Matematika „A”

10. szakiskolai évfolyam

# 6. modul
# Kombinatorika, valószínűség, statisztika

Készítette: Vidra Gábor

| | |
|---|---|
| **A modul célja** | Kombinatorikus gondolkodás továbbfejlesztése. A kombinatorikai ismeretek rendszerezése, kiegészítése. Valószínűség szemléletének fejlesztése. Mindennapi élet eseményeivel kapcsolatos valószínűségek vizsgálata, becslése. Szaknyelv bővítése. Statisztikus törvényszerűségek megsejtése, jellemzők megismerése és kiszámítása |
| **Időkeret** | Ajánlott óraszám12 óra, a modulban kidolgozott órák száma: 6 óra. |
| **Ajánlott korosztály** | 10. szakiskolai évfolyam |
| **Modulkapcsolódási pontok** | Tágabb környezetben:<br>Grafikonok, táblázatok használata. Kombinatorika alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során. Az élet során adódó, kombinatorikus gondolkodást igénylő feladatok, szakmai feladatok. Sorozatos mérési eredmények értékelése. A statisztikai ismeretek alkalmazása a legkülönbözőbb területek statisztikáinak értelmezése során (Gazdaság, társadalomtudomány, természettudomány, szakma, stb.)<br><br>Szűkebb környezetben:<br>Halmazok, műveletek racionális számokkal. Arányosság (középponti szögekkel kapcsolatos számítások a körben), egyenletek megoldása.<br><br>Ajánlott megelőző tevékenységek:<br>Alapvető egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. Törtfogalom, műveletek és azok sorrendje. Arányosságok a körben (geometriai számítások). Grafikonok értelmezése, nagysági viszonyok összehasonlítása diagramok segítségével.<br><br>Ajánlott követő tevékenységek: Szakmai feladatok. |

| | |
|---|---|
| **A képességfejlesztés fókuszai** | Becslés, mérés:<br>Megoldások nagyságrendjének, előjelének, számának becslése. Kisebb-nagyobb kapcsolatok alkalmazása.<br><br>Számolás, számlálás, számítás:<br>Algebrai műveletek végzése, kapcsolat az egyenlőtlenség és a grafikon között. Összes megoldás meghatározása leszámlálással. Statisztikai jellemzők kiszámítása.<br><br>Szöveges feladatok, metakogníció:<br>Egyszerűbb feladatok megoldása, összefüggések felismerése, kooperatív képességek fejlesztése.<br><br>Rendszerezés, kombinatív gondolkodás:<br>Műveletvégzés és egyenletmegoldás lépéseinek ismétlése, gyakorlása. A kombinatorika alapvető eszközeinek alkalmazása, lehetséges megoldások megkeresése. Összes, illetve lehetséges megoldások számának meghatározása.<br><br>Induktív, deduktív következtetés: Konkrét esetből következtetés az általánosra. Azonosságok, egyenlőségek alkalmazása konkrét esetekre. |

## Támogató rendszer

A modulhoz készült a 6.1 munkalap, a valószínűség bevezetéséhez. Ezen kívül a tanári útmutatóban találunk feladatokat diákkvartettekhez, módszertani ajánlásokat és mintapéldákat. A mintapéldákat csoportban, a modulhoz készült bemutató segítségével vehetjük át (tankönyv nélkül).
A modulban a differenciálást eltérő nehézségű feladatok adásával, valamint a csoportok kialakításának tudatos szervezésével oldhatjuk meg.

## MODULVÁZLAT

| | Lépések, tevékenységek | Kiemelt készségek, képességek | Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény |
|---|---|---|---|
| **I. Kombinatorika** | | | |
| 1. | Kiválasztás, sorbarendezés – csoportbontás tetszőleges módszerrel | Kooperáció, kommunikáció, kombinatív gondolkodás, metakogníció, számolás | Tetszőleges módszerrel |
| 2. | Diákkvartett | | Tanári útmutató kérdései |
| 3. | Alapfeladatok bemutatása (Alapvető cél a megoldások számának meghatározása „négyzetek” segítségével – ezt a módszert használjuk a feladatok többségében.) | Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás | 1–3. mintapélda |
| 4. | Feladatok megoldása | Kooperáció, kommunikáció, kombinatív gondolkodás, metakogníció, számolás | 1–8. feladatok közül válogatunk |
| 5. | Amikor nem számít a sorrend (mintapéldák, lottó kérdése) | | 4., 5. mintapélda |
| 6. | Vegyes feladatok (tetszőleges módszerrel) | | 19–29. feladatok közül válogatunk |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **II. Statisztika** | | | |
| 1. | Adatok elemzése, ábrázolása (csoportmunkában, majd frontálisan), alapfogalmak, diagramok készítése (tanári magyarázat) | Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, metakogníció | 6. mintapélda, csoportonként 2 dobókocka, szögmérő, vonalzó |
| 2. | Középértékek, medián; „huncut” diagram (frontális, tanári magyarázat) | Kooperáció, kommunikáció, kombinatív gondolkodás, metakogníció, számolás. | 7., 8. mintapélda |
| 3. | Feladatok megoldása (lehetőség szerint csoportmunkában) | Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás. | 30–46.feladatok közül válogatunk |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **III. Valószínűségszámítás** | | | |
| 1. | A valószínűség definíciója (csoportmunka, majd frontális) | | 9. mintapélda, 6.1 munkalap, csoportonként 2 dobókocka |
| 2. | A valószínűség kiszámítása egyszerűbb esetekben (tanári magyarázat, majd frontális munka) | | 10., 11. mintapélda |
| 3. | Alapfeladatok (csoportmunka, esetleg szakértői mozaik, diákkvartett) | | 47–50. feladatok |
| 4. | Feladatok megoldása | | 51–54. feladat |

# I. Kombinatorika

## Kiválasztás, sorbarendezés

*Módszertani megjegyzés:* A kombinatorika a lehetőségek számbavételeként jelenik meg az anyagban, egyszerűbb alkalmazások szintjén. Nem tanítjuk a fogalmakat, viszont próbáljuk elérni a tanulóknál azt, hogy a különböző feladattípusokat (sorrendképzés, kiválasztás visszatevéssel és anélkül) el tudják különíteni egymástól, és a megoldás során használják a mintapéldákban említett modelleket: az összes lehetőség felírását, felrajzolását, valamint azt az ábrát, amelyben az egyes pozíciók lehetőségeinek számát írjuk be).

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladatot csoportmunkában végzik a tanulók.

Lehetőség szerint használjuk a *diákkvartett* módszert!

Ali, Béla és Cecil egymás mellé ülnek.

a) Írd le az összes lehetőséget, ahogyan helyet foglalhatnak!

*Megoldás:* Rövidítésekkel dolgozunk. A lehetőségek: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

b) Ha Dezső is közéjük akar ülni, hány helyre ülhet?

*Megoldás:* 4 helyre, hiszen összesen 4 hely van.

c) Ha Dezső leül az 1. helyre, hányféle lehet az ülési sorrend?

*Megoldás:* 6 féle. az a) szerint.

d) Sorold fel az összes olyan ülési sorrendet, amikor Dezső a második helyre ül! Hányféle lehet ekkor az ülési sorrend?

*Megoldás:* 6 féle. az a) szerint.

e) Hányféle lehet a négy fő ülési sorrendje?

*Megoldás:* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ féle.

### Mintapélda$_1$

Vegyünk elő egy 100-as, 50-es, 20-as és egy 10-es pénzérmét, és állítsuk sorrendbe minél többféleképpen! Jegyezzük fel a sorrendeket, majd a végén számoljuk össze, hogy hányféleképpen tudjuk sorrendbe rakni az érméket!

*Megoldás:*

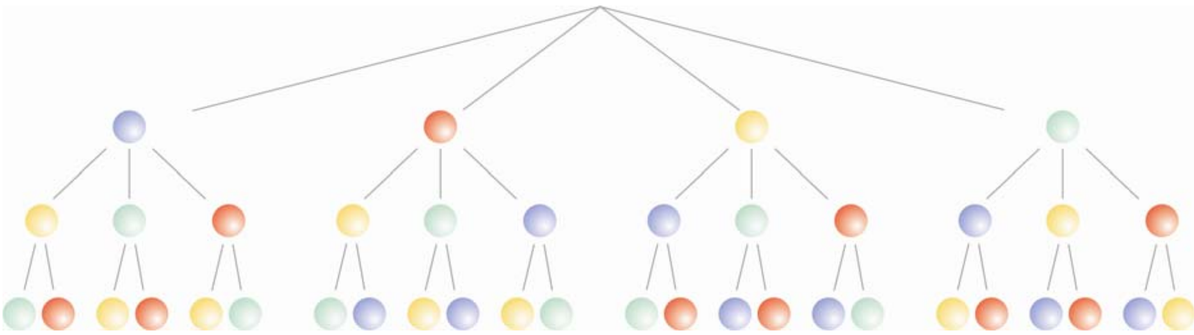
Az első helyre 4 különböző érmét választhatunk, a másodikra 3-at, a harmadikra 2-t, a negyedikre 1 lehetőség marad. Ezt a következő ábrával szemléltethetjük:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

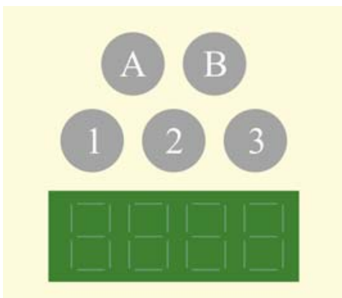
Az egyes helyeken szereplő lehetőségek számát összeszorozzuk. Ugyanis ha rögzítjük az 1. érmét (például 10 Ft-os legyen), akkor a maradék hármat 6 féleképpen tudjuk sorba rakni. Ha egy másik érme az első, a maradék hármat megint 6 féleképpen rakhatjuk sorba stb. Ez azt jelenti, hogy összesen $4 \cdot 6 = 24$ sorba rakási lehetőséget kapunk. A lehetőségek számbavételét kezdhettük volna az utolsó hellyel is, az eredmény ugyanaz.

Ha négy különböző színű golyót szeretnénk sorba rakni, a sorrendek szemléltethetők egy faszerkezettel:



*Módszertani megjegyzés:* A fenti mintapélda és a faszerkezet az ismétlés nélküli permutáció alkalmazását mutatja. Nem említjük a fogalmat, csupán annyit, hogy itt a különböző elemek **összes** sorrendjét kérdezi a feladat.

## Mintapélda$_2$




Az ábrán látható zár 4 jegyű kombinációra nyílik. Hányféle kombináció lehetséges, ha tudjuk, hogy a zárat nyitó kód betűvel kezdődik, és a helyes kombináció

a) tartalmazhat azonos jeleket?

b) nem tartalmaz azonos jeleket?

*Megoldás:*

a) Az első jel 2 féle lehet: A vagy B. A 2., 3. és 4. jel 5 féle (bármelyik jel). A lehetőségeket szemléltető ábránk így alakul:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 5 | 5 |

$$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250$$

b) Az első jel most is kétféle lehet, de a második már csak 4 féle, mert nem azonos az első számmal. Az ábra így alakul:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 2 |

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$$

Ebben a feladatban nem a sorrendek számát kellett megállapítani. A feladat a lehetőségek számának meghatározása volt, és ehhez a megoldásokban használt ábra nagy segítséget nyújt.

*Megjegyzés:* Ne használjuk a „lehetőség” helyett a „kombináció” vagy „variáció” szavakat, mert azok matematikai fogalmakat jelölnek.

## Mintapélda$_3$

Albert, Béla, Cecil, Dóri és Elemér versenyeznek.

a) Írjuk fel, hogy az első két helyen milyen sorrendek alakulhatnak ki!

b) Készítsünk olyan ábrát, amelynek segítségével kiszámítható, hogy az első két helyen hányféle sorrend alakulhat ki!

c) Hányféle sorrend alakulhat ki az első három helyen, ha 5 helyett 10 versenyző van?

*Megoldás:*

a) Rendszerezett formában felírjuk az első két helyezés lehetőségeit:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | AC | AD | AE | BA | BC | BD | BE |
| CA | CB | CD | CE | DA | DB | DC | DE |
| EA | EB | EC | ED | | | | |

b) Mivel két helyre kell beosztani 5 főt, az 1. helyre 5 lehetőség van. Ha kiválasztunk valakit (például Albertet) első helyezettnek, akkor 4 másik versenyző kerülhet a 2. helyre. Így minden egyes első helyezetthez 4 második tartozik, vagyis a lehetőségek száma $5 \cdot 4 = 20$, mint ahogyan a felsoroláskor láttuk.

| | |
|---|---|
| 5 | 4 |

$$5 \cdot 4 = 20$$

c) Az ábránk így alakul:

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 |

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

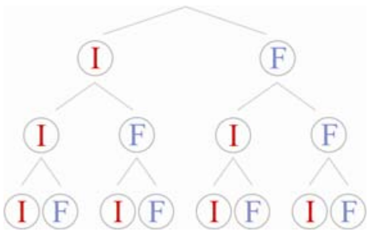
*Módszertani megjegyzés:* A fenti mintapélda az ismétlés nélküli variáció alkalmazását mutatja. Nem említjük a fogalmat, csupán annyit, hogy itt különböző elemekből kiválasztunk néhányat, és ennek a kiválasztásnak az **összes** sorrendjét kérdezi a feladat.

## Feladatok

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladat megoldásakor segítséget nyújt, ha előtte megvizsgáljuk a lehetőségek számát 2, illetve 3 pénzérme esetén. A feladat az ismétléses variációra példa.

**1**. Egy pénzérmét 3-szor dobunk fel. Rajzold fel rendszerezve a dobások összes kimenetelét! (Jelöld F-fel a fejet, I-vel az írást.)

*Megoldás:*




**2**. Egy pénzérmét 4-szer feldobunk.

a) Írd le az összes lehetőséget, amit a fejek, illetve írások feljegyzése után kaphatunk! Hány lehetőséget kaptál?

b) Hányféle eredmény adódhat, ha 6-szor dobjuk fel a pénzérmét?

*Megoldás:*

a) IIII, IIIF, IIFI, IIFF, IFII, IFIF, IFFI, IFFF, FIII, FIIF, FIFI, FIFF, FFII, FFIF, FFFI, FFFF; 16 lehetőség.

b) Mindegyik dobásnak két kimenetele lehet, ezért $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ az eredmény.


**3**. Egy kétsávos zászlót szeretnénk kiszínezni sárga, fekete és piros színek közül kettővel úgy, hogy mindkét sáv lehet akár azonos színű is. Számítással határozzuk meg a lehetőségek számát, majd soroljuk is fel az összes lehetőséget!

*Megoldás:* Az első sávhoz is választhatunk 3 színt, és a 2. sávhoz is:


Az összes lehetőség: sf, sp, ss, ff, fp, fs, ps, pp, pf.

**4**. Egy lóversenyen 7 ló indul. Hányféle lehet az első három befutó sorrendje?

*Megoldás:* Az első helyen befuthat 7 ló, a másodikon már csak 6, a harmadikon csak 5 ló. Összesen 210 lehetőség van.

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 |

$\Rightarrow$ $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

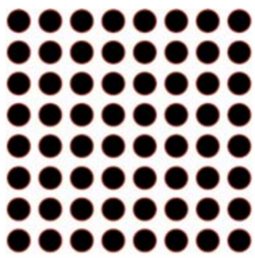
**5**. Egy zsákba piros, sárga, kék és zöld golyót raktunk. Véletlenszerűen húzunk, majd visszatesszük a golyót. Hányféleképpen alakulhat a kihúzott golyók sorrendje, ha háromszor húzunk?

*Megoldás:* Minden húzáskor 4 féle golyót húzhatunk, így $4^3 = 64$ féle sorrendet kaphatunk.

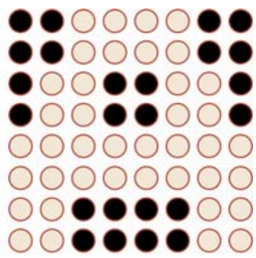
| | | |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 |

$\Rightarrow$ $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$

**6**. A grafikus kijelzőkön sokszor 8 x 8-as pontmátrixban ábrázolják a betűket: a program azokat villantja fel a 64 fényforrásból, amelyikből kirajzolódik egy betű (az ábra egy A betű „képét mutatja). Összesen hány jel programozható a 8×8-as pontmátrixban?



8 x8 -as pontmátrix



Az **A** betű

*Megoldás:* Mivel minden fényforrásnak két állapota van (sötét vagy világos), összesen $2^{64} \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ , vagyis kb. 18 trillió lehetséges állapota van a pontmátrixnak.

**7**. Hány olyan 5 jegyű számot találunk, amelyik

a) 2-re végződik; b) páros; c) 10-zel osztható; d) 5-tel osztható?

*Megoldás:*

a) Az első jegy csak 9 lehet (1, 2, ..., 9), de a második. a harmadik és a negyedik jegyet 10 számjegyből lehet választani (0, 1, ..., 9). Az utolsó számjegy egyféle lehet (csak a 2).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 10 | 10 | 1 |

$\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

b) Hasonló az előzőhöz, de az utolsó számjegy5 féle lehet (0, 2, 4, 6, 8).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 10 | 10 | 5 |

$\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$

c) Az eredmény ugyanannyi, mint az a) esetben, hiszen most is csak egyféle lehet az utolsó számjegy (0). Az eredmény tehát 9 000.

d) Most az utolsó számjegy csak 2 féle lehet (0 vagy 5).

| 9 | 10 | 10 | 10 | 2 |
|---|---|---|---|---|

$\Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$

**8**. 7 gyermeket hányféleképpen lehet sorba állítani?

*Megoldás:* $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ lehetőség van.

**9**. Egy versenyen 10-en indultak. Hányféle sorrendben kerülhet ki közülük az első három helyezett?

*Megoldás:*

| 10 | 9 | 8 |
|---|---|---|

$\Rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

**10**. Hányféleképpen lehet kitölteni a totószelvényt?

*Megoldás:*

Minden kérdésre 3 válasz lehetséges (1, 2, X), és 14 kérdés van. Így összesen $3^{14} = 4782969$ a lehetőségek száma.

**11**. Egy aktatáska két számzára 4 – 4 korongot tartalmaz, mindegyiken 10 – 10 számjeggyel. Összesen hányféle számkombináció állítható be a két záron együtt?

*Megoldás:*

Minden korongon 10 féle jel választható, és 8 korong van. A lehetőségek száma: $10^8 = 100\,000\,000$.

**12**. a) Hány olyan 4 jegyű szám van, amelynek a számjegyei 0, 1, 2, 3?

b) Írd fel az összes olyan 4 jegyű számot, amelynek a számjegyei 0, 1, 2, 3, és egy számjegy csak egyszer szerepelhet! Felírás nélkül hogyan lehetne kiszámítani, hogy hány ilyen szám van?

*Megoldás:* a) $3 \cdot 4^3 = 192$ darab; b) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ darab;

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1023 | 1032 | 1203 | 1230 | 1302 | 1320 |
| 2013 | 2031 | 2103 | 2130 | 2301 | 2310 |
| 3012 | 3021 | 3102 | 3120 | 3201 | 3210 |

**13**. Ilonka néni öt, egymás melletti ágyás közül kettőbe salátát (S), háromba paprikát (P) szeretne ültetni úgy, hogy két szomszédos ágyásba ne kerüljön saláta. Például:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| S | P | S | P | P |

Keresd meg a megadott példától eltérő és a feltételeknek megfelelő összes lehetséges beültetést! Írd be az előzőhöz hasonló ábrákba a saláta (S) és a paprika (P) betűjelét!

*Megoldás:* SPPSP, SPPPS, PSPSP, PSPPS, PPSPS.

**14**. Zsófi iskolai szekrényén egyszerű számkombinációs lakat van, de sajnos elfelejtette a lakat kódját. Először csak arra emlékezett, hogy a kód olyan háromjegyű szám, amiben a 2, 3, 4 számok mindegyike pontosan egyszer szerepel.

a) Hány lehetőséget kellene kipróbálnia, hogy biztosan ki tudja nyitni a lakatot?

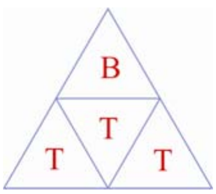
b) Mielőtt a próbálgatásnak nekilátott volna, eszébe jutott, hogy a háromjegyű kódszám a fenti feltételek mellett még páros is. Ennek ismeretében hány lehetőséget kellene kipróbálnia, hogy biztosan ki tudja nyitni a lakatot?

*Megoldás*: a) 6 kombinációt; b) 4-et.

**15**. Egy faipari üzemben szabályos háromszög alakú mozaikparkettát gyártanak. Egy mozaiklap négy egyforma, szabályos háromszög alakú falapból áll össze a példa szerint. A kis lapok bükkfából (B), illetve tölgyfából (T) készülnek. Mindegyik mozaiklap kétféle fából készül.

Tervezd meg az összes különböző összeállítású mozaikparkettát! Az egymással (esetleg forgatás után is) fedésbe hozható összeállításokat nem tekintjük különbözőnek. Írd be a háromszögekbe a kis lapok anyagának kezdőbetűjét a példa szerint!

Pl.:



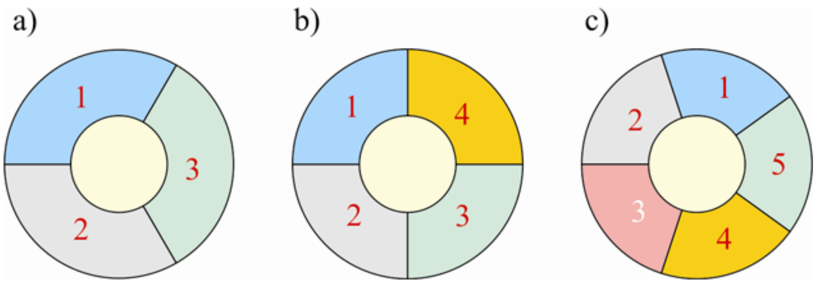
**16**. Adottak a következő betűk: M, M, A, A, A, T, T, E, I, K. Ha kirakjuk az összes lehetséges sorrendet, akkor hány esetben fordul elő a MATEMATIKA szó? A színek is számítanak!

*Megoldás:* Az első helyre 2 választás lehetséges, mert 2 darab M betű van. Ez azonban az 5. pozíciót is meghatározza: 1 darab M betű marad. Hasonlóan a többi pozíciót is megvizsgálhatjuk:

| M | A | T | E | M | A | T | I | K | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\Rightarrow \quad 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

**17**. Egy cég a logóján található, számmal jelzett területeket az ábrán látható színekkel akarja kiszínezni. Hányféle különböző színezés adható meg ugyanezekkel a színekkel? (Két színezés akkor különböző, ha a korongok elforgatásával nem vihetők át egymásba.)

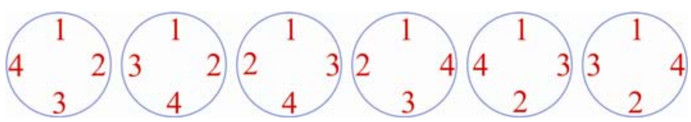



*Megoldás:* a) 2 féle; b) 6 féle; c) 24 féle.

*Módszertani megjegyzés:* A feladat a ciklikus permutáció megértését célozza anélkül, hogy említenénk a definíciót vagy a képletet. A ciklikus permutációk száma $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, hiszen a körvonalnak nincs kezdete és vége, az első színt akárhová tehetjük. A feladathoz típuspélda a kerekasztal köré ültetés, ahol az első hely bármelyik lehet, ha a székek nincsenek megkülönböztetve.

**18**. Egy oszlop alakú hirdetőtáblán négy plakátot akarunk egymás mellé ragasztani. A négy plakát együtt teljesen körbefogja az oszlopot. Hányféle sorrendben helyezhetők el a plakátok az oszlopon?

*Megoldás:* 6 egymástól különböző sorrend lehetséges.



# Amikor nem számít a sorrend

## Mintapélda$_4$

Egy rajzversenyen öt indulóból (Albert, Béla, Cili, Dezső, Elemér) kettő fog egyforma díjat kapni. Írjuk fel az összes lehetőséget a díjak szétosztására!

*Megoldás:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| AB | AC | AD | AE |
| ~~BA~~ | BC | BD | BE |
| ~~CA~~ | ~~CB~~ | CD | CE |
| ~~DA~~ | ~~DB~~ | ~~DC~~ | DE |
| ~~EA~~ | ~~EB~~ | ~~EC~~ | ~~ED~~ |

Először írjuk fel a lehetséges sorrendeket, utána vizsgáljuk meg, hogy milyen sorrendek adják ugyanazt az eredményt! Az AB és a BA páros különböző sorrendet, de azonos eredményt ad (mert ugyanannak a két személynek a kiválasztását mutatja). Hasonlóan azonos eredményt ad az AC és a CA, AD és DA stb. A megmaradó párok alkotják a megoldást: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Vizsgáljuk meg, hogy a fenti mintapélda miben különbözött az eddigi feladatoktól! Eddig sorrendeket kerestünk, és gyakran a sorrendek számának meghatározása volt a feladat. Ebben a példában azonban nem számít a sorrend, vagyis vannak olyan sorrendek, amelyek „egynek számítanak”, ugyanazt az eredményt adják a feladat szempontjából.

A mintapéldában a sorrendek száma 20, de ezt 2-vel osztjuk, mert 2 – 2 sorrend szolgáltat azonos eredményt (2 embert 2 féleképpen lehet sorrendbe állítani). Ezért maradt 10 lehetőség a feladat végére.

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladat előtt célszerű kiadni a csoportoknak a feladat egyszerűsített változatát: egy boltban 4-féle sisakot árulnak: 1, 2, 3, 4. Jancsi és Juliska bemennek a boltba, hogy vegyenek két különböző sisakot. Sorold fel, hogy hányféleképpen választhatnak!

A sorrend most nem számít, ezért 6 lehetőséget kapunk.

## Mintapélda$_5$

Három motoros különböző bukósisakot akar venni egy boltban, ahol ötféle sisak kapható. Hányféleképpen választhatják ki a három sisakot?

*Megoldás:*

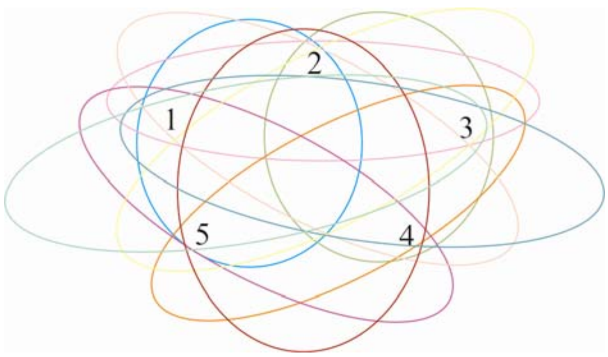
A sorrendek száma: $\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3} \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Vizsgáljuk meg, hány sorrend ad azonos eredményt!

„Egynek számít” az a hármas, amelyik azonos elemeket (sisakokat) tartalmaz, de különböző sorrendben. Ha a sisakokat számokkal jelöljük meg, és az 123 sisakokat választjuk ki, akkor ezzel azonos eredményt ad az 132, 213, 231, 321, 312 sorrend is. Ez minden számhármasra igaz: három elemet 6-féleképpen lehet sorrendbe állítani, ezért a sorrendek számát 6-tal kell osztani: $\frac{60}{6} = 10$, vagyis 10-féleképpen tudnak kiválasztani három különböző sisakot.

A feladat modellezhető egy 5 elemű halmazzal, amiben hármasával csoportosítjuk az elemeket – ekkor az a kérdés, hányféleképpen lehet bekeretezni hármasával az elemeket. Úgy is fogalmazhatunk, hogy egy 5 elemű halmaznak hány 3 elemű részhalmaza lehet.

Az biztos, hogy nem jutunk eredményre, ha megpróbáljuk felrajzolni az 5 számot és bekeretezni hármasával annyiféleképpen, ahányféleképpen csak tudjuk, és utána összeszámoljuk (lásd ábra). Ráadásul bonyolultabb kérdések esetén ez kivitelezhetetlen (például a lottó esetén 90 darab számból kell kiválasztani 5-öt, és ekkor 90 elemű halmazt kellene felrajzolni).




Szerencsére nem az a feladat, hogy az összes lehetséges, egymástól különböző csoportosítást megtaláljuk, hanem csak a számukat kell kiszámítani. Ezt a fentiek értelmében **a sorrendek meghatározásával kezdjük, majd megvizsgáljuk, hogy vannak-e azonos eredményt adó sorrendek. Ha vannak, akkor elosztjuk annyival, ahány sorrend adja ugyanazt az eredményt.**

Például az 5-ös lottó esetén 90 számból kell 5-öt kiválasztani. A lehetséges kiválasztások számát így tudjuk meghatározni:

- 90-ből 5 számot ennyiféleképpen tudunk sorba állítani:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 89 | 88 | 87 | 86 |

$\rightarrow 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$

- Mivel vannak azonos eredményt adó elrendezések, a fenti szorzatot elosztjuk annyival, ahányféleképpen 5 elemet sorba tudunk állítani:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$\rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

- Az eredmény: $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268$. Ennyiféleképpen lehet kitölteni a lottószelvényt.

Az eredmény azt is jelenti, hogy egy a több mint 43 millióhoz az esélye annak, hogy ötösünk lesz a lottón, ha kitöltünk egy szelvényt.

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladatok némelyikében számít, némelyikében nem számít a sorrend.

## Feladatok

**19**. Egy zsákba négy golyót rakunk: pirosat, kéket, zöldet és fehéret. Kihúzunk egy golyót, feljegyezzük a színét, majd visszatesszük. Négy ilyen húzás után hányféle színsorrend alakulhat ki?

*Megoldás:* Minden húzásnál 4 lehetőség van, ezért $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$ féle sorrend lehet. A visszatevéses mintavételt szintén modellezhetjük „rácsos” formában, amikor minden kis négyzetbe ugyanaz a szám (most 4-es) kerül.

**20**. Egy falu lakosságát vizsgálva a szociológusok a lakosok nemét íratják ki számítógéppel. A számítógép véletlenszerűen kiválaszt tíz főt, majd kiírja a nemüket (nő vagy férfi). Hányféle kimenetel lehetséges a 10 fő esetében?

*Megoldás:* Minden esetben 2 lehetőség lehet, ezért $2^{10} = 1024$ féle kimenetel lehetséges.

**21**. A TOTÓ szelvényen 13+1 kérdés található, és mindegyikre háromféle tippünk lehet: 1, 2 vagy X. Hányféle kitöltése lehet a totószelvénynek?

*Megoldás:* Minden kérdésre 3 válasz lehetséges, ezért a lehetséges kitöltések száma:

$3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{13} = 1594323$.

**22**. Egy dobókockával kétszer dobunk. a) Hányféle szám-kettest kaphatunk?

b) Ha összeadjuk a dobások összegét, hányféle összeget kaphatunk?

*Megoldás:* Érdemes felsorolással próbálkozni. $6 \cdot 6 = 36$ féle számpárt kaphatunk, összegnek viszont csak $2, 3, \ldots, 12$, vagyis $11$ félét kaphatunk.

*Módszertani megjegyzés:* A következő két feladat „apró” különbsége segít megérteni a sorrend fontosságát a számolás során.

**23**. 10-tagú társaság választ egy elnököt, egy titkárt és egy pénztárost. Hányféleképpen teheti ezt meg?

*Megoldás:* $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ -féleképpen (a sorrend számít).

**24**. 10-tagú társaság 3-tagú vezetőséget választ. Hányféleképpen teheti ezt meg?

*Megoldás:* $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ lenne a sorrendek száma, de vannak azonos eredményt adó elrendezések: az azonos embereket tartalmazó sorrendek 1-nek számítanak. Mivel 3 kiválasztott embert 6 féle sorrendbe lehet állítani, ezért Így a válasz: $\frac{720}{6} = 120$.

**25**. A 6-os lottón 45 számból választunk ki 6 számot. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 6-os lottószelvényt?

*Megoldás:* $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ sorrendbe lehet ugyanazt a 6 számot állítani. A kitöltéseknél a sorrend nem számít, ezért 720-szal osztani kell a sorrendek számát. Az eredmény ezért

$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{720} = 8145060$.

**26**. 4 narancsos és 2 mentolos tiktakból hányféleképpen lehet két különböző ízűt kiválasztani?

*Megoldás:* $4 \cdot 2 = 8$ féleképpen.

**27**. Tudjuk, hogy 6 tolvajból 4 igazat mond és 2 hazudik. Hányféleképpen lehet 2 igazmondót és 1 hazudóst egy cellába zárni? Az elméleti meggondolás mellett próbáld felsorolni a lehetőségeket is!

*Megoldás:* 4-ből kell 2-t kiválasztani, amit $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ féleképpen tehetünk meg, míg a 2 hazudósból 2 féleképpen választhatunk. Az eredmény: 12 lehetőség. A felsorolásnál jelölhetjük például számokkal az igazmondókat (1, 2, 3, 4), és betűkkel a hazudósokat (a, b), és felírhatjuk az összes lehetőséget: 12a, 13a, 14a, 12b, 13b, 14b, 21a, 23a, 24a, 21b, 23b, 24b, 31a, 32a, 34a, 31b, 32b, 34b, 41a, 42a, 43a, 41b, 42b, 43b. Minden hármas kétféle sorrendben fordul elő (pl. 12a és 21a: ugyanazt a 3 személyt jelöli), ezért a felsorolt 24 esetből minden második jöhet számításba, vagyis 12 lehetőség.

**28**. 6 piros és 4 bordó cserépből kell kiválasztanunk 2 piros és 2 bordó cserepet. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

*Megoldás:* 6-ból 2-t $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ féleképpen választhatunk ki, míg 4-ből 2-t $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ féleképpen.

A megoldás a kettő szorzata: 90.

**29**. Hányféle 3 találatos szelvény lehetséges elméletileg az ötöslottón?

*Megoldás:* 5-ből kell kiválasztanunk 3-at (jó találatok), és 85-ből 2-t (rossz találatok). Az eredmény: $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}\cdot\frac{85\cdot 84}{2}=35700$ féle 3 találatos szelvény lehet.

# II. Statisztika

*Módszertani megjegyzés:* A téma első mintapéldájának feldolgozásához dobókocka szükséges, csoportonként 2 – 2 darab. Az oszlopdiagramok rajzolásához rövid vonalzót célszerű használni, a kördiagramokhoz szögmérőt. Lehetőleg színes ábrákat rajzoljunk!

A statisztika feladata a valóság számszerű adatainak megfigyelése, összegyűjtése, rendszerezése, elemzése, tárolása és modellezése. Mindennapi életünkben is nagy a szerepe, például a biztosítások díjait, vagy az ország éves költségvetését is statisztikai alapon állapítják meg. A tudományág alapjainak megismerése lehetőséget ad arra, hogy az adatok elemzésén keresztül közelebb jussunk az újságokban látható grafikonok és megállapítások értelmezéséhez.

*Módszertani megjegyzés:* A következő játékot csoportban játsszuk: a csoportban 2 párban dobálnak kockát: egyikük dobja, a másik pedig az eredményeket jegyzi fel. 20-20 dobás eredményét rögzítik, majd a csoportok elemzik az adathalmazt a megadott a) – c) szempontok alapján. Ezután valaki frontálisan összesíti a csoportok c) feladatban kapott eredményeit, hogy megállapítsuk a dobott számok átlagát. Fontos, hogy a csoportokon belül keressék meg a megoldások részleteit: mit írjanak az a) feladatban a táblázat sorába és oszlopába, az oszlopdiagram tengelyein milyen feliratok legyenek, és a kördiagram felrajzolásához milyen adatokra van szükségük.

## Mintapélda$_6$

Dobjunk fel 20-szor egy dobókockát, és írjuk fel az eredményeket egy papírra. Az adathalmazt (más néven mintát) elemezzük a következő szempontok alapján:

a) Állapítsuk meg az egyes adatokról, hogy hányszor fordulnak elő a mintában, és foglaljuk az eredményeket táblázatba!

b) Állapítsuk meg a legnagyobb és a legkisebb adat különbségét!

c) Számítsuk ki az adatok összegét és átlagát!

d) Ábrázoljuk oszlopdiagramon és kördiagramon az adatokat!

e) Melyik a legtöbbször előforduló érték?

*Megoldás:*

a) Például ha az adathalmaznak ezt kaptuk: 2, 3, 1, 5, 4, 6, 2, 4, 1, 1, 4, 2, 4, 5, 6, 2, 6, 2, 5, 6, akkor a táblázatunk így alakul:

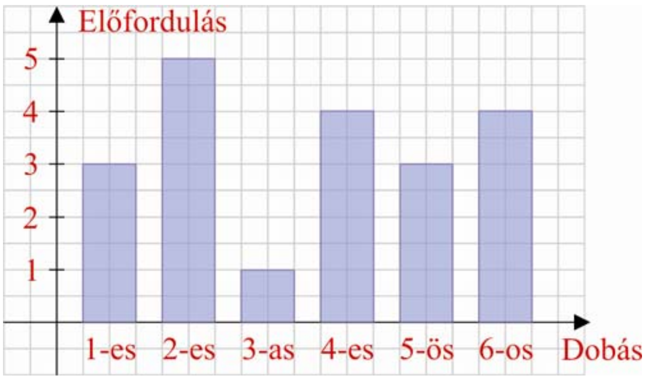
| Dobás | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Előfordulás | 3 | 5 | 1 | 4 | 3 | 4 |

b) A legnagyobb adat 6, a legkisebb 1, a különbség tehát 6 – 1 = 5.

c) Az adatok összege: $3\cdot 1+5\cdot 2+1\cdot 3+4\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6=71$.

Az adatok átlaga: $\text{átlag}=\dfrac{\text{adatok összege}}{\text{adatok száma}}=\dfrac{71}{20}=3{,}55$.

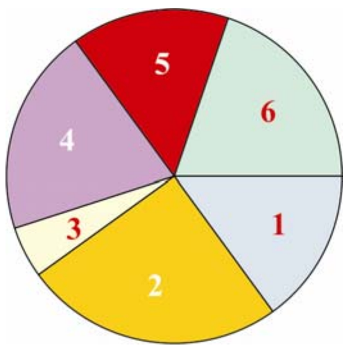
d) Az oszlopdiagram tengelyeire a „Dobás” és az „Előfordulás” feliratok kerülnek, és az adatokat értelemszerűen ábrázoljuk:




A kördiagram körcikkeinek középponti szögét ki kell számítani. Ezeket arányosság alkalmazásával határozzuk meg, mert a középponti szögek nagysága egyenesen arányos az előfordulások számával:

- Az 1-es dobás esetében $3:20=x:360 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{360°\cdot 3}{20}=54°$.
- A 2-es dobás esetében: $5:20=x:360 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{360°\cdot 5}{20}=90°$.
- A 3-as dobás esetében: $1:20=x:360 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{360°\cdot 1}{20}=18°$.
- A 4-es dobás esetében: $4:20=x:360 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{360°\cdot 4}{20}=72°$.
- Az 5-ös dobás esetében: 54°, mint az 1-esnél.
- A 6-os dobás esetében: 72°, mint a 4-esnél.

*Módszertani megjegyzés:* A megbeszélés során kérdezzük meg a tanulókat, hogyan lehetne ellenőrizni, hogy helyesen számoltunk-e. (Adjuk össze a szögeket, és ha 360° az összeg, akkor valószínűleg helyesen számoltunk.)

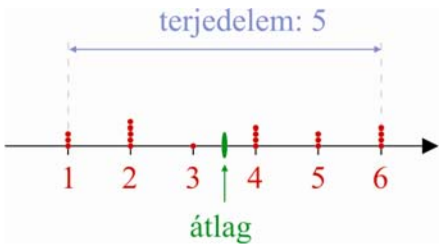


e) A leggyakoribb érték a 2-es, abból van a legtöbb a mintában.

A mintapéldában több statisztikai fogalmat is használtunk:

- **minta terjedelme**: a legnagyobb és a legkisebb érték különbsége;
- **módusz**: leggyakoribb adat;
- **átlag**: adatok összege osztva az adatok számával;
- **gyakorisági táblázat**: az elemek előfordulásainak a számát mutatja;
- **gyakorisági diagram**: az elemek előfordulásainak a számát mutatja, oszlopdiagram formájában;
- **kördiagram**: az elemek előfordulásainak arányát mutatja.

Az adatokat és egyes jellemzőiket számegyenesen is ábrázolhatjuk:




## Mintapélda$_7$

Egy gyárban 6 ember 90 fabatkát keres, az igazgatóhelyettes 150 fabatkát, az igazgató 222 fabatkát. Mennyi a gyárban az átlagkereset?

*Megoldás:* Az $\text{átlag} = \dfrac{\text{adatok összege}}{\text{adatok száma}} = \dfrac{6 \cdot 90 + 150 + 222}{12} = \dfrac{912}{8} = 114$ fabatka.

Az előző példa azt mutatja, hogy az átlag nem mindig jellemzi jól az adatokat: a kiugró értékek „elrontják” az átlagot. Ezért más középértékeket is használunk, amelyek egyike a medián.

A **medián** a rendezett minta középső adata, ha páratlan számú adat található a mintában. Páros számú adat esetén a medián a rendezett minta két középső adatának átlaga.

A gyárban (7. mintapélda) a fizetések 8 adatát sorban felírjuk, és kijelöljük a középső két számot:

$$90,\ 90,\ 90,\ \boxed{90,\ 90,}\ 90,\ 150,\ 222$$

A két középső szám átlaga $\frac{90+90}{2}=90$. Vagyis a fizetések mediánja 90, ami már jobban mutatja a kereseti viszonyokat.

*Módszertani megjegyzés:* A statisztikában gyakran hivatkoznak az átlagra (átlagkereset, átlagéletkor stb.). Az átlagot ilyen esetben csak akkor tekinthetjük informatívnak, ha az adatok szórását is ismertetik, azonban a szórás nem tartozik a tananyagba. Kicsit durvább becslés, de az adatok elhelyezkedését az is jellemzi, ha megmondják, hogy az adatok mekkora része található az átlag alatt, illetve felett. Próbáljuk az átlag meghatározása mellett ezt az igényt is felkelteni a tanítványainkban.

A 4. mintapéldában a **medián** (a középső adat) a 10. és a 11. adat átlaga. De vigyázat! A mintát előtte rendezni kell!

$2, 3, 1, 5, 4, 6, 2, 4, 1, \boxed{1, 4,}\ 2, 4, 5, 6, 2, 6, 2, 5, 6$ NEM MEDIÁN !

| Dobás | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Előfordulás | 3 | 5 | 1 | 4 | 3 | 4 |

9 adat

13 adat

$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, \boxed{4, 4,}\ 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6$ MEDIÁN: 4

A sorbarendezett mintában a 10. és a 11. adat egyaránt a 4, így azok átlaga, a **medián** is 4.

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladatokban kérdezzük meg a gyerekeket, hogy mi a véleményük a következő diagramokról. Jól szemlélteti az adatokat a választott diagramtípus? A csoportban vitassák meg a kérdéseket, azután a tanár jelére a szóvivők előadják a csoport véleményét.

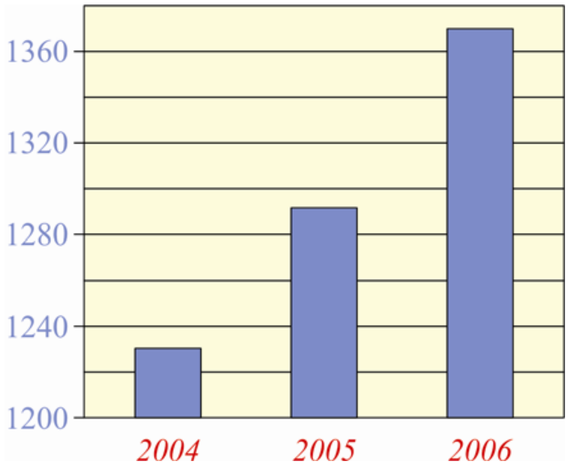
## Mintapélda$_8$

Egy városban tavalyelőtt 1230, tavaly 1291, idén 1368 új lakás épült, és ezt diagramon is ábrázolták. A polgármester a következő megjegyzést fűzte egy előadáson a diagramhoz: „Városunkban nagyarányú lakásszám növekedés tapasztalható az utóbbi években."

a) Meg tudnád-e támadni matematikai érvekkel ezt a mondatot?

b) Mi a hiba ezzel a grafikonnal?

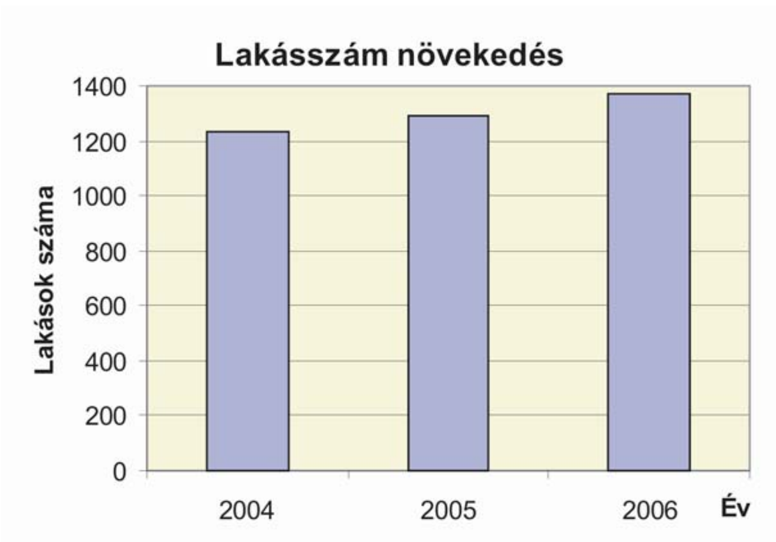
c) Érdemes-e kördiagramon ábrázolni az adatokat?




*Megoldás:*

a) A növekedés aránya nem nagy, ui. 2005-ben a növekedés $\frac{1291-1230}{1230}\cdot 100 \approx 5\,\%$ a 2004. évi lakásszámhoz képest, és 2006-ban a 2005. évi lakásszámnál $\frac{1368-1290}{1291}\cdot 100 \approx 6\,\%$-kal volt több lakás, ami nem nagyarányú növekedés.

b) A diagram nagyarányú növekedést mutat, hogy a polgármester szavait alátámassza. A hiba az, hogy nem 0-ról indul a függőleges tengely, hanem 1200-ról. 0-ról indulva mást mutat a diagram. A tengelyekre nem írtak megnevezést és egységet. Helyesen a diagram így nézne ki:




c) Kördiagramon nem érdemes ábrázolni az adatokat, mert azok egy folyamatot mutatnak, a kördiagram pedig akkor hasznos, ha az adatok egymáshoz viszonyított arányát akarjuk ábrázolni.

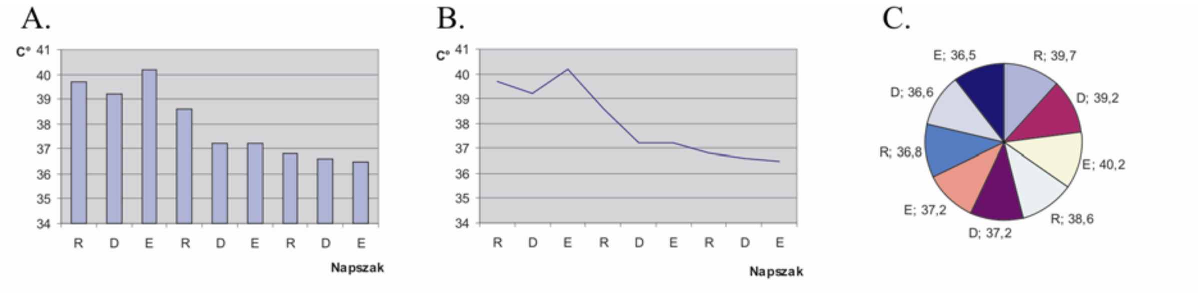
# Feladatok

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladatok megoldását csoportmunkában javasoljuk.

**30**. A következő táblázat egy beteg lázadatait tartalmazza (R: reggel, D: délben, E: este).

| Idő | 1. nap | | | 2. nap | | | 3. nap | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | R | D | E | R | D | E | R | D | E |
| Testhőmérséklet | 39,7 | 39,2 | 40,2 | 38,6 | 37,2 | 37,2 | 36,8 | 36,6 | 36,5 |

a) Az alábbi diagramok közül melyik ábrázolja legjobban a lázadatokat: az A jelű oszlopdiagram, a B jelű grafikon vagy a C kördiagram?




*Megoldás:* A B jelű grafikon.

b) Az említett diagramtípusokból melyik ábrázolja legjobban

- az adatok egymáshoz viszonyított arányát;
- az adatok időbeli változását;
- az adatok nagyságát?

*Megoldás:* Az egymáshoz viszonyított arányt a kördiagram, az időbeli változást a grafikon, a nagysági viszonyokat az oszlopdiagram.

**31**. Józsi négy tantárgyat tart fontosnak tanulmányai szempontjából: a matematikát, a magyart, a történelmet és a németet.

| **Tantárgy** | **8. év vége** | **9. év vége** | **10. év vége** |
|---|---|---|---|
| matematika | 4 | 3 | 5 |
| történelem | 3 | 4 | 4 |
| magyar | 4 | 4 | 5 |
| német | 5 | 4 | 3 |

A 8., 9. és 10. évfolyam végi eredményeket összevetve állapítsuk meg, hogy mennyit változott a négy tantárgyból számított átlag az egyes évfolyamokon!

*Megoldás:* Az átlagok: 4,00; 3,75; 4,25. Az átlagok változásai: – 0,25 és + 0,5.

**32**. Egy üzemben öten dolgoznak, a keresetük 70 tallér, 80 tallér, 90 tallér, 100 tallér és 110 tallér. Mennyi az átlagkereset az üzemben?

*Megoldás:* $\frac{70+80+90+100+110}{5}=90\,\text{tallér}$.

**33**. Egy kisvállalkozásnak három alkalmazottja van, a keresetük 90 tallér, 120 tallér és 180 tallér.

a) Mennyi az átlagkereset?

b) Ha mindenkinek 15 tallérral növelik a keresetét, mennyivel változik az átlagkereset?

c) A fizetéseket a következő módon, differenciáltan növelik: a 90 tallért kereső fizetéséhez 10 tallért, a 120-et kereső fizetéséhez 20 tallért, a 180 tallért kereső fizetéséhez 30 tallért adnak. Igaz-e, hogy az átlagkereset 20 tallérral, vagyis a növekedés átlagával változik?

d) Ha egy új alkalmazottat vesznek fel, mennyi fizetést adjanak neki, hogy az addigi alkalmazottak fizetését megtartva az átlagkereset 5 %-kal növekedjen?

*Megoldás:* a) $\frac{90+120+180}{3}=130\,\text{tallér}$;

b) Spekuláció helyett számoljunk: $\frac{105+135+195}{3}=145\,\text{tallér}$, vagyis az átlagkereset 15 tallérral változik;

c) $\frac{100+140+210}{3}=150\,\text{tallér}$, vagyis 20 tallérral változik az átlagkereset;

d) $x$-szel jelöljük az új dolgozó keresetét. Az átlagkereset 5%-os növekedése: $130\cdot 1{,}05=136{,}5$. Az átlag $\frac{90+120+180+x}{4}=136{,}5 \quad\Rightarrow\quad x=156\,\text{tallér}$.

**34**. Egy osztályban 12-en tanulnak angolt és 16-an németet. Az angolos csoport félévi átlaga 3, a németes csoport átlaga 3,5.

a) Igaz-e, hogy a két csoport együttes átlaga 3,25?

b) Teljesül-e a feladatban, hogy az átlagok átlaga egyenlő az átlaggal?

*Megoldás:* a) Az együttes csoportban a jegyek összegét osztjuk az összes jegyek számával:

$\frac{12\cdot 3+16\cdot 3{,}5}{12+16}=\frac{92}{28}\approx 3{,}29$. b) Az átlagok átlaga 3,25, ami nem egyenlő az átlaggal.

**35**. Egy festéküzletben kétfajta festéket vásároltunk: 5 kis dobozost és 5 nagy dobozost. A kis dobozosok átlagára 12 tallér, a nagy dobozosoké 22 tallér.

a) Mennyi az összes vásárolt festék átlagára?

b) Igaz-e ebben a feladatban, hogy az átlagok átlaga egyenlő az átlaggal?

*Megoldás:* a) A festékek átlagára $\frac{5\cdot 12+5\cdot 22}{5+5}=\frac{170}{10}=17$; b) Az átlagok átlaga $\frac{12+22}{2}=17$, ami megegyezik a festékek árával.

*Módszertani megjegyzés:* A tanulókkal célszerű megbeszélni, hogy az átlagok átlaga akkor egyezik meg az adatok átlagával, ha az egyes átlagokat ugyanolyan számú adathalmazokból számítottuk.

**36.** Egy cégnél átlagosan 22 hónapja dolgoznak az alkalmazottak. Az igazgató 40 hónapja, a helyettese 38 hónapja dolgozik a cégnél, és legutoljára fél éve jött alkalmazott.

a) Hány hónapja dolgozik a cégnél az a két ember, aki egy időben állt munkába?

b) Átlagosan hány hónapot dolgoztak az alkalmazottak 5 hónappal ezelőtt?

*Megoldás:*

a) Ha $x$ hónapja dolgozik a két ember, az átlag $\frac{40+38+6+2x}{5}=22 \quad\Rightarrow\quad x=13$ hónap.

b) $\frac{35+33+1+2\cdot 8}{5}=17$ hónap volt az átlag.

**37**. Egy focicsapat hét meccset megnyert, két mérkőzést elveszített, és három lett döntetlen. Ezen a bajnokságon a győzelemért 3 pont jár, a döntetlenért 1, a vereségért nem jár pont.

a) Hány pontja van a csapatnak?

b) Mennyi a meccsenkénti pontátlag?

c) Növelhető-e a meccsenkénti gólátlag egytizeddel egyetlen mérkőzés alkalmával?

d) Ábrázold kördiagramon a mérkőzések eredményét!

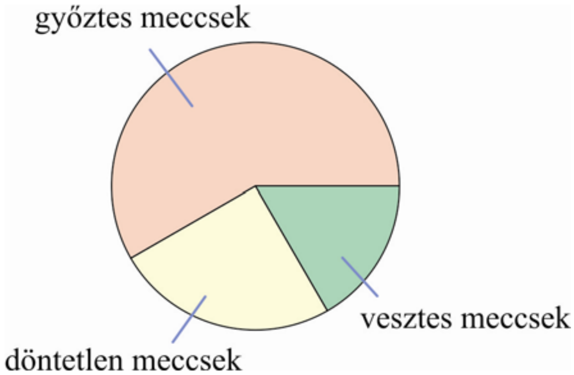
*Megoldás:*

a) $3\cdot 7+3=24$ pontja van a csapatnak.

b) 12 meccset játszott a csapat, a meccsenkénti pontátlag $\frac{24}{12}=2$.

c) Ha a következő meccsen nyer a csapat, az új átlag $\frac{27}{13} \approx 2{,}08$-ra változik, vagyis nem javítható a pontátlag egy meccsen egy tizeddel.

d) $\frac{7}{12} \cdot 360° = 210°$ a nyertes meccseké, $\frac{3}{12} \cdot 360° = 90°$ a vesztes meccseké és $\frac{2}{12} \cdot 360° = 60°$ a döntetlen meccsek körcikkének középponti szöge.




**38**. Egy üzemben az egyik műszakban összeírta a főnök, hogy a dolgozók hány munkadarabot gyártottak: 17; 21; 18; 19; 17; 18; 16; 16; 22; 21; 16; 18.

a) Készíts gyakorisági táblázatot és gyakorisági diagramot a teljesítményekből!

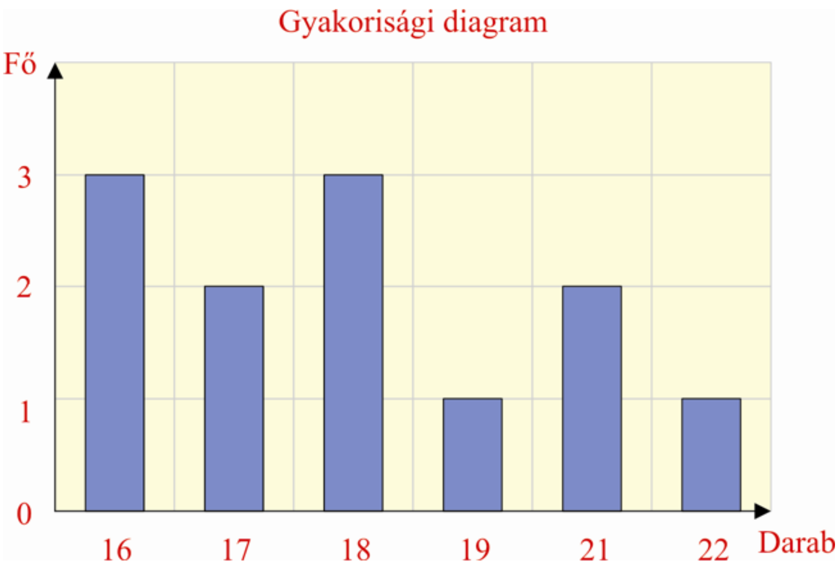
b) Határozd meg, hogy hány dolgozó gyártott kevesebbet az átlagnál!

c) Határozd meg a teljesítmények mediánját (középső adatát)!

*Megoldás:*

a)

| Darab | 16 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fő | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

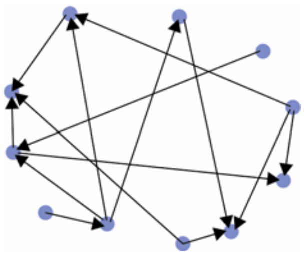


b) Az átlag: $\frac{219}{12} = 18{,}25$, ezért 8 dolgozó nyújtott átlag alatti teljesítményt.

c) A medián a 6. és a 7. elemek átlaga a rendezett mintában, ami 18.

*Módszertani megjegyzés:* A következő feladatban egy gráf szerepel, ami szakiskolában nem tananyag, azonban az ábrázolást és alkalmazását megismerhetik a tanulók.

**39**. Egy csoportban a csoporttagok testvéreinek a számát nyilakkal jelölték: ahány nyíl mutat az egyes pontokba, a pontnak megfelelő csoporttagnak annyi testvére van. A csoportban nincsenek egy családhoz tartozók, és a nyilak kiindulópontja érdektelen a feladat szempontjából.



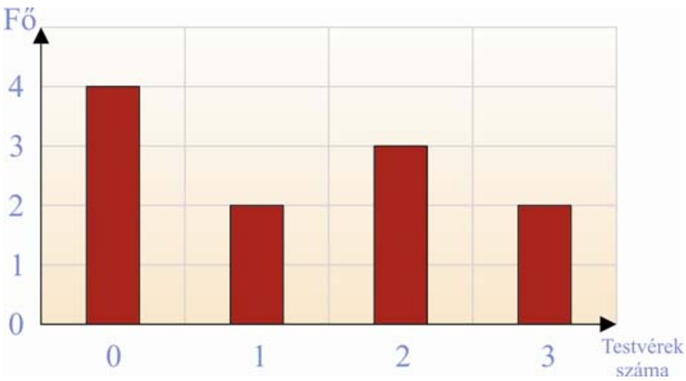
a) Készíts oszlopdiagramot a gyakoriságokból!

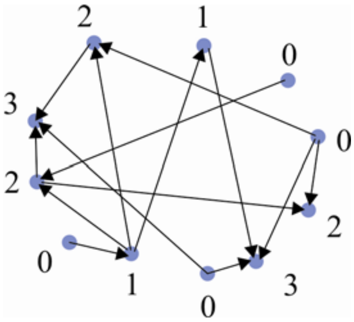
b) Készíts kördiagramot, mely az arányokat mutatja!

c) Mennyi az adatok módusza (leggyakrabban előforduló adat), átlaga, mediánja (középső adat)?

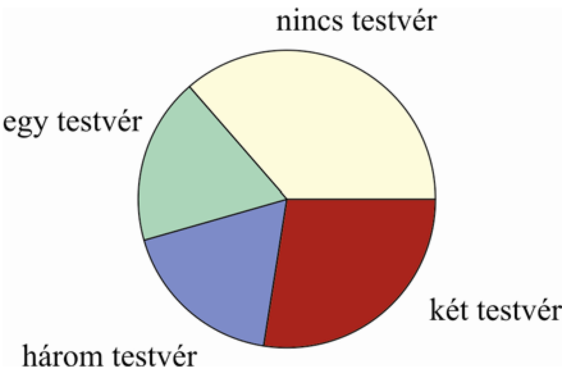
*Megoldás:*

a)




b) A középponti szögek: $\frac{360°}{11} \cdot 4 \approx 131°$; $\frac{360°}{11} \cdot 2 \approx 65°$; $\frac{360°}{11} \cdot 3 \approx 98°$.



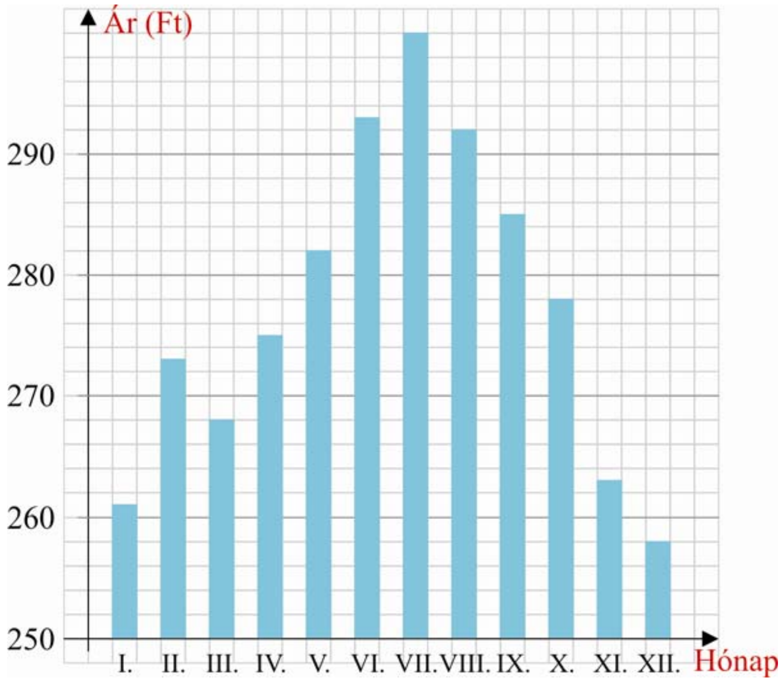
c) A módus: 0 testvér, az átlag: $\frac{14}{11} \approx 1{,}3$ testvér, a medián: 1 testvér.

**40**. A grafikon a benzin árának havonkénti változását mutatja az egyik évben.

a) Hány hónapban volt a benzin ára 272 forintnál magasabb?

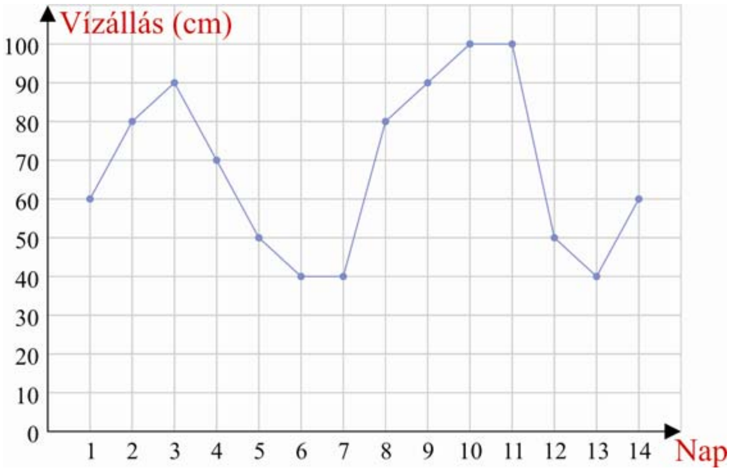
b) Határozd meg a minta terjedelmét!

c) A nyári hónapokban (június, július, augusztus) hány forint volt a benzin átlagos ára?




*Megoldás:* a) 8 hónapban; b) A terjedelem: 300 – 258 = 42; c) $\frac{293+300+292}{3} \approx 295{,}3$. Az átlagár 295,3 Ft volt.

**41**. Egy gátőr minden este leolvassa a Duna vízszintjét, és az értékeket grafikonon ábrázolja. Április első két hetében a következő grafikont készítette:




a) Mely napokon volt a legmagasabb a vízszint ebben az időszakban?

b) Mekkora a minta terjedelme?

c) Mennyi a medián (középső adat) és a módusz (leggyakrabban előforduló adat)?

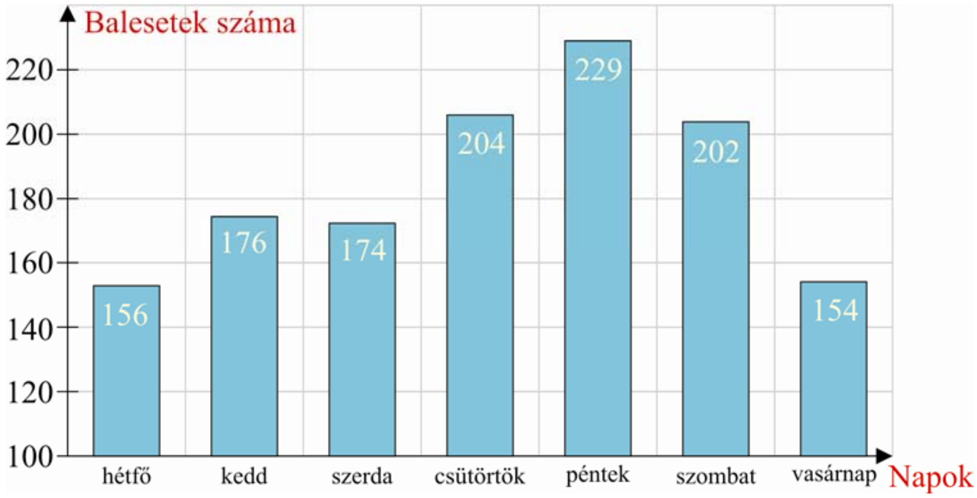
d) Mekkora volt 4-étől 8-áig (öt nap) a vízszint átlaga?

e) Melyik napon észlelte a gátőr a legnagyobb vízszintváltozást?

*Megoldás:* a) 10. és 11-én; b) 100 – 40 = 60; c) A mintát rendezve írjuk le: 40, 40, 40, 50, 50, 60, 60, 70, 80, 80, 90, 90, 100, 100; a medián a két középső, vagyis a 7. és 8. elem átlaga: $\frac{60+70}{2}=65$; a módusz a leggyakoribb adat, 40 cm;

d) Az átlag: $\frac{70+50+40+40+80}{5}=56$ (cm); e) 12-én.

**42**. Az alábbi grafikon az egyik magyarországi megyében, a hét különböző napjain történt közúti balesetek számáról készült a 2004-es adatok alapján. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!



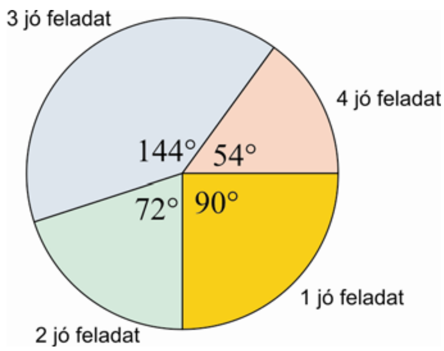

a) Határozd meg az adathalmaz terjedelmét!

b) Mekkora a balesetek napi átlaga éves szinten?

c) Hány százalékkal volt több baleset a „legveszélyesebb” napon, mint az átlag?

*Megoldás:* a) $229-154=75$; b) Az átlag $\frac{1295}{7}=185$; c) 23,8 %-kal.

**43**. A következő kördiagram azt mutatja, hogy milyen arányban érkezett 1 jó, 2 jó, 3 jó, illetve 4 jó megoldást tartalmazó válasz egy levelező versenyre. 4 feladat volt, és összesen 120 beküldőtől érkezett válasz.




a) Készítsd el az adatok gyakorisági táblázatát!

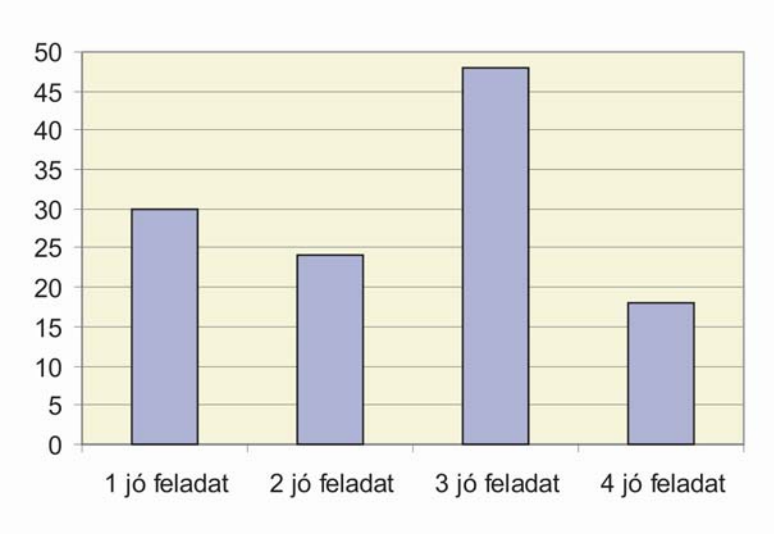
b) A gyakorisági táblázat alapján ábrázold oszlopdiagramon az adatokat!

*Megoldás:*

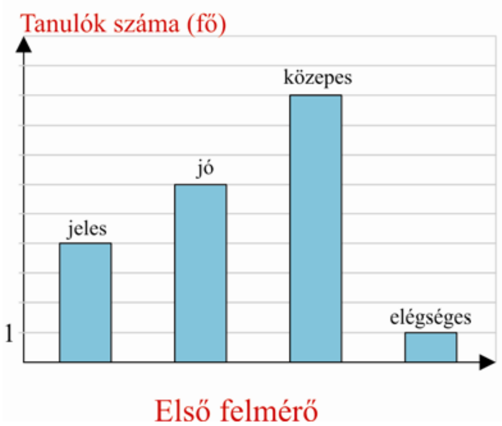
a)

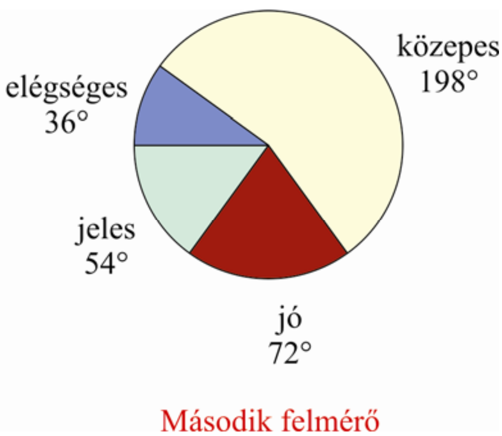
| Megoldások száma | 1 jó megoldás | 2 jó megoldás | 3 jó megoldás | 4 jó megoldás |
|---|---|---|---|---|
| Résztvevők száma | 30 | 24 | 48 | 18 |

b)




**44**. A 8. osztályosok két felmérőt írtak, mindkettőt ugyanannyi tanuló írta meg. Az eredményeket az alábbi diagramok mutatják.




a) Hány közepes volt a második felmérőben?

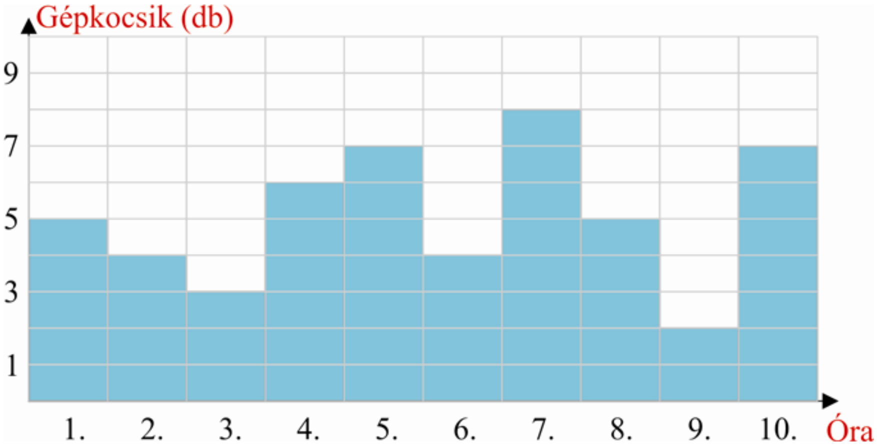
b) Az első felmérőben hány százalék volt a jó osztályzatú?

c) Melyik felmérőben volt több jeles?

d) A második felmérőben hánnyal volt több közepes osztályzat, mint jeles?

*Megoldás:* a) 11; b) 30%; c) Az elsőben (4, míg a másodikban 3); d) Közepes osztályzat 11 darab, jeles 3 volt, a különbség 8.

**45**. A diagram az autógyárban óránként elkészült gépkocsik számát mutatja egy tízórás időszak alatt. A gyár vezetése 6 db/óra átlagos teljesítményt vár el.




a) Készíts gyakorisági táblázatot az adatokból!

b) Mely órákban termeltek a 6 db/óra teljesítmény fölött?

c) Az egész időszakra vonatkozóan összességében teljesítették-e az elvárást?

*Megoldás:*

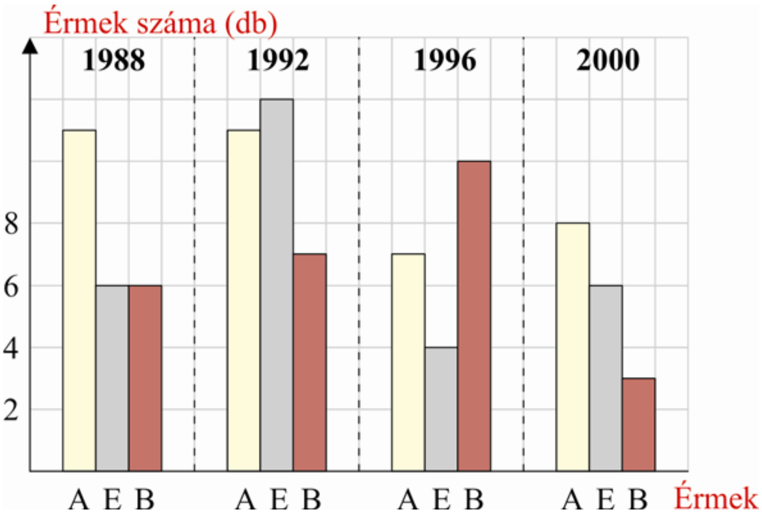
a)

| Óra | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Darab | 5 | 4 | 3 | 6 | 7 | 4 | 8 | 5 | 2 | 7 |

b) Az 5., 7. és 10. órákban.

c) Az átlag: $\frac{51}{10} = 5{,}1$, jócskán elmarad az elvárt teljesítménytől.

**46**. A következő diagramon a XX. század utolsó négy olimpiáján szerzett magyar érmek számát találjuk (A: arany, E: ezüst, B: bronz).




a) A négy közül melyik olimpián szereztük a legkevesebb ezüstérmet?

b) Összesen hány aranyérmet szereztünk ezen a négy olimpián?

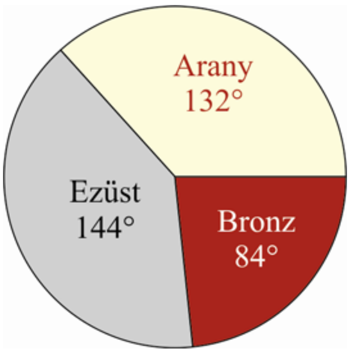
c) Átlagosan hány ezüstérmet szereztünk ezen a négy olimpián?

d) Melyik fajta éremből szereztük összesen a legtöbbet ezen a négy olimpián?

e) Ábrázold az 1992-es olimpián szerzett érmek számát kördiagramon!

*Megoldás:* a) Az 1996-oson; b) 37-et; c) 7-et; d) Aranyból (37 db);

e) A kördiagram:



# III. Valószínűségszámítás

Sokszor latolgatjuk az esélyeket: milyen időjárás lesz egy adott időpontban, nyerünk-e a kaparós sorsjeggyel, mennyire változik a benzin ára. Biztosítások díjai, piaci viszonyok felmérése, szavazások eredményeinek megjósolása: csak egy pár példa arra, hogy a valószínűség-számítás mennyire fontos helyet foglal el a hétköznapok során még akkor is, ha személy szerint ritkán használjuk.

Vajon mekkora az esélye annak, hogy holnap nem kel fel a nap? Egyesek szerint 50%, mert vagy felkel, vagy nem, de a tapasztalatok alapján érezzük, hogy ez a meggondolás nem állja meg a helyét. A valószínűségszámítás alapját épp az irányított megfigyelés adja: sok-sok kísérletet végzünk egy esemény megfigyelésére. Nem biztos, hogy véletlen jelenségekről van szó: igazából az a fontos, hogy az egyes jelenségek bekövetkezését minél pontosabban meg tudjuk jósolni. Ha már nem érjük el a lottó ötöst, legalább meg tudjuk határozni, hogy mekkora esélyünk van a főnyereményre!

## A valószínűség definíciója

*Módszertani megjegyzés:* A mintapélda feldolgozását 4 fős csoportokban végzik a tanulók. Szükség van minden csoportban legalább 2 dobókockára.

### Mintapélda$_9$

Dobjunk fel 25-ször egy dobókockát, és írjuk le a dobások eredményét.

a) Készítsünk az adatokból gyakorisági diagramot, és azt is határozzuk meg, hogy az esetek hány százalékában volt 1-es, 2-es stb. dobás. Ellenőrizzük az eredményeket összeadással!

*Megoldás:*

A megoldáshoz egy dobássorozatot használunk, de mindenki azzal az adathalmazzal dolgozik, amelyet ő dobott. A dobássorozat eredménye: 2, 2, 4, 5, 3, 1, 6, 2, 4, 2, 5, 6, 3, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 5, 6, 4, 3, 5.

A gyakorisági diagram most kiegészül az arányokkal:

| **Dobás** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | **Összeg** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Előfordulás** | 4 | 7 | 4 | 3 | 4 | 3 | **25** |
| **Arány** | $\frac{4}{25}=0{,}16$ | $\frac{7}{25}=0{,}28$ | 0,16 | $\frac{3}{25}=0{,}12$ | 0,16 | 0,12 | **1** |

b) Sokan úgy gondolják, hogy 6-ost nehezebb dobni a többinél. Vizsgáljuk meg, hogy nagyszámú dobás (azaz több csoport dobásainak eredménye) esetén milyen arányban fordul elő 1-es, 2-es stb.! Készítsünk olyan grafikont, amelyik a dobások arányát ábrázolja a dobások számának függvényében! Ehhez töltsük ki a következő oldalon található 6.1. munkalapon a táblázatokat, majd rajzoljuk meg a grafikonokat!

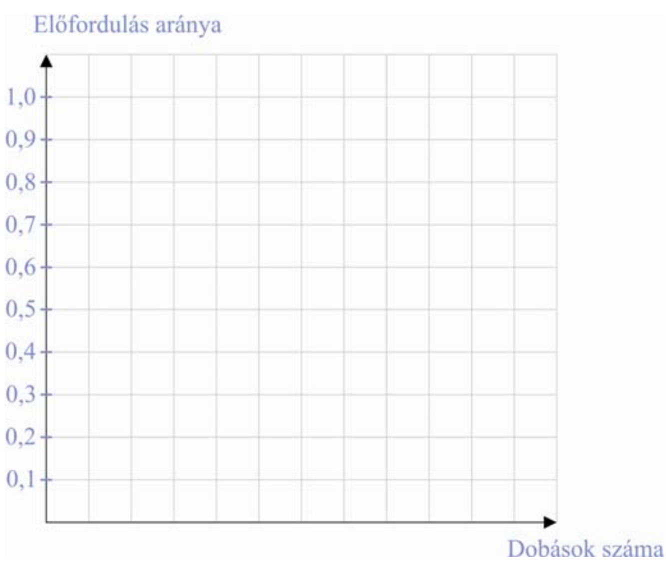
*Módszertani megjegyzés:* Célszerű most szétosztani a feladatokat. Az egyik csoport feladata az, hogy az 1-esek gyakoriságát összegyűjti a többi csoporttól is, kitölti a táblázatot, kiszámítja és ábrázolja az arányokat. Csoportonként 100-100 dobás eredményéből alakul ki a végeredmény, ezért nagyszámú dobásról beszélhetünk. A táblázatban az egységet annak függvényében vegyük fel, hány csoportunk van. Ha kevés a tanulók száma, akkor 25 vagy 50 dobásonként összegzünk, nagy osztálylétszámnál 100 dobásonként (csoportonként), és a grafikon vízszintes tengelyén is ilyen a beosztás.

***6.1 munkalap***

A ***6.1 munkalapon*** két dobás vizsgálatának van helye. Egyiket a tanórán, csoportban töltik ki a tanulók, a másikat javasoljuk (tanórai adatgyűjtés után) feladni házi feladatnak. Pl. ha a csoport feladata az volt, hogy a 2-esek előfordulásának arányát vizsgálja, akkor a csoportmunkát követő ellenőrzés folyamán írják le egy másik csoport eredményeit a táblázatba, és házi feladatként önállóan dolgozzák fel.

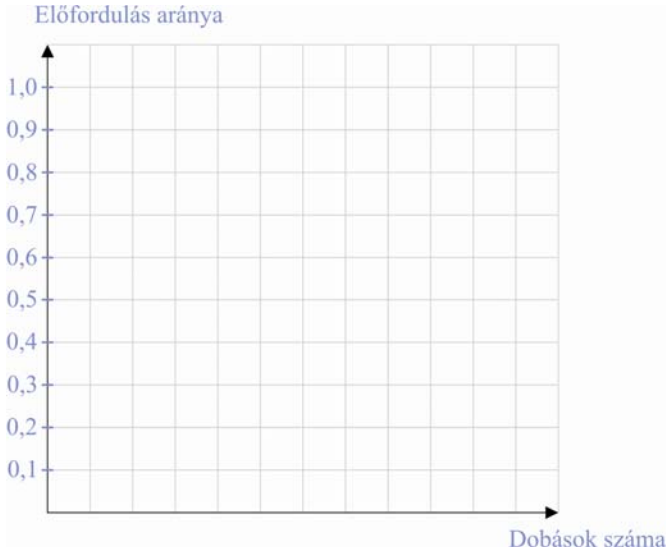
**előfordulása**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dobások száma | | | | | | | | | | | |
| Előfordulás | | | | | | | | | | | |
| Arány | | | | | | | | | | | |



**előfordulása**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dobások száma | | | | | | | | | | | |
| Előfordulás | | | | | | | | | | | |
| Arány | | | | | | | | | | | |

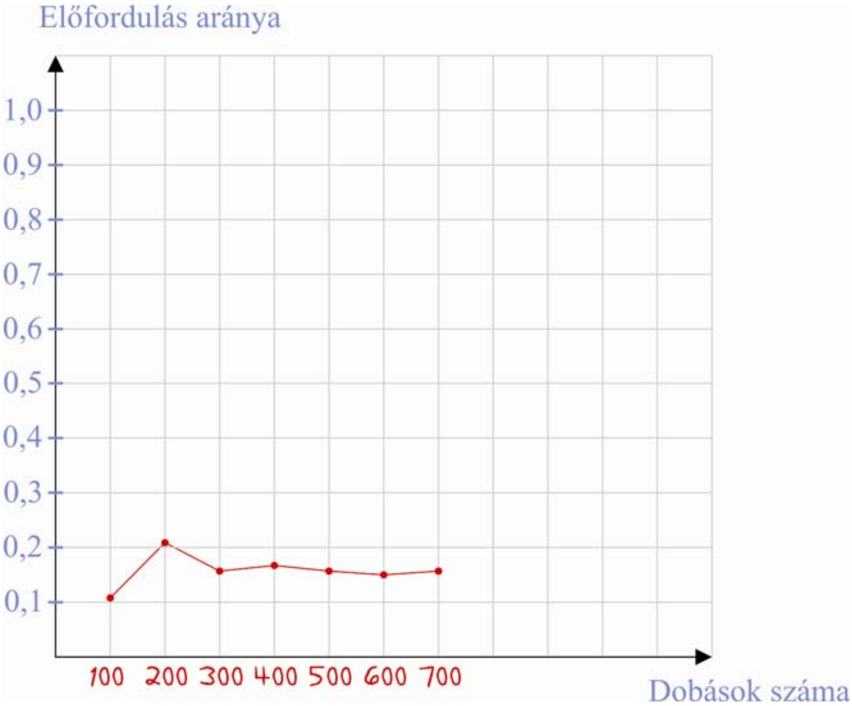



*Megoldás:*

Most csak a 6-os dobásának arányát vizsgáljuk, a többi dobás esetén is így kell vizsgálni az előfordulások arányát. Tegyük fel, hogy volt az osztályban 7 darab 4 fős csoport. Mindegyiktől összegyűjtöttük a táblázatban a 6-osok előfordulásának számát, így összesen 700 dobást elemzünk.

**6-os előfordulása**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dobások száma | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | | | | |
| Előfordulás | 11 | 42 | 48 | 68 | 78 | 90 | 115 | | | | |
| Arány | 0,11 | 0,21 | 0,16 | 0,17 | 0,16 | 0,15 | 0,16 | | | | |




*Módszertani megjegyzés:* A csoportok végeredményeinek összevetésekor a táblára felírjuk az utolsó arányokat, és összehasonlítjuk azokat. Mindegyik dobás aránya $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ körüli értékre áll be.

**Egy érték előfordulásának arányát az érték relatív gyakoriságának nevezzük.** Például ha 300 esetből 48-szor fordul elő 6-os, akkor a 6-os relatív gyakorisága $\frac{48}{300} = 0{,}16$. Ha egy esemény bekövetkezésének valószínűségét vizsgáljuk, ugyanúgy járunk el, mint a fenti példában. Kísérleteket végzünk azonos körülményekkel, és azt vizsgáljuk, hogy az adott esemény milyen arányban fordul elő. A kockadobás során dobott számok előfordulásának vizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy nagy számú kísérlet esetén minden dobás előfordulásának aránya $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ körüli érték. Minél több dobást vizsgálunk, az arány annál jobban megközelíti az $\frac{1}{6}$-ot.

Ha sok kísérletet végzünk, akkor egy esemény bekövetkezésének aránya egy adott érték körül ingadozik. Ezt az értéket nevezzük az **adott esemény valószínűségének.**

Egy esemény valószínűségének a jele: $\mathbf{P}(\text{esemény})$.

Egy esemény valószínűsége 0 és 1 közötti szám. A valószínűséget kifejezhetjük közönséges-törttel, tizedestörttel vagy százalékban. Például $\frac{1}{4}$, 0,25 és 25% ugyanazokat a valószínűség értékeket jelentik.

Sokszor nem tudunk elég sok kísérletet végezni ahhoz, hogy megállapítsuk ezt a számot. Képzeljük el a következő helyzetet: egy izzókat gyártó üzemben vizsgálják a valószínűségét annak, hogy egy véletlenül kiválasztott izzó selejtes. Elvileg minden izzót ellenőrizni kellene, de ez túl sok időt és pénzt emésztene fel, ezért kiválasztanak néhány darabot, és azokat vizsgálják.
A valószínűség definíciója szerint – elvileg – nagyszámú kísérlet mellett is megkaphatjuk azt az előfordulási arányt, mint amit az összes mintát elemezve kapnánk. (Például a 6-osok dobásait elemezve a 0,17-es arány már 400 dobás után megjelenik.) A kérdés az, hogy hány izzót válasszunk ki vizsgálatra, és a kapott eredmény mennyire helytálló az összes gyártott izzó tekintetében. Látjuk, hogy a minőségellenőrzés során a valószínűségszámítást a gyakorlatban alkalmazzuk.

## A valószínűség kiszámítása egyszerű esetekben

A valószínűségszámítás egyik célja az, hogy „megjósoljuk” egy esemény valószínűségét. Egyszerűbb esetekben a kísérlet kimenetelei olyan elemi események lehetnek, amelyek egyenlő eséllyel következnek be. Ilyen elemi esemény például kockadobáskor az 1-es dobása, de elemi esemény a 2-es dobása is. Összesen 6 elemi esemény lehetséges, vagyis az összes esetek száma 6. Mindegyik elemi esemény egyforma valószínűségű: $\frac{1}{6}$. Az 1-es dobásának valószínűsége ugyanannyi, mint a 6-os dobásának valószínűsége: $\frac{1}{6}$. Jelöléssel:

$$\mathbf{P}\text{ (1-es dobása)} = \mathbf{P}\text{ (6-os dobása)} = \frac{1}{6}.$$

Pénzérme feldobásakor az elemi események száma 2: fej vagy írás, így az összes esetek száma: 2, a fej és az írás valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Az ilyen esetekben egy esemény bekövetkezésének valószínűségét a

$$\boxed{\mathbf{P}(\text{esemény}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}}$$

képlet segítségével határozzuk meg.

*Figyelem*! Ez az összefüggés csak olyan esetekben alkalmazható, amikor egyenlő az elemi események valószínűsége. Nem ilyen esetek például a fiú vagy lány születésének valószínűsége, ui. általában nem egyenlő számban születnek fiú, illetve lány csecsemők. Például megfigyelték, hogy háborúk után nagyobb arányban születik fiú, mint leány. Így bár a születendő gyermek neme kétesélyes, mégsem 0,5 a valószínűsége annak, hogy fiú születik.

## Mintapélda$_{10}$

Egy dobókockát egyszer feldobunk. Határozzuk meg a következő események valószínűségét!

A = legfeljebb 2-est dobunk; B = prímszámot dobunk; C = legalább 3-ast dobunk.

*Megoldás:*

Az elemi események: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ha legfeljebb 2-est dobunk, akkor a jó lehetőségek: 1-es vagy 2-es, azaz a jó lehetőségek száma 2. Ezért $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

A dobható számok közötti prímszámok: 2, 3, 5, ezért $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. (Az 1 nem prímszám, mert prímszámnak nevezzük azokat a pozitív egészeket, amelyeknek pontosan két osztójuk van: 1 és önmaguk, de az 1-nek csak egy osztója van.)

Ha legalább 3-ast dobunk, akkor a jó lehetőségek: 3, 4, 5 vagy 6, azaz a jó lehetőségek száma 4. Ezért $\mathbf{P}(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

**Ha egy esemény biztosan bekövetkezik, akkor annak a valószínűsége 1**. A fenti példában az *A* és a *C* esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik, de együttesen nem teljesülhetnek. Ilyen esetekben a valószínűségük összege 1. A lehetetlen esemény sohasem következik be, a valószínűsége 0.

Észrevehetjük, hogy ha több egymást kizáró (vagyis egyszerre nem teljesülő) esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik, akkor ezen események valószínűségének összege 1. Ilyen a kockadobás is: minden szám dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$, a valószínűségek összege $6\cdot\frac{1}{6}=1$. Másik példa a mintapélda *A* és *C* eseménye: vagy legfeljebb 2-est dobunk, vagy legalább hármast, de az egyik mindenképp bekövetkezik, valószínűségük összege $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. Ilyen esetben az egyik valószínűség ismeretében kiszámíthatjuk a másikat: $\mathbf{P}(A)=1-\mathbf{P}(C)$.

## Mintapélda$_{11}$

Egy pénzérmét 4-szer feldobunk, és leírjuk a dobások eredményeit.

a) Sorold fel az összes lehetőséget!

b) Mi a valószínűsége annak, hogy 1 fejet és 3 írást dobunk?

*Megoldás:*

a) Jelöljük I-vel az írást, F-fel a fejet. Ekkor az összes lehetőség: IIII, **IIIF**, **IIFI**, IIFF, **IFII**, IFIF, IFFI, IFFF, **FIII**, FIIF, FIFI, FIFF, FFII, FFIF, FFFI, FFFF.

b) Az összes eset száma: 16. Összeszámoljuk a jó esetek számát: 4. Így a keresett valószínűség: $\mathbf{P}(\text{esemény})=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

*Módszertani megjegyzés:* A következő 4 feladatban azonos jellegű kérdések találhatók. Javasoljuk, hogy 4 fős csoportok alakítása után jelöljük ki minden csoportnak ezt a 4 feladatot, és minden csoporttag más-más feladattal foglalkozzon (a megoldási módszert megbeszélhetik egymás között). A feladatok számonkérését diákkvartett módszerrel végezzük: a tanár minden feladatot nagy vonalakban ismertet, majd időt ad arra, hogy minden csoporttag megismerje a megoldást. Ezután felszólít valakit a válaszolásra (pl. sorsolás vagy jelentkezés alapján). A csoport minden tagja azt az értékelést kapja, amit a válaszoló kiérdemel (ezért a tanulóknak figyelniük kell arra, hogy minden csoporttársuk világosan értse a feladatot és tudja a megoldást).

## Feladatok

**47**. Egy gyártósor naponta 2800 terméket gyárt.

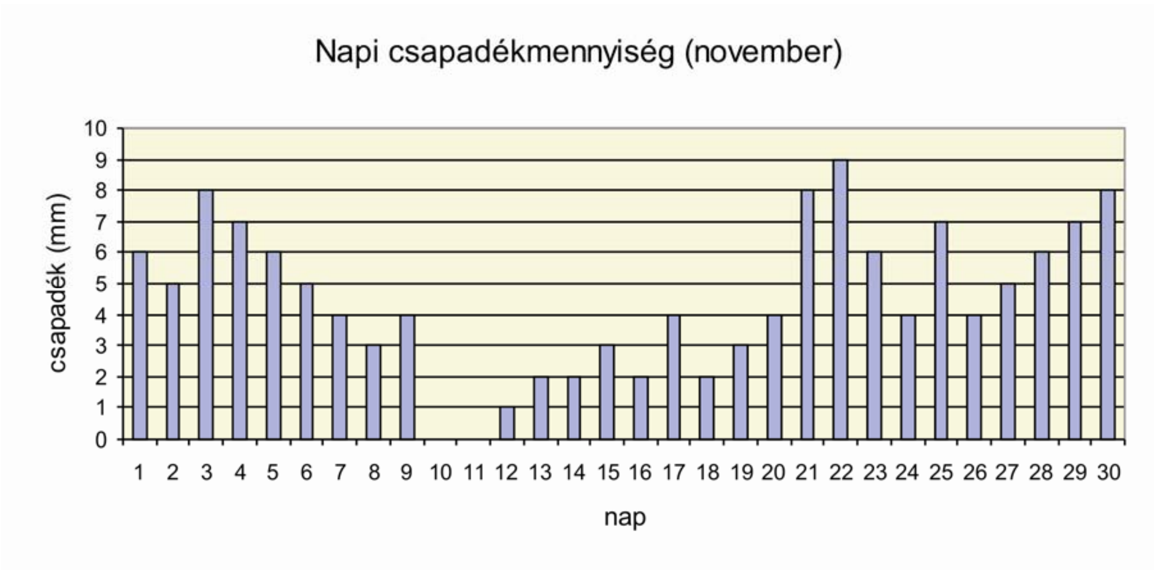
a) Az elmúlt héten csak 5 nap működött a gépsor, és 168 selejtes terméket állított elő. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy terméket a múlt héten gyártottakból, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy selejtes, illetve annak, hogy nem selejtes?

*Megoldás*: 0,012; 0,988.

b) A minőségellenőrzés során kiderült, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egy terméket a tegnap gyártottakból, akkor az 0,985 valószínűséggel nem selejtes. Hány selejtes terméket állított elő tegnap a gépsor?

*Megoldás*: 42 selejtes terméket.

**48**. Egy novemberi hónap csapadékmennyiségét találjuk a diagramon.




a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott novemberi napon a csapadékmennyiség 6 mm felett volt, illetve hogy nem haladta túl a 6 mm-t?

*Megoldás*: $\mathbf{P} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23\,;\frac{23}{30} \approx 0{,}77$.

b) A novembert tartalmazó negyedévben kb. 0,141 volt annak a valószínűsége, hogy a napi csapadékmennyiség egy véletlenszerűen kiválasztott napon túllépi a 6 mm-t. Hány napon mértek 6 mm-nél több csapadékot?

*Megoldás*: $0{,}141 \cdot 92 \approx 13$ napon.

**49**. Egy cipőboltba az elmúlt hónapban a gyakorisági táblázatban látható cipők érkeztek.

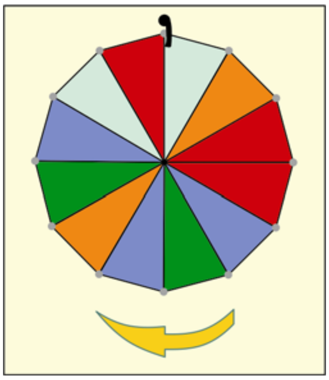
| Méret | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Darab | 13 | 13 | 25 | 48 | 56 | 87 | 76 | 50 | 14 | 10 | 8 |

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egy cipőt a kapott készletből, akkor annak a mérete 45-ös vagy annál nagyobb? Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott cipő 45-ösnél kisebb?

*Megoldás*: $\mathbf{P} = \frac{32}{400} = \frac{2}{25} = 0{,}08$, illetve $\frac{23}{25} = 0{,}92$.

b) Régebben nem ment ennyire a bolt, és nem is kellett ennyi nagyméretű cipő. Annak a valószínűsége, hogy a havonta rendelt 340 darabból egy véletlenszerűen kiválasztott cipő mérete 45-ös vagy annál nagyobb, kb. 0,062 volt. Hány darab „nagy” cipőt rendeltek?

*Megoldás*: $340 \cdot 0{,}062 \approx 21$ darab „nagy” cipőt rendeltek.



**50**. Az ábrán egy pörgetős szerencsejáték korongját látod (minden színes háromszög egyforma méretű).

a) Mi a valószínűsége annak, hogy véletlenszerű pörgetés után piros, illetve hogy nem piros mezőre mutat a jelző?

*Megoldás*: A pirosé $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, a nem pirosé $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

b) Egy másik táblán a körnek megfelelő területet kétszer ennyi egyforma „cikkre” osztottak fel, és azon a piros véletlenszerű eltalálásának a valószínűsége $\frac{1}{6}$. Mennyi piros cikkelyt tartalmaz a másik tábla?

*Megoldás*: $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$ piros cikkelyt.

A legnépszerűbb kártyajátékok során kétféle kártyát használunk:

- *Magyar kártya*: négyféle „szín” található a pakliban: piros, zöld, makk és tök, és minden színből van 7-es (VII), 8-as (VIII), 9-es (IX), 10-es (X), valamint a négy figura: alsó, felső, király, ász. Ily módon a magyar kártyában 32 lapot számolhatunk meg.
- *Francia kártya*: itt is négyféle „szín” van: pikk (♠), kör (♥), káró (♦) és treff (♣). A kártyák értékei: 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os, 7-es, 8-as, 9-es, 10-es, bubi, dáma, király, ász. A franciakártya-pakliban 52 lap van.

**51**. Mi a valószínűsége annak, hogy egy magyar kártya csomagból véletlenszerűen kihúzott lap a) piros; b) 7-es; c) zöld vagy ász; d) makk király?

*Megoldás*: a) $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}=0{,}25$ ; b) $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}=0{,}125$; c) $\frac{11}{32}\approx 0{,}34$; d) $\frac{1}{32}=0{,}03125$.

**52**. Mi a valószínűsége annak, hogy egy francia kártya csomagból véletlenszerűen kihúzott lap a) treff; b) dáma; c) pikk vagy 8-as; d) káró király?

*Megoldás*: a) $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}=0{,}25$ ; b) $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}\approx 0{,}08$; c) $\frac{16}{52}=\frac{4}{13}\approx 0{,}31$; d) $\frac{1}{52}=0{,}02$.

Két kocka feldobásakor az elemi események számpárok. A 2; 6 például azt jelenti, hogy az első dobás 2-es, a második 6-os. A következő ábrával a dobások összegét szemléltetjük:

| 2. \ 1. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

első dobás

második dobás

**53**. Mi a valószínűsége annak, hogy két dobókocka feldobásakor a dobott számok összege a) 6; b) páros; c) prím szám?

*Megoldás*: a) $\frac{5}{36}\approx 0{,}139$; b) $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}=0{,}5$; c) $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}\approx 0{,}417$.

**54**. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége két dobókocka feldobásakor:

A – a második dobás nagyobb, mint az első;

B – az első dobás 4-nél nagyobb, vagy a második dobás 3-nál kisebb?

*Megoldás*: $\mathbf{P}(A)=\frac{15}{36}$, $\mathbf{P}(B)=\frac{20}{36}$, a B esemény valószínűsége nagyobb.