5):\frac{10}{4}$.

Megoldás:

a) 4; b) $\frac{4}{9}$; c) $\frac{5}{4}$; d) $\frac{3x+3}{5}$; e) $\frac{x+3}{6}$; f) $2x+4$; g) $5x+10$; h) $\frac{10x-25}{2}$.

22. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\frac{x}{2}=3$; b) $\frac{x+1}{2}=3$; c) $(2x-5)\cdot\frac{3}{5}=6$; d) $(7x+2):\frac{2}{7}=49$;

e) $\frac{x+5}{2}=\frac{3}{2}$; f) $\frac{2x}{5}=\frac{8}{5}$; g) $\frac{6-4x}{3}=\frac{2x}{6}$; h) $\frac{x+3}{4}=\frac{2x-4}{3}$.

Megoldás:

a) 6; b) 5; c) 7,5; d) $\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}\approx 1{,}71$; e) – 2; f) 4; g) $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1{,}2$; h) 5.

23. Igaz vagy hamis a következő kijelentések logikai értéke?

a) Minden kör hasonló egymáshoz.

b) Minden rombusz hasonló egymással, mert minden rombuszban egyenlők az oldalak.

c) Minden négyzet hasonló egymáshoz.

d) Ha egy trapézban párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor az két, hasonló trapézra bontja a trapézt.

e) Ha egy deltoid oldalai 5 cm, 5 cm, 3 cm, 3 cm, akkor az hasonló ahhoz a deltoidhoz, amelynek oldalai 15 cm, 15 cm, 9 cm, 9 cm.

f) Ha egy trapézban párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor a keletkező kisebbik trapéz az eredetihez hasonló.

g) Két rombusz hasonló, ha van azonos nagyságú szögük.

h) Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik páronként egyenlők.

Megoldás: a) I; b) H; c) I; d) H; e) H (nem feltétlenül igaz); f) H; g) I; h) H.

Mintapélda$_1$

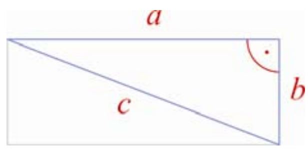
Egy derékszögű háromszög két befogójának hossza 10 cm és 24 cm. Mekkora lesz a háromszög kerülete és területe, ha háromszorosára nagyítjuk?

Megoldás:

Hasonlóság esetén minden távolságadat ugyanannyi szorosára változik, így a befogók új hossza: $3 \cdot 10 = 30$ (cm), valamint $3 \cdot 24 = 72$ (cm). A kerülethez szükség van a harmadik oldalra. Mivel a háromszög derékszögű, érvényes rá a Pitagorasz-tétel: a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével, $a^2 + b^2 = c^2$. Az új háromszög átfogója: $c^2 = 30^2 + 72^2 = 6084$, ebből gyököt vonva 78 cm-t kapunk. A kerület: $K = 30 + 72 + 78 = 180$ (cm).

A derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának a fele:

$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{30 \cdot 72}{2} = 1080$ (cm^2).



Mintapélda$_2$

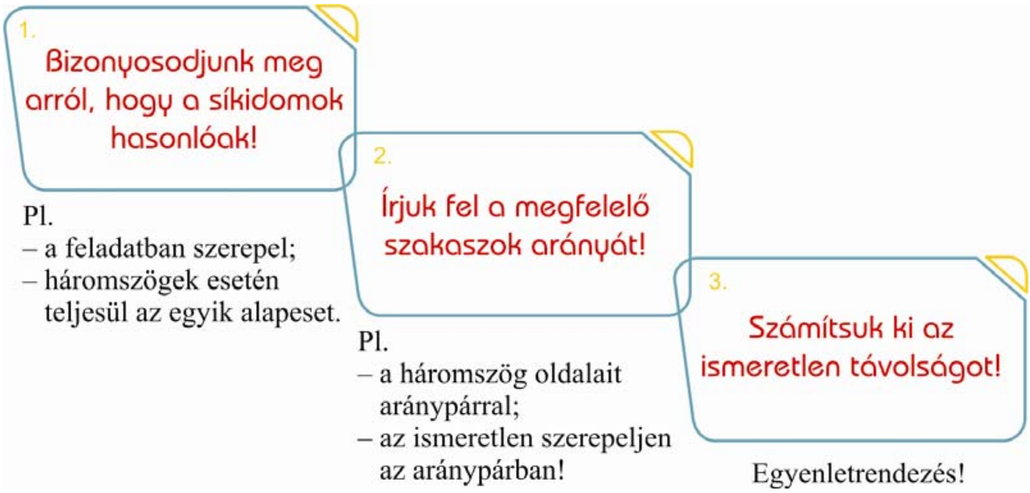
Egy négyszög oldalainak aránya 7 : 7 : 9 : 11. Határozd meg annak a hozzá hasonló négyszögnek az oldalait, melynek a) legkisebb oldala 14 cm; b) kerülete 85 cm!

Megoldás:

a) Hasonlóság esetén az oldalak arányai megmaradnak, vagyis az új háromszög oldalainak aránya is 7 : 7 : 9 : 11. Ez azt jelenti, hogy a 14 cm 7 „részt" képvisel, vagyis egy kis „rész" $\frac{14}{7} = 2$ cm. A többi oldal tehát: 14 cm, $2 \cdot 9 = 18$ (cm), $2 \cdot 11 = 22$ (cm).

b) Az oldalak arányait összeadva: $7 + 7 + 9 + 11 = 34$ „részt" kapunk, ennyi résznek felel meg a kerület. Mivel a kerület 85 cm, egy „rész": $\frac{85}{34} = 2{,}5$ cm. Így az oldalak hossza: $2{,}5 \cdot 7 = 17{,}5$ (cm), még egyszer 17,5 cm, $2{,}5 \cdot 9 = 22{,}5$ (cm) és $2{,}5 \cdot 11 = 27{,}5$ (cm).

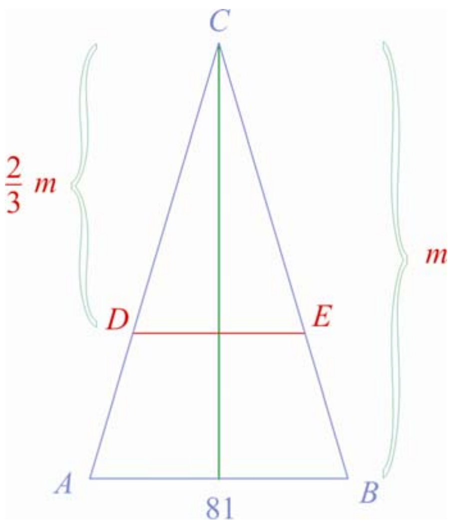
A hiányzó távolságokat sokszor ábra segítségével számítjuk ki. Ekkor a feladatok megoldásának menete:



Mintapélda₃

A létrát milyen hosszú lánc fogja össze a létra magasságának alulról mért harmadánál, ha a talajon a két szárának távolsága 81 cm?

Megoldás:



Az ábra felrajzolása után kapunk két hasonló háromszöget: $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, mert szögeik egyenlők (oldalaik párhuzamosak, így megfelelő szögeik egyállású szögpárokat alkotnak). A hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, mert a két háromszög magasságának aránya $\frac{2}{3}$ (a DE szakasz alatt a magasság harmadrésze található, fölötte pedig a kétharmada).

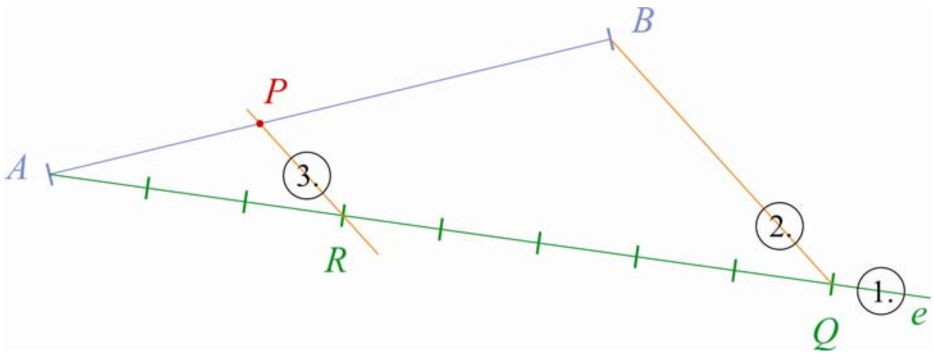
Ezért a keresett DE távolság: $DE = \frac{2}{3}\cdot AB = \frac{2}{3}\cdot 81 = 54\,(\text{cm})$.

Módszertani megjegyzés: Sok számológépen megtalálható a törtszámításhoz való $\boxed{\text{a b/c}}$ gomb. Erre mindenképpen hívjuk fel a gyerekek figyelmét – ha megtanulják helyesen használni, sok számítási hibától menekülhetnek meg.

Szakasz felosztása

A hasonlóság segítségével egy szakaszt könnyen feloszthatunk adott (racionális) arányú részekre. Azt hihetnénk, hogy ez centiméter-skálával ellátott vonalzóval könnyű, mert csak lemérjük és bejelöljük a beosztást. A vonalzóval azonban csak milliméter nagyságrendig mérhetünk, és ez sokszor problémákhoz vezet. Például ha egy 20 cm-es szakaszt kell 10 : 7 arányban felosztani, akkor 11,765 cm és 8,235 cm hosszúságú szakaszokat kellene felmérni, amit nem tudunk pontosan kivitelezni. Vizsgáljuk meg egyszerű példán, hogyan lehet felosztani egy tetszőleges hosszúságú AB szakaszt 3 : 5 arányú részekre!

1. A szakasz egyik végpontjából (az ábrán A-ból) húzunk egy félegyenest (e), amire felmérünk $3+5=8$ egyenlő kis szakaszt, a 3. után megjelölve az osztópontot (R).
2. Az utolsó osztópontot (Q) összekötjük a szakasz másik végpontjával (B-vel).
3. Az összekötő szakasszal (QB szakasszal) párhuzamost húzunk a megjelölt osztóponton (R ponton) keresztül. Ahol ez metszi a szakaszt, ott a megadott arányban osztó pont (P).



Feladatok

24. Egy térképen két település távolsága 5,2 cm. Mekkora a valóságban ez a távolság, ha a térkép méteraránya 1:25000 ?

Megoldás: 1,3 km.

25. Egy négyszög oldalainak aránya 5:6:7:8. Határozd meg annak a hozzá hasonló négyszögnek az oldalait, melynek a) legkisebb oldala 20 cm; b) kerülete 416 cm.

Megoldás:

a) $\frac{20}{5}=4$; $6\cdot 4=24$; 28; 32 cm; b) $\frac{416}{5+6+7+8}=16$, az oldalak 80; 96; 112; 128 cm.

26. Egy ötszög oldalainak aránya 6:8:9:12:15, egy hozzá hasonló ötszög kerülete 150 cm. Mekkorák az oldalai?

Megoldás:

6+8+9+12+15=50, és $\frac{150}{50}=3$. Az oldalak: $6\cdot 3=18$; $8\cdot 3=24$; 27; 36; 45 cm.

27. Igaz-e, hogy a háromszög oldalfelező pontjait összekötő szakasz (középvonal) az eredetihez hasonló háromszöget vág le a nagy háromszögből?

Megoldás: Igen, mert a két háromszög szögei egyenlők.

28. Egy egyenlőszárú háromszög alapja 15 cm, egy hozzá hasonló háromszög megfelelő oldala 25 cm. Határozd meg a két háromszög oldalait, ha a kisebb háromszög kerülete 37 cm.

Megoldás: 11 cm és $\frac{55}{3}$ cm.

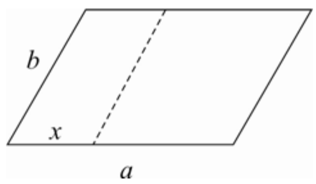
29. Két hasonló egyenlőszárú háromszög leghosszabb oldala 10 cm, illetve 25 cm, kerületeik különbsége 33 cm. Mekkora a két háromszög kerülete?

Megoldás: 22 és 55 cm.

30. Egy paralelogrammát úgy vágunk el az egyik oldallal párhuzamos egyenessel, hogy az egyik keletkező paralelogramma az eredetihez hasonló legyen. Hol kell meghúzni az egyenest, ha a paralelogramma oldalai a) b = 6 cm és a = 10 cm; b) a és b?

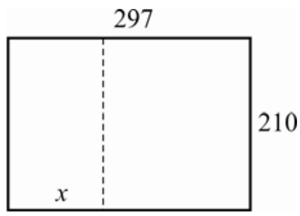
Megoldás: A megfelelő oldalak arányát felírva $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$, ahonnan

$x=\frac{b^2}{a}$. Behelyettesítve az adatokat x = 3,6 cm.



31. Egy A4-es oldal méretei 210 mm x 297 mm. Hogyan kell kétfelé vágni a lapot, hogy a keletkező két lap közül az egyik hasonló legyen az eredetihez? Hasonló-e ekkor a másik is az eredeti A4-es laphoz?

Megoldás:



A hasonló síkidomok megfelelő oldalainak aránya egyenlő, ezért $\frac{297}{210}=\frac{210}{x}$, ahonnan $x=\frac{210^2}{297}\approx 148{,}5$. Ez éppen 297 fele, vagyis a lapot éppen félbe kell hajtani. Természetesen a másik fele is hasonló az eredetihez.

Megjegyzés: A $\frac{297}{210}\approx 1{,}414285714$ tört értéke elég közel esik $\sqrt{2}\approx 1{,}414213562$ értékéhez.

32. Két háromszög közül az egyiknek az oldalai: AB = 3,2 cm, BC = 6,4 cm és AC = 4,8 cm, a másiké EF = 4,8 cm, FG = 2,4 cm, és EG = 3,6 cm. Igaz-e, hogy a két háromszög hasonló? Ha igen, akkor mely oldalak és csúcsok felelnek meg egymásnak?

Megoldás: Hasonlók, *E–C, G–A, F–B.*

33. Két négyszög oldalai ebben a sorrendben 3 cm, 4,5 cm, 3,2 cm és 5,5 cm, valamint 6 cm, 9 cm, 6,4 cm és 11 cm. Hasonló-e a két négyszög?

Megoldás: Nem biztos, a szögeitől függ.

34. Egy háromszögről azt tudjuk, hogy két szöge 45 és 56 fokos. Egy másik háromszögnek van egy 79 és egy 56 fokos szöge. Hasonló-e a két háromszög?

Megoldás: Igen.

35. Egy háromszög oldalai: 3 cm, 3,5 cm és 4,5 cm. Egy hozzá hasonló háromszög kerülete 33 cm. Mekkorák az oldalai?

Megoldás: 9 cm; 10,5 cm; 13,5 cm.

36. Egy ötszöget egy pontból nagyítottunk, és az a oldala 2,5 cm-ről 4,5 cm-re változott. Mekkorák az új ötszögnek az oldalai, ha az eredeti ötszög másik négy oldala: $b=3{,}6$ cm, $c=4$ cm, $d=5{,}2$ cm, $e=4{,}2$ cm. Hányszorosára változott az ötszög kerülete és területe?

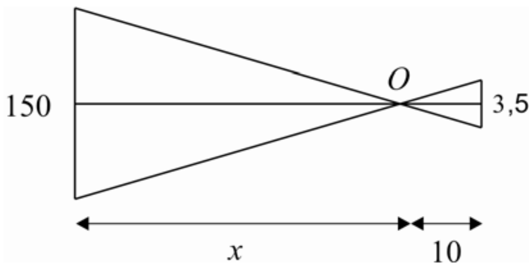
Megoldás: A nagyítás aránya $k=\frac{4{,}5}{2{,}5}=1{,}8$, így az oldala rendre 6,48 cm, 7,2 cm, 9,36 cm, 7,56 cm. A kerület 1,8-szeresére, a terület $1{,}8^2=3{,}24$-szeresére változik.

37. A festők kinyújtott karjukkal méregetik az arányokat a ceruzájukon. Mekkorának méri az 1,2 méteres magasságot a festő, ha a modell tőle 4 méterre van, és a ceruzával a szemétől 50 cm-re mér?

Megoldás: Az aránytartás miatt $\frac{0,5}{4}\cdot 1,2=0,15$ méter, vagyis 15 cm magasnak méri.

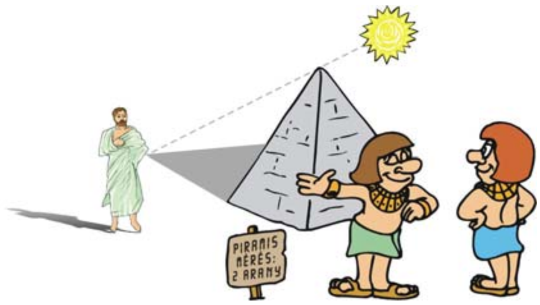
38. Egy fényképész a múzeumban egy 150 cm magas képről szeretne fotót készíteni úgy, hogy az egész kép magassága látható legyen a fotón. A fényképezőgépében 35 mm magas a film, amin a kép keletkezik, és a film az objektívtől 100 mm-re található. Milyen messze tegye a fényképezőgép állványát a képtől? Készíts vázlatot a feladat megoldásához!

Megoldás:



Az ábra szerint két hasonló háromszög található, O mindkettőben a szárak metszéspontja. A nagyítás aránya $k=\frac{150}{3,5}=42,86$. A megfelelő méretek aránya megegyezik, így a két magasság aránya is k-val egyenlő. Eszerint a gépet a képtől $42,86\cdot 10=428,6$ cm, ami kb. 4,3 méter távolságra kell tenni.

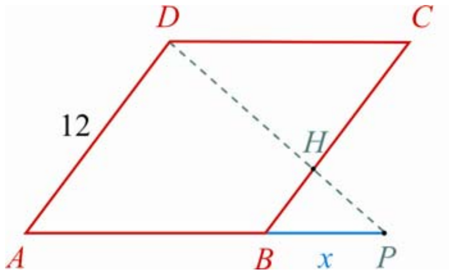
39. A történetírók szerint Thalész árnyékuk segítségével mérte meg a piramisokat úgy, hogy leszúrt egy botot a földbe, és kifigyelte azt a pillanatot, amikor azonos hosszúságú a bot és az árnyéka. Ekkor a piramis árnyéka is egyenlő a magasságával.



Peti a testmagasságát akarja hasonló módszerrel megmérni. Leszúr egy botot a földbe, aminek 42 cm-es darabja áll ki. Az árnyék hossza 26 cm. A saját árnyéka 109 cm hosszú. Milyen magas Peti?

Megoldás: $\frac{42}{26}\cdot 109=176$ cm magas.

40. Az *ABCD* rombusz *BC* oldalának *H* harmadoló pontját összekötjük a *D* csúccsal, és a *DH* egyenes és *AB* egyenes metszéspontját *P*-vel jelöljük. Mekkora *BP* szakasz hossza, ha a rombusz oldala 12 cm?



Megoldás:

A *BPH* és az *APD* háromszögek hasonlósága miatt felírható a megfelelő oldalak aránya: $\frac{AP}{BP}=\frac{DA}{BH}$. A négyszög rombusz, vagyis *AB* = 12 cm. Mivel *H* harmadoló pont, $BH=4$ cm. Behelyettesítve az adatokat: $\frac{12+x}{x}=\frac{12}{4}$, ahonnan $12+x=3x$, innen $x=6$. A keresett távolság tehát 6 cm.

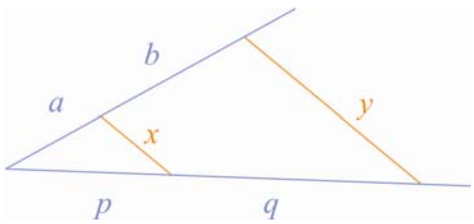
41. Rajzolj egy 7 cm hosszúságú szakaszt, és oszd fel a következő arányú részekre:

a) 2:7; b) 3:5; c) 75% : 25%; d) 40% : 60%; e) 45% : 55%.

Megoldás: c) 3 : 1 aránynak felel meg; d) 2 : 3 aránynak felel meg; e) 9 : 11 aránynak felel meg.

42. Keresd meg a megfelelő arányokat, és számítsd ki a táblázat hiányzó részeit!

a	*b*	*p*	*q*	*x*	*y*
10	*16,67*	15	25	18	*48*
2	*2,8*	5	7	6	*14,4*
20	12	14	8,4	*10*	16
8	11,2	3	4,2	*5*	12
5	*9*	*8*	14,4	6	16,8
9	*6*	*6*	4	12	20
16	12	*12*	9	*24*	42
6	10	*9*	15	*12*	32



Módszertani megjegyzés: a színezett részek kiszámolandók.

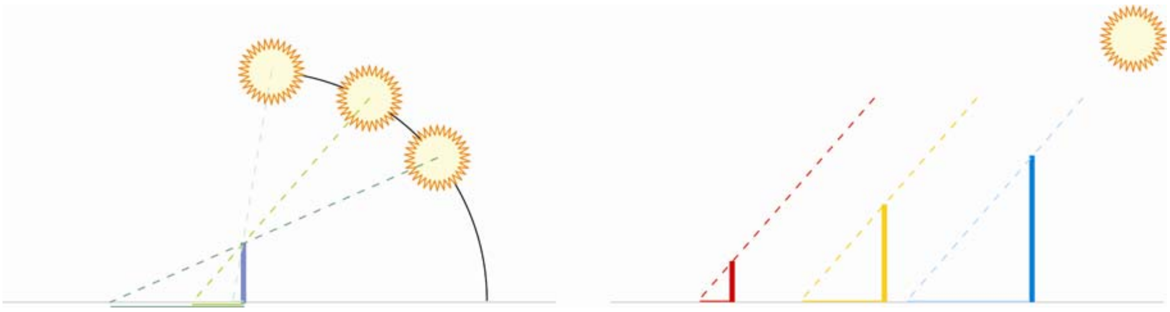
II. Szögfüggvények

Ha egy háromszöget nagyítunk vagy kicsinyítünk, a szögei nem változnak. Az aránytartás következtében a megfelelő oldalak aránya szintén állandó. Ebből arra következtethetünk, hogy a háromszögben a szögek és az oldalak aránya között kapcsolat van. A trigonometria (háromszögtan) foglalkozik a háromszögek adatainak, a szögek és oldalak kapcsolatával.

A szögek és távolságok kapcsolatát már az ókorban is tanulmányozták és használták Kína, India területén csakúgy, mint Egyiptomban az építkezéseknél. Kr. e. 3-400 körül már használtak húrtáblázatokat, sőt szinusztáblázatokat is. Az első évszázadban a kör középponti hegyesszögeihez tartozó húrok hosszát foglalták táblázatba, félfokonként, és ismerték a két szög összegének és különbségének szögfüggvényeire vonatkozó képleteket (ma az emelt szintű érettségi tananyaga).

Módszertani megjegyzés: Érdemes a hétköznapi életből példákat gyűjteni a szögfüggvények bevezetéséhez. Ilyen a következő is.

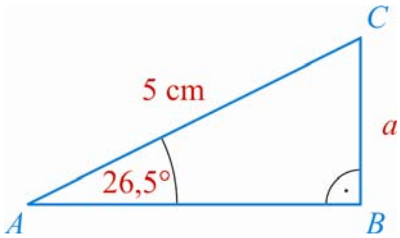
Az árnyékok délután fokozatosan megnyúlnak. Mindennek az árnyéka. Miért? Van-e valami közös a tárgyak magassága és árnyékuk hosszának arányában, ha ugyanabban az időben vizsgáljuk azokat?



Azért növekednek az árnyékok estefelé, mert a nap sugarai egyre kisebb szögben érik a tárgyakat. Ha egy adott időpontban megvizsgáljuk a tárgyak magasságát és az árnyék hosszát, akkor a kettő arányát minden tárgy esetén egyenlőnek találjuk. Ez azért van, mert a tárgyakat a napsugár ugyanabban a szögben éri. Tehát kapcsolat van a háromszögek szögei és oldalainak aránya között. Ezt a kapcsolatot fejezik ki a szögfüggvények, amelyek meghatározását derékszögű háromszög segítségével végezzük.

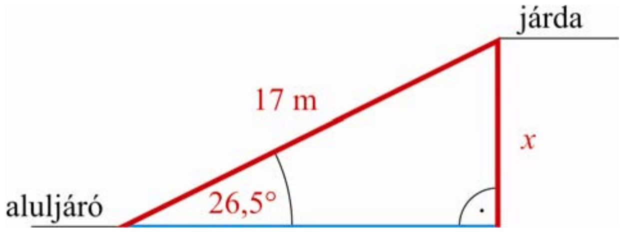
A hegyesszögek szinusza

Egy aluljáróból 17 méter hosszú, egyenes rámpa vezet fel a járda szintjére, és a rámpa egyenletesen, 26,5°-os szögben emelkedik a vízszinteshez viszonyítva. Ezekből az adatokból meghatározható, hogy milyen mélyen van az aluljáró. Segítségül hívjuk a valóság egy modelljét: jelen esetben az eredetihez hasonló derékszögű háromszöget.



Szerkesszünk egy 26,5°-os derékszögű háromszöget például 5 cm-es átfogóval. A két háromszög megfelelő szögei páronként egyenlők, ezért a két háromszög hasonló, tehát a megfelelő oldalaik aránya is egyenlő. Ha lemérjük az *ABC* háromszög 26,5°-os szöggel szemközti befogóját, akkor $a \approx 2{,}2$ cm-t kapunk. A keresett oldal hosszát *x*-szel jelölve: $\frac{x}{17} = \frac{a}{5}$, innen $x \approx \frac{2{,}2 \cdot 17}{5} \approx 7{,}5$ méter.

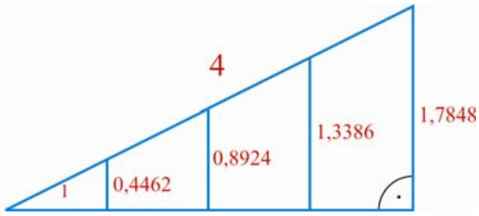
Segítségül bármilyen 26,5°-os derékszögű háromszöget hívhattunk volna, mert a szöggel szemközti befogó és az átfogó aránya a hasonlóság miatt állandó. Ezt a hányadost a hegyesszög szinuszának nevezzük, és jelen esetben 4 tizedesjegyre közelítő értéke $\approx 0{,}4462$.



A szöggel szemközti befogó, az átfogó és a hegyesszög között a **szinusz** szögfüggvény teremti meg a kapcsolatot. A 26,5°-os szög szinusza közelítőleg 0,4462. Ez a szorzószám adja meg, hogy egy ehhez hasonló háromszögben az átfogót mennyivel kell megszorozni, hogy megkapjuk a szöggel szemközti befogót: $\sin 26{,}5° = \frac{x}{17}$, ahonnan $x = 17 \cdot \sin 26{,}5° \approx 7{,}59$ méter.

Egy α hegyesszög szinusza az α szögű derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa.

$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$



$$\sin 26{,}5° \approx \frac{0{,}4462}{1} = \frac{0{,}8924}{2} = \frac{1{,}3386}{3} = \frac{1{,}7848}{4}$$

A szögek szögfüggvényeinek értékét legegyszerűbben **zsebszámológép** segítségével tudjuk meghatározni. Számológépet használunk akkor is, amikor azt kell meghatároznunk, hogy egy adott szögfüggvényértékhez mekkora szög tartozik.

Jelenleg sokféle tudományos számológépet találunk a piacon. Leggyakoribbak a normál és a DAL típusúak. A normál típusúaknál előbb a számokat visszük be, majd a műveleteket választjuk ki a megfelelő gombokkal. A DAL típusú kalkulátoroknál a képleteket olyan módon visszük be a gépbe, ahogyan azt a papírra leírjuk (például kezel törteket, és a szorzásjelet sem kell bevinni, ha zárójeles kifejezést szorzunk).

A DAL típusú számológépeknél a műveletet előre jelezzük: $\boxed{\text{sin}}$ 26,5° $\boxed{=}$

A normál típusúaknál a szögfüggvény értékét így határozzuk meg: 26,5° $\boxed{\text{sin}}$

„Visszakereséshez” ugyanezeket a billentyűket használjuk: a $\boxed{\text{2ndF}}$ vagy $\boxed{\text{Shift}}$ billentyűvel elérhető második ($\sin^{-1}$) funkciójukat:

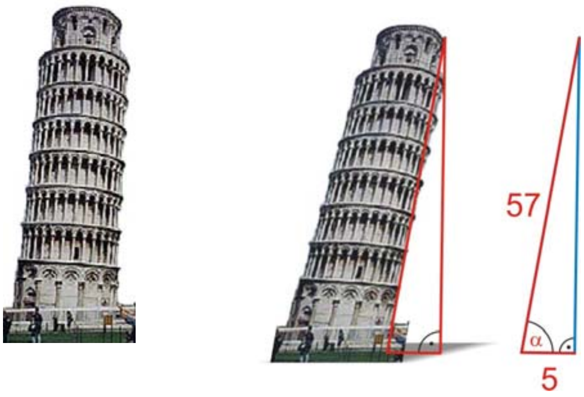
DAL gépen: $\boxed{\text{2ndF}}$ $\overset{\sin^{-1}}{\boxed{\text{sin}}}$ 26,5° $\boxed{=}$, normál típusú gépen: 26,5° $\boxed{\text{2ndF}}$ $\overset{\sin^{-1}}{\boxed{\text{sin}}}$

A szögek mértékegységei között a számológépen található $\boxed{\text{DRG}}$ vagy $\boxed{\text{RAD}}$ gombbal válthatunk. Amennyiben D üzemmódot jelöl a kijelző, a megadott adatokat a számológép foknak értelmezi. R esetében radiánnak, G esetén újfoknak.

2. A hegyesszögek koszinusza

A szög **szinusza** a derékszögű háromszögben a **szöggel szemközti** befogót és az átfogót kapcsolja össze. Hasonlóan egy szög **koszinusza** összekapcsolja a **szög melletti** befogót az átfogóval.

Az 57 méter magas pisai ferde torony árnyéka 5 méter délben. Ezekből az adatokból a koszinusz szögfüggvény segítségével kiszámíthatjuk, hogy mekkora szöget zár be a talajjal a torony. A szemléltetés kedvéért kicsit még jobban eldöntöttük a tornyot.



$$\cos\alpha = \frac{5}{57}$$

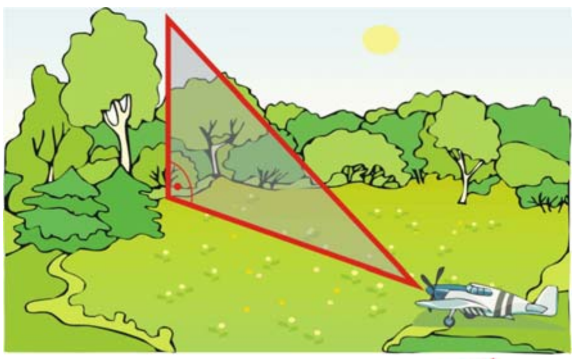
Zsebszámológép használata után $\alpha \approx 85°$.

Egy α hegyesszög koszinusza az α szögű derékszögű háromszögben az α szög melletti befogó és az átfogó hányadosa.

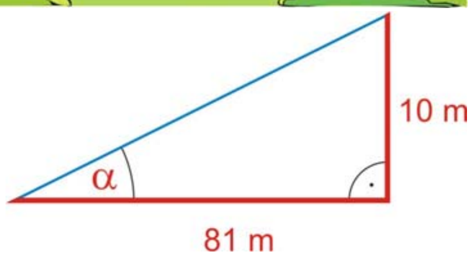
$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

3. A hegyesszögek tangense és kotangense

Egy permetező repülőgép olyan helyen áll, ahol gyorsítás után a fákig 81 méter szabad út áll rendelkezésre a felszálláshoz. A 81 méter alatt 10 méter magasra kell emelkednie. A pilótának felszálláskor az emelkedés szögét be kell állítania. Mekkora a kérdéses szög?



A feladatban a derékszögű háromszög két befogója és a hegyesszög közötti kapcsolatot a **tangens** szögfüggvény teremti meg: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{10}{81}$, ahonnan $\alpha \approx 7{,}04°$. Ha a befogók arányát fordítva írjuk fel, a szög **kotangensét** kapjuk.

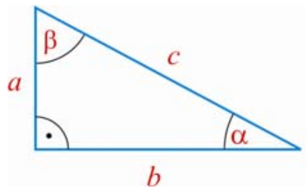


Egy α hegyesszög tangense az α szögű derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti és az α melletti befogó hányadosa.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

Egy α hegyesszög kotangense az α szögű derékszögű háromszögben az α szög melletti és az α szöggel szemközti befogó hányadosa.

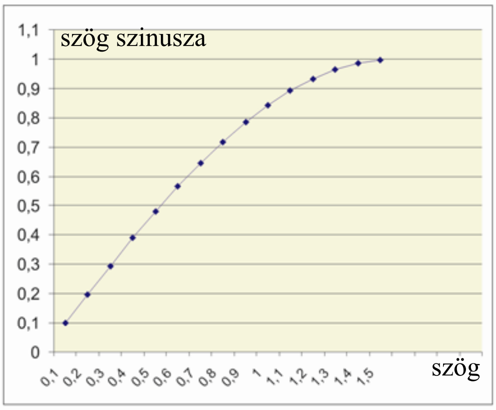
$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

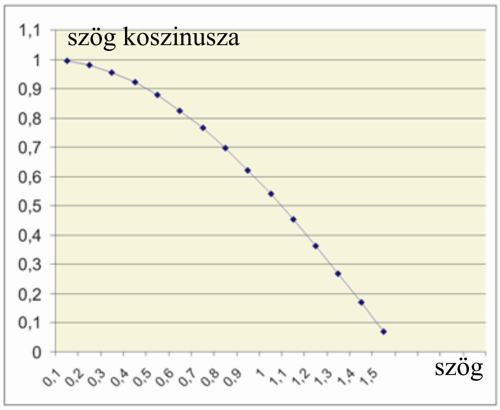


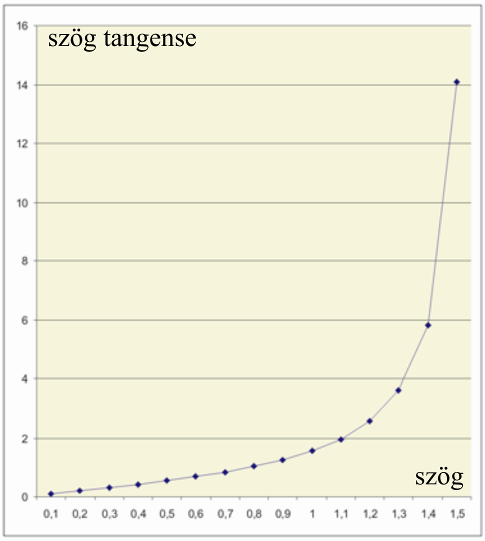
Összefoglalva: a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciói derékszögű háromszögben:

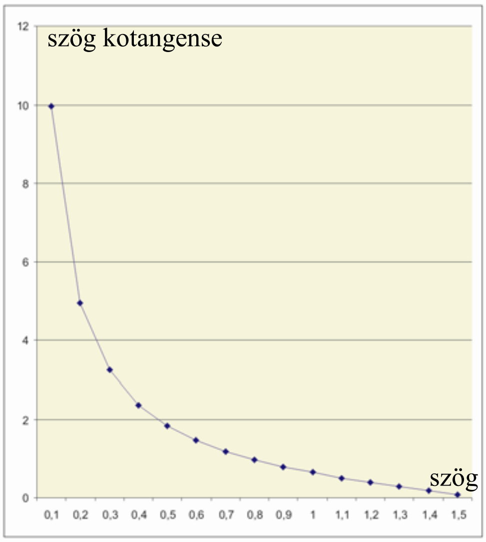
$\sin\alpha = \dfrac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \dfrac{a}{c}$	$\cos\alpha = \dfrac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \dfrac{b}{c}$
$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \dfrac{a}{b}$	$\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}} = \dfrac{b}{a}$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a szög szinusza, koszinusza, tangense és kotangense a szög változásával!









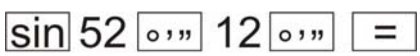
A szögfüggvények értékeit általában négy tizedesjegyre kerekítjük (mert az ezred nagyságrendű eltérés fok nagyságrendű szögeltérést eredményezhet)**, a fokokban megadott szögeket egy tizedesjegyre.**

Régebben *szinusz- és koszinusz-táblázatokból* határozták meg a szögfüggvények értékét (a függvénytáblázatban is találunk ilyen jellegű táblázatokat), ma *számológépet* (kalkulátort) használunk. Vegyük észre, hogy **a szögfüggvényértékeknek nincs mértékegysége**, hiszen két távolság hányadosaként értelmeztük azokat.

Mintapélda$_4$

Határozzuk meg zsebszámológéppel 52°12’ szögfüggvényeit!

Megoldás:



Egyes számológépeken nem kell átváltani a 12’-et fokká, külön billentyű található a fokperces adatbevitelre

(DMS vagy °’” jelzéssel). Akinek nem ilyen a számológépe, előtte át kell váltani a 12’-et fokká: $12' = \frac{12}{60} = 0{,}2°$, és 52,2°-ot kell beütnie a gépbe.

A számológép kiadja az eredményt: 0,790155.

Kerekítve 4 tizedesjegyre $\sin 52°12' = 0{,}7902$.

Hasonlóan, a többi szögfüggvényérték: $\cos 52°12' = 0{,}6129$; $\operatorname{tg} 52°12' = 1{,}2892$.

A számológépen nincsen gomb, amivel ki tudnánk számolni $\operatorname{ctg} 52°12'$ értékét. A definíciókból azonban kiderül, hogy egy szög tangense és kotangense egymás reciproka, ezért

$$\operatorname{ctg} 52°12' = \frac{1}{\operatorname{tg} 52°12'} = 0{,}7757.$$

Megjegyzések:

DAL típusú számológépeken a művelet nyomógombja után a számok begépelése és az egyenlőségjel használata adja a szöget.

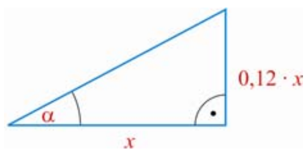
Amennyiben a szöget ívmértékben (radiánban) adják meg, a $\boxed{\text{RAD}}$ billentyűvel állíthatjuk át a számológépet ívmértékre.

Mintapélda$_5$

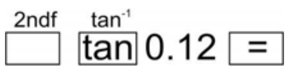
Az emelkedő előtti közlekedési táblára 12%-ot írtak. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes irányú haladáshoz képest a lejtő emelkedése 12%. Hány fokos a lejtő emelkedési szöge?

Megoldás:

Az adatok felhasználásával vázlatot készítünk. Kérdés: α nagysága. A megadott oldalak és α között a kapcsolatot a tangens szögfüggvény teremti meg: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}12 \cdot x}{x} = 0{,}12$.



Visszakeresve: a szög 6,8428°, kerekítve 6,8°.

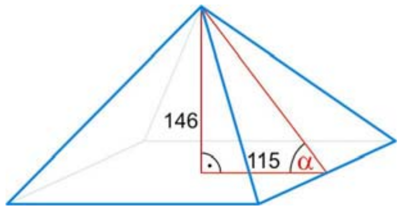


Mintapélda$_6$

A négyzet alapú Nagy Piramis magassága 146 méter, alapjának hossza 230 méter. Mekkora szöget zárnak be az oldallapok a talajjal?

Megoldás:

A vázlat mutatja az alaplap és az oldallap szögét és azt a derékszögű háromszöget, amelynek segítségével a keresett szög kiszámítható. A két befogót a tangens szögfüggvény kapcsolja össze: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{146}{115} \Rightarrow \alpha \approx 51{,}8°$.



Módszertani megjegyzés: a következő feladatokban távolságokat kell kiszámítani szögfüggvények segítségével, adott szögek mellett.

Feladatok

43. Határozd meg a következő szögek összes szögfüggvényét számológép segítségével! Figyelj a helyes kerekítésre!

a) 10°; b) 30°; c) 45°; d) 70°; e) 20°; f) 60°;

g) 82,6°; h) 67,54°; i) 12°6’; j) 77°77’.

44. Mekkora az ismeretlen hegyesszög, ha

a) $\sin \alpha = 0{,}1234$; b) $\sin \alpha = 0{,}3420$; c) $\cos \alpha = 0{,}6820$; d) $\cos \alpha = 0{,}0872$;

e) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}3891$; f) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}1445$; g) $\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}3245$; h) $\operatorname{ctg} \alpha = 3{,}1102$.

Megoldás: a) 7,1°; b) 20,0°; c) 47,0°; d) 85,0°; e) 21,3°; f) 65,0°; g) 72,0°; h) 17,8°.

45. Igaz-e, hogy egy hegyesszög szinusza és koszinusza mindig 1-nél kisebb szám? Indokold a választ! Elmondható-e ugyanez a hegyesszögek tangensére és kotangensére?

Megoldás: A szinusz és a koszinusz egynél kisebb, mert befogó és átfogó hányadosaként értelmezzük. Mivel az átfogó hosszabb a befogónál, a $\frac{befogó}{átfogó}$ arány mindig kisebb 1-nél.

Tangens és kotangens esetén ilyen korlátozást nem találunk.

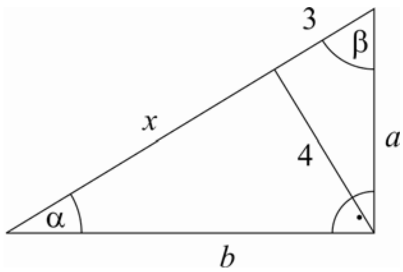
46. Adott a derékszögű háromszög két befogója: $a = 4{,}3$ cm, $b = 5{,}4$ cm. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4{,}3}{5{,}4}$, ahonnan $\alpha \approx 38{,}5°$. A másik hegyesszög $\beta = 90° - \alpha \approx 51{,}5°$.

47. A derékszögű háromszög 26 cm-es befogóján 32°-os szög nyugszik. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

Megoldás: $r=\frac{c}{2}$; $\cos 32°=\frac{26}{c}$, ahonnan $c=\frac{26}{\cos 32°}\approx 30{,}66$ cm, a sugár $r\approx 15{,}3$ cm.

48. Derékszögű háromszög 4 centiméteres magassága az átfogóból egy 3 centiméteres szakaszt vág le. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?



Megoldás:

$\mathrm{tg}\beta=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \beta=53{,}1°$. $\alpha=90°-\beta=36{,}9°$.

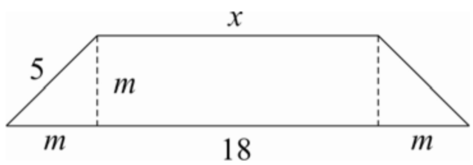
$b=\frac{4}{\sin\alpha}\approx 6{,}7$ cm, $a=\frac{4}{\sin\beta}=5$ cm,

$c=\frac{a}{\sin\alpha}\approx 8{,}3$ cm.

Megjegyzés: a értéke pontosan 5, hiszen pitagoraszi számhármas szerepel a feladatban.

49. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 18 cm, a rajta fekvő szögek 45°-osak, a szárak hossza 5 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

Megoldás:



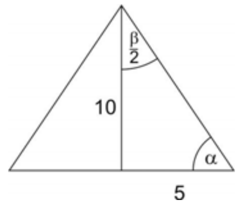
A 45°-os derékszögű háromszög speciális, befogói egyenlők és $5=m\sqrt{2}$, ahonnan $m=\frac{5}{\sqrt{2}}\approx 3{,}54$ cm. $x=18-2m\approx 10{,}93$ cm. A kerület $K=38{,}93$ cm, a terület $T=\frac{18+10{,}93}{2}\cdot 3{,}54\approx 51{,}21\,\mathrm{cm}^2$.

50. a) Egy lejtő hossza 122 méter, hajlásszöge 7°35’. Milyen magasra visz a lejtő?

b) Egy lejtő hossza *a*, hajlásszöge α. Milyen magasra visz a lejtő?

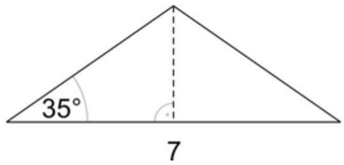
Megoldás: a) $h=122\cdot\sin 7°35'=16{,}1$ m; b) $h=a\cdot\sin\alpha$.

51. Egyenlőszárú háromszög alapja 10 cm, az alaphoz tartozó magasság szintén 10 cm. Mekkorák a háromszög szögei?



Megoldás: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$. $\beta = 180° - 2\alpha \approx 53{,}2°$.

52. Mekkora a faltól a tető gerincéig tartó tetőgerendák hossza, ha az egyenlőszárú háromszög keresztmetszetű tető szélessége 7 méter, és a gerendák hajlásszöge a vízszinteshez képest 35° ?



Megoldás: A keresett távolság $\frac{3{,}5}{\cos 35°} \approx 4{,}27$ méter.

53. Egyenlőszárú háromszögben a szárak hajlásszöge 70°, az alap 10,8 cm. Mekkora a háromszög kerülete és területe?

Megoldás:

A szár hossza $\frac{5{,}4}{\sin 35°} \approx 9{,}4$ cm, a kerület $10{,}8 + 2 \cdot 9{,}4 \approx 29{,}6$ cm. A háromszög magassága $\frac{5{,}4}{\operatorname{tg} 35°} \approx 7{,}7$ cm, területe $\frac{7{,}7 \cdot 10{,}8}{2} \approx 41{,}6\,\text{cm}^2$.

54. Egy létra lábainak távolsága a talajon 86 cm, és 15°-ig hajtottuk szét a lábait. Hány fokú a létra, ha a fokok 45 cm-enként követik egymást? Milyen magasan van a teteje a talajtól, ha szétnyitják?

Megoldás:

A létra hossza $l = \frac{43}{\sin 7{,}5°} \approx 329{,}4$ cm. $\frac{329}{45} \approx 7{,}31$, vagyis a létra 7 fokú.

$\frac{43}{m} = \operatorname{tg} 75° \Rightarrow m = \frac{43}{\operatorname{tg} 75°} \approx 326{,}6$ cm magasan van a teteje a talajtól.

55. Egy téglalap oldalai 10 cm és 15 cm. Mekkora szöget zárnak be az oldalak az átlóval?

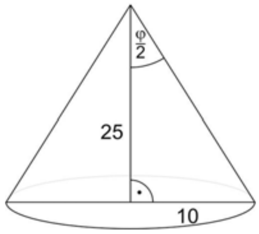
Megoldás: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 33{,}7°$. A keresett szögek 33,7° és $90 - 33{,}7° = 56{,}3°$.

56. Az Eiffel-torony aljának középpontjától 150 méterre áll egy autó. Mekkora szögben látszik a torony emeleteiről, ha az emeletek 54 m, 115 m és 274 m magasan találhatók?

Megoldás: A keresett szögek 70,2°, 52,5°és 28,7°.

57. Egy forgáskúp alapkörének sugara 10 cm, testmagassága 25 cm. Mekkora a kúp nyílásszöge? (A nyílásszög a kúp csúcsánál található, „szemközti" alkotók által bezárt szög.)

Megoldás: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}\Rightarrow$ a keresett szög $\varphi\approx 43{,}6°$.



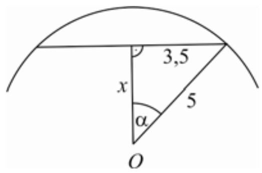
58. Egy inka piramisról tudjuk, hogy alapja egy 130 m, illetve 150 m oldalhosszúságú téglalap, magassága 18 m. Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal?

Megoldás: Tangens szögfüggvények alkalmazásával a keresett szögek 13,5° és 15,5°.

59. Mekkora szögben látszik és egy 7 cm-es húr az 5 cm sugarú kör középpontjából? Milyen távolságra van ez a húr a kör középpontjától?

Megoldás:

$\sin\alpha=\frac{3{,}5}{5}\ \Rightarrow\ \alpha\approx 44{,}4°$, a körcikk középponti szöge 88,8°. A keresett távolság $x=5\cos\alpha\approx 3{,}6\,\text{cm}$.



60. Mekkora szögben látszik egy 10 cm-es húr a 8 cm sugarú kör középpontjából? Milyen távolságra van ez a húr a kör középpontjától? Mennyi a körívhez tartozó körcikk területe és ívhossza?

Megoldás: 77,4°, 6,2 cm, 43,2 cm^2, 10,8 cm.

61. Egy rombusz egyik átlója 10,2 cm, oldala 6,8 cm. Mekkorák a szögei?

Megoldás: Koszinusz szögfüggvénnyel kiszámítható, hogy a szögek 82,8°és 97,2°.

62. Egy rombusz átlói 16 cm és 12,6 cm. Mekkora az oldala, területe és a szögei?

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és felezik a szögeket. A keresett adatok 10,18 cm, 100,8 cm^2, 76,4°és 103,6°.

63. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 6 cm és 10 cm, szárai 5 cm hosszúak. Mekkorák a trapéz szögei?

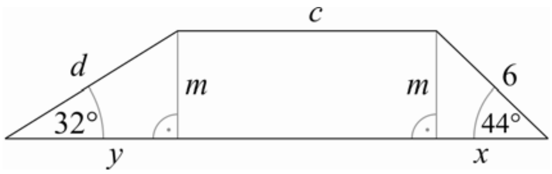
Megoldás: 66,4°és 113,6°.

64. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 16 cm és 10 cm, szárai 8 cm hosszúak. Mekkorák a trapéz szögei?

Megoldás: 68,0° és 112,0°.

65. Egy trapéz hosszabbik alapja 21 cm, az ezen fekvő szögek 32°és 44°-osak. A 44°-os szög melletti szár hossza 6 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

Megoldás:



$m = 6 \cdot \sin 44° \approx 4{,}17$;

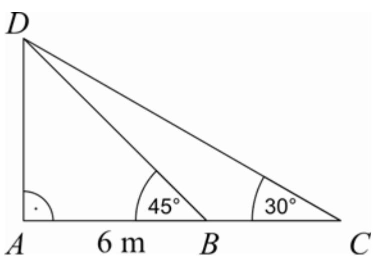
$x = 6 \cdot \cos 44° \approx 4{,}32$; $d = \dfrac{m}{\sin 32°} \approx 7{,}87$;

$y = d \cos 32° \approx 6{,}67$; $c - 21 - (x + y) \approx 10{,}01$;

A keresett értékek: $K = 44{,}9$ cm, $T = 64{,}7$ cm^2.

66. Az AD oszlop teteje a talajon az A-tól 6 méterre levő B pontból 45°-os szögben látszik. Az AB irányban addig távolodunk az oszloptól a talajon, amíg azt 30°-os szögben nem látjuk. Milyen messze vagyunk az oszloptól?

Megoldás:



DAB speciális háromszög, $AD = AB = 6$ m. $tg30° = \dfrac{AD}{AC}$,

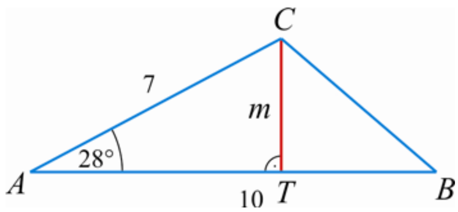
ahonnan $AC \approx 10{,}39$ cm.

67. Határozd meg a háromszög területét, ha két oldala 7 cm és 10 cm, a köztük levő szög 28°-os!

Megoldás:

$$T=\frac{1}{2}\cdot \text{oldal}\cdot \text{oldalhoz tartozó magasság}$$

Az AB oldalhoz tartozó magasságot az ACT derékszögű háromszögből számítjuk ki: $\sin 28°=\frac{m}{7}$, ahonnan $m=7\sin 28°$.



$$T=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 7\cdot \sin 28°\approx 16{,}43\,\text{cm}^2.$$

68. Mekkora szöget zár be a két belső, illetve a két külső érintő egymással annál a két körnél, amelyek sugara 8 cm és 3 cm, és középpontjaik távolsága 16 cm?

Megoldás: A belső érintők hajlásszöge 86,9°, a külsőké 36,4°.

69. Mekkora szöget zár be a két belső, illetve a két külső érintő egymással annál a két körnél, amelyek sugara 8 cm és 12 cm, és középpontjaik távolsága 30 cm?

Megoldás: A belső érintők hajlásszöge 83,6°, a külsőké 15,3°.

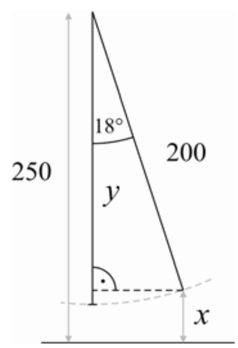
70. A szánkó 170 centiméteres kötelét a földtől 22 cm magasságban rögzítették a szánkóhoz, és a kötél végét a földtől 1,20 méter magasan húzzuk, 120 N erővel. Mekkora a húzóerő vízszintes és függőleges komponense?

Megoldás: A vízszintes komponens $F\cdot\cos\alpha\approx 98N$, a függőleges komponens $F\cdot\sin\alpha\approx 69N$.

71. A földtől 50 cm magasan lóg egy 2 m hosszú láncra erősített hinta. Milyen magasan van a hinta a földtől akkor, amikor a lánca a függőlegessel 18°-ot zár be?

Megoldás:

$y=200\cos 18°\approx 190{,}2$ cm. $x=250-y\approx 60$ cm magasan van a hinta.



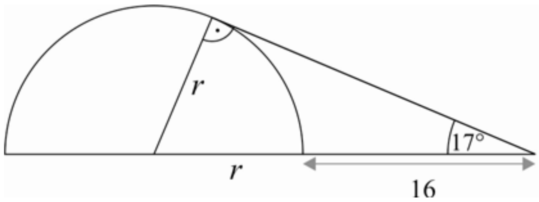
72. Egy 76° nyílásszögű spotlámpát egy gerendára rögzítettek 260 cm magasan, és pontosan függőlegesen lefelé irányítottak. Mekkora a padlón megvilágított terület?

Megoldás:

A megvilágított kör sugara $r = 260 \cdot tg 38° \approx 203{,}13$ cm. A kör területe $T \approx 12{,}96$ m^2.

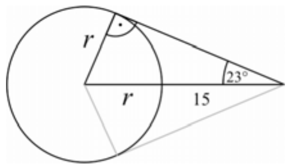
73. Egy félgömb alakú domb szélétől 16 méterre a domb a vízszintes talajhoz képest 17°-os szögben látszik. Milyen magas a domb?

Megoldás: $\sin 17° = \dfrac{r}{r+16}$, ahonnan $r = 6{,}61$ m.



74. Mekkora annak a körnek a sugara, amelyhez a körtől 15 cm távolságra levő külső pontból húzható érintők hajlásszöge 46°?

Megoldás:



Az ábra jelöléseinek megfelelően $\sin 23° = \dfrac{r}{r+15}$, ahonnan

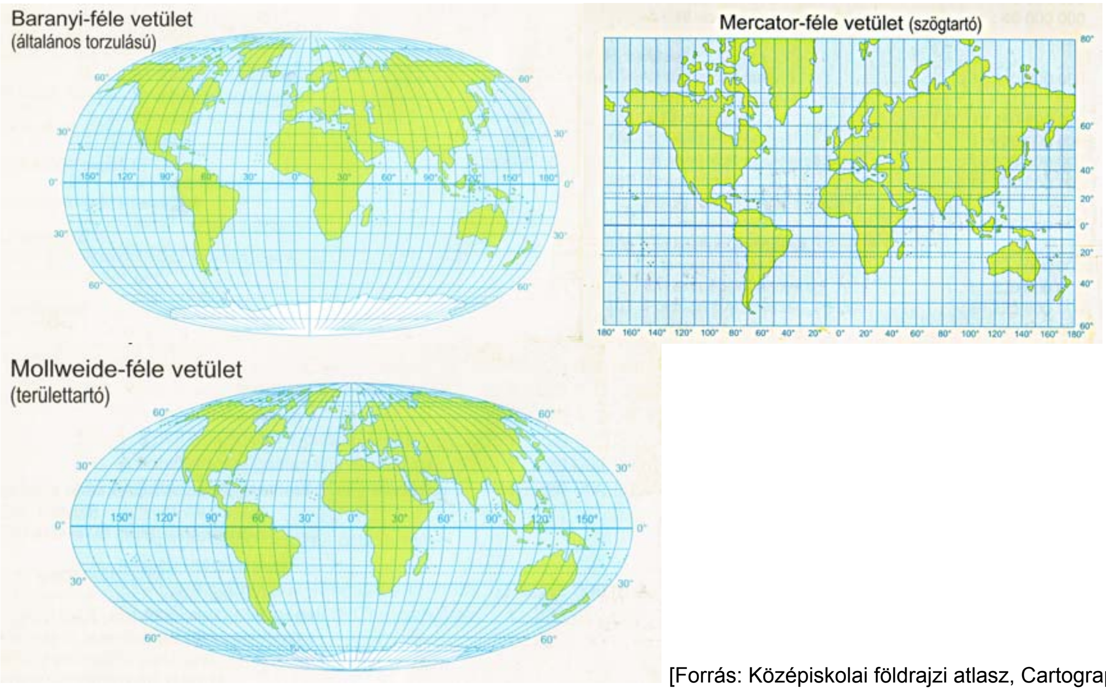
$$r = \frac{15 \sin 23°}{1 - \sin 23°} \approx 9{,}6 \text{ cm.}$$

Vegyes feladatok

75. A dolgokat sokszor nem ábrázolhatjuk az eredeti nagyságukban (például nem rajzolhatjuk le eredeti méreteiben az Eiffel-tornyot vagy egy vírust), ezért nagyítani-kicsinyíteni kell azokat lehetőleg úgy, hogy a kapott kép valahogyan megfeleljen az eredeti tárgynak. Nem biztos, hogy mindig az alakhűség a legfontosabb szempont.

a) Melyik térkép lehet mérethű, melyik mutatja legjobban a távolságok, illetve a területek arányát?

b) Gyűjtsetek olyan helyzeteket különböző alkalmazási területekről, amelyekben az egyes térképeket használnátok!

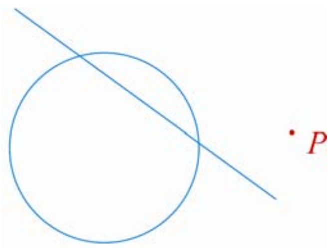


[Forrás: Középiskolai földrajzi atlasz, Cartographia, 2.p.]

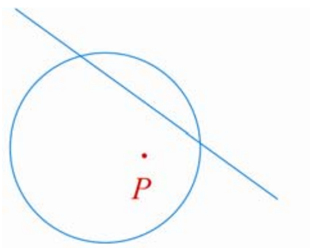
Megoldás: a) Mérethű a Baranyi-féle, a területek arányát legjobban a Mollweide-féle, a távolságok arányát a Mercator-féle ábrázolás őrzi meg a legjobban.

76. Nagyítsd 1,5-szeresére az egyenest és a kört tartalmazó alakzatot a P pontból!

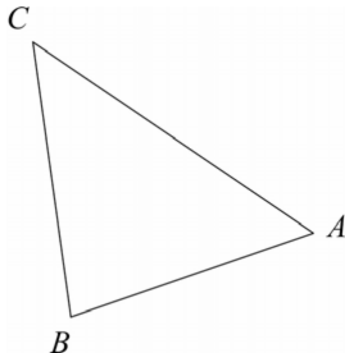
a)



b)



77. Szerkeszd meg az ABC háromszög S súlypontját, és nagyítsd abból a háromszöget 2-szeresére, majd a kapott háromszöget tükrözd a súlypontjára! A keletkező háromszögnek milyen vonalai lesznek az ABC háromszög súlyvonalainak egyenesei, és milyen pontjai az A, B, C pontok?



Megoldás: súlyvonalai, illetve oldalfelező pontjai.

Módszertani megjegyzés: A koordinátageometriai feladatokat a jobb képességű gyerekeknek ajánljuk. Nem igényel több előismeretet az általános iskolában tanultaknál, és fontosnak tartjuk, hogy a tanulók a koordinátageometriai ismereteiket is szinten tartsák.

78. Ábrázold és kösd össze a koordináta-rendszerben a következő pontokat:

$A(-6; 4)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; 4)$, $D(-4; 7)$!

a) Készítsd el a négyszög hasonló képét úgy, hogy az AB oldal képe az $A'B'$ legyen, ha $A'(1; 2)$, $D'(7; 11)$.

Megoldás: $B'(7;-7)$, $C'(13;2)$.

b) Számítsd ki a megfelelő oldalak arányát!

Megoldás: 3 vagy $\frac{1}{3}$.

c) Az A, B és C pontok, illetve az A', B' és C' pontok meghatároznak egy-egy háromszöget. Rajzold meg a magasságokat, végezz méréseket, és határozd meg a két magasság arányát!

Megoldás: A magasságok hossza 3 és 9 egység, az arány 3 vagy $\frac{1}{3}$.

79. Rajzold meg azt a háromszöget, melynek csúcsai: *A*(– 4; 5), *B*(– 7; – 4), *C*(8; 2)! Készítsd el a háromszög hasonló képét úgy, hogy az *AB* oldal képe az *A'B'*, és *A'*(9; – 4), *B'*(15; – 6) legyen! Számítsd ki a hasonlóság arányát is!

Megoldás: A hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, a keresett csúcs: *C'*(11; 4).

80. Rajzolj a füzetedbe egy 6 cm oldalú négyzetet, és valahol a belsejében vegyél fel egy *O* pontot! Kicsinyítsd a négyzetet az *O* pontból a felére!

81. Szerkessz rombuszt, melynek oldala 7 cm, és egyik szöge 60°-os!

a) Kicsinyítsd a rombuszt az egyik csúcsából negyedére!

b) Kicsinyítsd az előző csúcsából $\frac{3}{4}$-ére!

82. Szerkessz paralelogrammát, melynek oldalai 3 cm és 4 cm, és egyik szöge 30°-os! Nagyítsd az egyik csúcsából 3-szorosra!

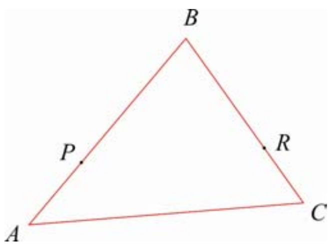
83. Szerkessz deltoidot, melynek szimmetriaátlója 10 cm, és oldalai 5 és 7 cm-esek! Kicsinyítsd az átlói metszéspontjából felére!

84. Az *ABC* háromszög oldalfelező pontjai *P*, *Q* és *R*. Milyen hasonló háromszögeket találunk az ábrán? A hasonlóságnak melyik alapesete teljesül?

Megoldás: Minden kisháromszög egymáshoz is, és az *ABC* háromszöghöz is hasonló, mikvel megfelelő szögeik egyállásúak, tehát egyenlők.

85. *P* és *R* harmadoló pontok. Igazold, hogy $ABC\triangle \sim PBR\triangle$!

Megoldás: Teljesül az alapeset: két-két oldal aránya, és a közbezárt szög páronként egyenlő.



86. Egy trapéz két alapja 12 és 5 cm.

a) Az átlókat berajzolva az alapoknál két háromszög keletkezik. Miért hasonló ez a két háromszög?

b) A két háromszög hasonlóságát felhasználva válaszolj a következő kérdésre: Milyen hosszúságú szakaszokra osztják egymást az átlók, ha azok hossza 8 és 11 cm?

Megoldás:

Az átlók az alapok arányában osztják egymást, vagyis 12 : 5 arányban. Így az átlók darabjai $\frac{12}{12+5}\cdot 8 \approx 5{,}65\,\text{cm}$ és $8-5{,}65 \approx 2{,}35\,\text{cm}$, valamint $\frac{12}{12+5}\cdot 11 \approx 7{,}76\,\text{cm}$ és $11-7{,}76 = 3{,}24\,\text{cm}$.

87. Mekkorák a trapéz szárainak meghosszabbításával kapott kiegészítő háromszög oldalai, ha a trapéz oldalai a hosszabbik alappal kezdve rendre

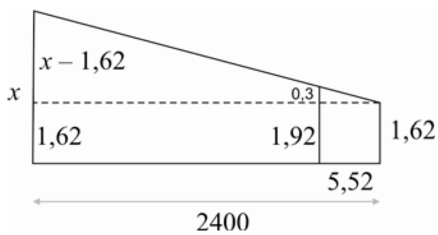
a) 10 cm, 6 cm, 3 cm, 4 cm; b) 11 cm, 5,4 cm, 6 cm, 3,5 cm ?

Megoldás: a) $\frac{12}{7} \approx 1{,}71\,\text{cm}$ és $\frac{18}{7} \approx 2{,}57$ cm; b) 4,2 cm és 6,48 cm.

88. Egy piramis magasságát úgy határozzuk meg, hogy segítségül hívjuk társunkat: a piramis és közöttünk oda állítjuk, ahol a sisakja legfelső pontja éppen egyvonalban látszik a piramis tetejével. A piramis tőlünk 2,4 km távolságban van, a társunk 5,52 méterre. A szemünk 162 cm magasan, társunk sisakjának legfelső pontja 192 cm magasan van a talaj fölött. Milyen magas a piramis?

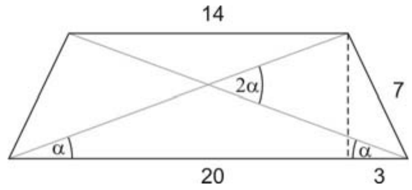
Megoldás:

A talajjal párhuzamosan, 1,62 m magasan meghúzzuk az egyenest, így két hasonló háromszög keletkezik. A megfelelő oldalak arányából $\frac{2400}{5{,}52} = \frac{x-1{,}62}{0{,}3}$, honnan $x \approx 132$. A piramis tehát 132 méter magas.



89. Mekkora a szimmetrikus trapéz átlóinak hajlásszöge, ha alapjai 20 cm és 14 cm, szárai 7 cm hosszúak?

Megoldás:



A trapéz magassága $\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}$,

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{40}}{17}\Rightarrow\alpha\approx 20{,}4°$. A külsőszög-tétel következtében a keresett szög $2\alpha\approx 40{,}8°$.

90. Mekkora a szimmetrikus trapéz átlóinak hajlásszöge, ha alapjai 14 cm és 8 cm, szárai 5 cm hosszúak?

Megoldás: m=4 cm; $tg\alpha=\frac{m}{11}\Rightarrow\ \alpha\approx 20°, 2\alpha\approx 40°$. A keresett szög körülbelül 40°.

91. Milyen hosszúak a szabályos ötszög átlói, ha oldalának hossza

a) 8 cm; b) 11,8 cm?

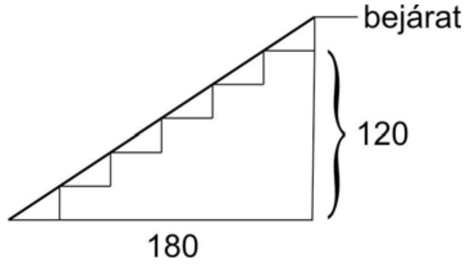
Megoldás: a) 12,9 cm; b) 19,1 cm.

92. Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha $A(-5;2)$, $B(3;5)$, $C(2;-4)$!

Megoldás: 61,2°, 63,1°és 55,7°.

93. Akadálymentesítéshez egy lépcsőre rámpát terveznek. A lépcsők magassága 20 cm, hosszuk 30 cm, és 5 lépcső visz fel a járdáról a bejárathoz (a 6. a bejárat szintje). Milyen hosszú legyen a rámpa? Mekkora szöget zár be a járdával?

Megoldás: 216,3 cm és 33,7°.



94. Az Eiffel-torony magassága 326 m, kilengése a legnagyobb szélben sem haladja meg a 12cm-t. Mekkora a torony tetejének a függőlegessel bezárt szöge, ha a kilengés 12cm?

Megoldás: 0,02°.

Megjegyzés: ez egy nagyon jó tervezői eredmény. Különböző tornyok kilengését érdeklődő tanulók az interneten is kutathatják.

95. Egy 6,9 cm sugarú körben mekkora szögben látszik az átmérő egyik végpontjából az a 8 cm hosszú húr, amely az átmérő másik végpontjából indul ki?

Megoldás: 35,4°.

96. Egy 10 cm sugarú kör húrja a középponttól 5 cm-re található. Számítsd ki a húrhoz tartozó középponti szöget!

Megoldás: A középponti szög 120°.

97. Mekkora annak a 12 cm oldalhosszúságú szabályos sokszögnek a területe, amelynek oldalszáma a) 5; b) 8; c) 12?

Megoldás:

Ábra készítése után a középponti szög és az oldalhossz segítségével kifejezzük egy középponti háromszög magasságát, majd területet számítunk. Végeredmények: a) 247,7 cm^2; b) 695,29 cm^2; c) 1612,2 cm^2.