Matematika „A”

10. szakiskolai évfolyam

7. modul
Térgeometria

Készítette: Vidra Gábor

A modul célja	A mindennapi gyakorlatban előforduló térgeometriai problémák és azok modellezése szakmai számításokban.
Időkeret	Ajánlott óraszám:15 óra, a modulban kidolgozott órák száma: 8 tanóra.
Ajánlott korosztály	10. szakiskolai évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: A mindennapi gyakorlatban előforduló térgeometriai problémák és azok modellezése szakmai számításokban. Szűkebb környezetben: Pitagorasz-tétel, geometriai alapismeretek, trigonometria. Ajánlott megelőző tevékenységek: Általános iskolai ismeretek a térfogatról és a felszínről, síkidomok területének átismétlése. Ajánlott követő tevékenységek: Szakmai számítások.

A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számítás, számlálás: A zsebszámológép biztos használata. A műveleti sorrend biztos alkalmazása, különösen a térgeometria összetettebb képleteinél való behelyettesítéskor. Mennyiségi következtetés: Testek ismert adataiból a többi elem kiszámítása. Nagyon fontos a jó vázlat elkészítése, melyen az ismert adatokat célszerű színessel kiemelni. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek fejlesztése. Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet: Valóságból vett feladatok matematikai átfogalmazása, azok megoldása, és az eredmények értelmezése. A feladatok várható eredményének becslése. Szöveges feladatok, metakogníció: Szövegértelmezés továbbfejlesztése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. Csoportmunkában a társak jó gondolatainak megismerése, elfogadása, helytelen következtetések cáfolata. A geometriai feladok algebrai megoldása során keletkező hamis gyökök kiválasztásának képessége. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Az eddig tanult síkidomok kerületének és területének alkalmazása. A geometriai feladatok megoldási tervének elkészítési képessége. Az adatok rendszerezése, egy feladaton belül a szükséges egységrendszer kiválasztása, és arra való átszámítás. Geometriai fogalmak segítségével az absztrakciós képesség fejlesztése. Induktív, deduktív következtetés: Összefüggések, képletek felfedezése gyakorlati tapasztalatból kiindulva, azok általánosítása és alkalmazása más esetekben.

TÁMOGATÓ RENDSZER

- 7.1 munkalap: testek elemzése csoportmunkához.
- Bemutató (Power Point), amely tartalmazza az elméleti anyag vázlatát, a mintapéldákat és néhány csoportfeladatot.

AJÁNLÁS

A modulban szereplő tananyag bizonyos részeiben túlmutat a „szokásos” szakiskolai térgeometria tananyagon. Egyrészt a térfogat- és felszínszámítási alapfeladatokkal előkészítjük a későbbi szakmai számításokat, másrészt az érettségit adó képzésre továbblépő tanulóknak segítünk kicsit magasabb szinten elmélyíteni az általános iskolában tanult ismereteket. Ennek megfelelően nem kell minden feladatot megoldani a modulból, a tanulócsoport igényei és tudásszintje szerint lehetőségünk van differenciálásra. A modul végén található feladatgyűjtemény sok gyakorlófeladatot tartalmaz (újabb differenciálási lehetőség), amelyekből válogathatunk az egyes testekkel kapcsolatos feladatok átvételekor is.

A mintapéldákat csoportmunkában érdemes átvenni, a tanulók a megoldás során ne használják a Tanulók könyvét.

A modul óráin javasoljuk a Polydron készlet alkalmazását (elsősorban csoportmunkában): testépítés háló vagy leírás alapján, a test adatainak (élhosszak, testmagasság, lapszögek) mérése, a mért adatok felhasználása térfogat és felszín számításakor. Érdemes felhívni a tanulók figyelmét arra, hogy a szöveget kék vagy fekete tollal írják, az ábrákat pedig grafittal és színes ceruzával készítsék el, vonalzót használva.
Igyekeznünk kell megtalálni a csoportmunka és az egyéni feladatmegoldás helyes arányát, ezért a modulvázlatban több helyen szerepel a „tetszőleges módszerrel” megjegyzés. A frontális tanári magyarázatokhoz érdemes a modulhoz készült bemutatót használni.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/Feladat/ Gyűjtemény
I. Ismétlés			
1.	Egyenesek és síkok kölcsönös helyzete, távolságok, hajlásszögek, kocka hálóinak keresése	Metakogníció, figyelem, kooperáció, kommunikáció	Osztályterem elemei Polydron, 7.1 munkalap

II. A hasáb és a henger			
1.	A hasáb és a henger származtatása, térfogata,felszíne (képletek is)	Rendszerezés, figyelem, deduktív és induktív következtetés	Gumis modellek (henger)
2.	Számítások (térfogat, felszín; tetszőleges módszerrel, elsősorban csoportmunkában)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, becslés, kombinatív gondolkodás, ábrázolás, számolás	1., 2. mintapélda 1–9. feladatok közül válogatunk
3.	Pitagorasz-tétel alkalmazása, testátló		3. mintapélda 10–13. feladat
4.	Hengerrel kapcsolatos számítások		5–6. mintapélda 14–25. feladatok közül válogatunk

III. A gúla és a kúp			
1.	Alapfogalmak, térfogat, felszín (csoportmunkában kocka összeállítása három gúlából; tanári magyarázat)	Figyelem, példakövetés, rendszerezés, kommunikáció, kooperáció	Polydron, bemutató
2.	Gúlával kapcsolatos feladatok megoldása (elsősorban csoportmunka)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, becslés, kombinatív gondolkodás, számolás	26–31. feladatok közül válogatunk
3.	Kúppal kapcsolatos feladatok megoldása (elsősorban csoportmunka)		32–38. feladatok közül válogatunk

IV. A csonkagúla			
1.	A csonkagúla fogalma, térfogata, felszíne (frontális, tanári magyarázat)	Rendszerezés, figyelem, deduktív és induktív következtetés	7. mintapélda
2.	Csonkagúlával kapcsolatos feladatok megoldása	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, becslés, kombinatív gondolkodás, számolás	39–45. feladatok közül válogatunk

V. A csonkakúp			
1.	A csonkakúp fogalma, térfogata, felszíne (frontális, tanári magyarázat)	Rendszerezés, figyelem, deduktív és induktív következtetés	
2.	Csonkakúppal kapcsolatos feladatok megoldása	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, becslés, kombinatív gondolkodás, számolás	8. mintapélda 46–48. feladat

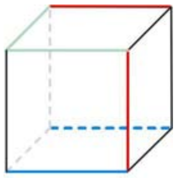
VI. A gömb térfogata, felszíne			
1.	A gömb fogalma, térfogata, felszíne (frontális, tanári magyarázat)	Rendszerezés, figyelem, deduktív és induktív következtetés	
2.	Gömbbel kapcsolatos feladatok megoldása (tetszőleges módszerrel)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, becslés, kombinatív gondolkodás, számolás	49–53. feladatok közül válogatunk

VII. Feladatgyűjtemény			
1.	Feladatok megoldása (tetszőleges módszerrel)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, becslés, kombinatív gondolkodás, számolás	54–74. feladatok közül válogatunk

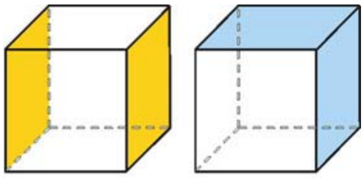
I. Ismétlés

A lakásban szeretnénk átalakításokat végezni: új falat emelni gipszkartonból, klímát beszereltetni, a falat lefestetni. Csupa olyan probléma, amelynek megoldásához alapvető térgeometriai ismeretekre van szükség: a festék mennyiségének meghatározásához területet, felszínt kell számolni, a megfelelő hűtőrendszer kiválasztásához pedig ismernünk kell a helyiség térfogatát.

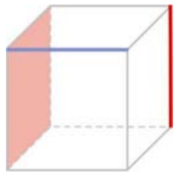
Módszertani megjegyzés: A fogalmakat képszerűsítjük, mert szakiskolában nem cél a matematika elvi kérdéseinek és felépítésének megismerése. Az alapfogalmakat (testek származtatása, térfogat és felszínképletei) azonban az alkalmazás szintjén megköveteljük, mert ezek használata előfordulhat a hétköznapi munka során. A bevezető óra célja az ismétlés eszközök (Polydron) felhasználásával.
A modul feladataiban a szögfüggvényeket és a Pitagorász-tételt is alkalmazzuk. Amennyiben szükségét érezzük, érdemes a tanulókkal néhány alapfeladat segítségével ezeket átismételni.



Két egyenes kölcsönös helyzete a térben lehet metsző, párhuzamos vagy kitérő.



Két sík kölcsönös helyzete a térben lehet párhuzamos vagy metsző.



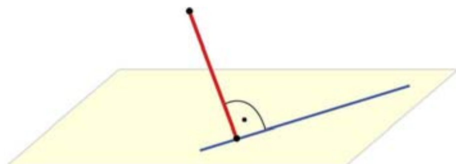
Egyenes és sík kölcsönös helyzete a térben lehet párhuzamos vagy metsző.

Módszertani megjegyzés: A távolságok értelmezését javasoljuk frontális munkában átvenni, felhasználva az osztályterem objektumait: a falak találkozását, az ajtó felső sarkát, a tábla csúcsát stb. Tanulóink sikere gyakran múlik a kreatív eszközhasználaton, ezért próbáljuk méterrúd nélkül, egyezményes távolságegységet bevezetni (pl. könyök), és kreativitást igénylő feladatokat kitűzni a csoportoknak (pl. mérjék meg, hogy hány könyök a félig kinyitott ajtó síkjának és a keretben található valamelyik csavarnak a távolsága; vagy mennyire kellene kinyitni az ajtót, hogy ez a távolság pontosan 7 könyök legyen).

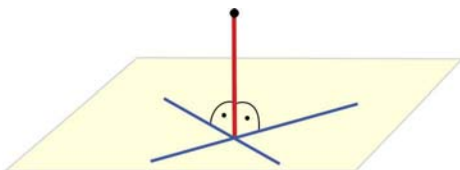
A hajlásszögek értelmezéséhez a Polydron készletből érdemes építeni egy nagy gúlát és csonkagúlát, és a szögmérő segítségével azon megmutatni pl. a síkok hajlásszögét vagy a testmagasságot. Itt is megmérhető a csúcsok és az őket nem tartalmazó oldalsíkok távolsága.

A tanári magyarázat után minden csoport megépíti a testeket a Polydron modellből, és a 7.1 munkalap kitöltésével megvizsgálja a testeket (ld. később). Ha van olyan tanuló, aki nem érti a távolságokat és a hajlásszögeket, a csoportmunka alkalmával elmélyítheti az ismereteit.

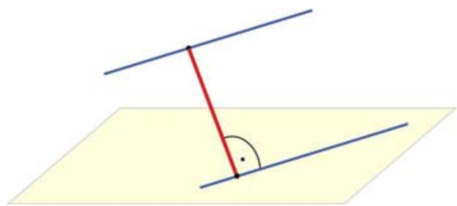
Távolságok



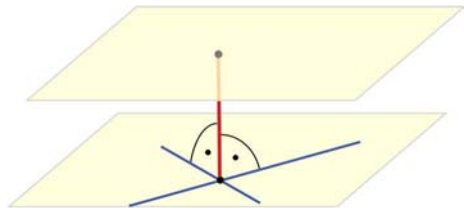
Pont és egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük.



Pont és sík távolságán a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük. Definíció szerint: egy egyenes merőleges a síkra, ha a sík összes egyenesére merőleges. A jelölés azért dupla derékszög, mert igazolható a következő állítás: ha egy egyenes merőleges a sík két metsző egyenesére, akkor merőleges a síkra, vagyis a sík minden egyenesére.



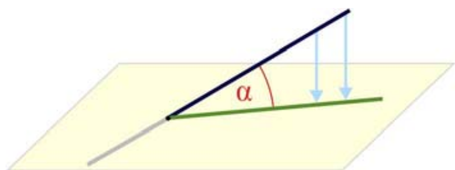
Párhuzamos egyenesek távolságát az őket összekötő, rájuk merőleges szakasz hossza adja. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az egyik egyenesen kiválasztunk egy tetszőleges pontot, és ennek a pontnak a másik egyenestől való távolsága adja a két egyenes távolságát.



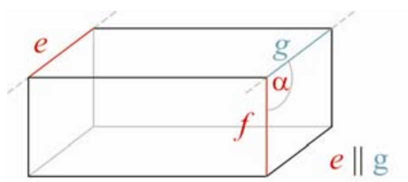
Párhuzamos síkok távolságát az őket összekötő, rájuk merőleges szakasz hossza adja. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az egyik síkon kiválasztunk egy tetszőleges pontot, és ennek a pontnak a másik síktól való távolsága adja a két sík távolságát.

Egyenes és vele párhuzamos sík távolságát az egyenesre és a síkra egyaránt merőleges, közöttük elhelyezkedő szakasz adja. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az egyenesen kiválasztunk egy tetszőleges pontot, és ennek a pontnak a síktól való távolsága adja az egyenes és a sík távolságát.

Hajlásszögek



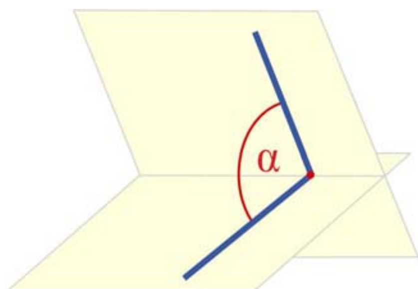
Egyenes és sík hajlásszögén értjük az egyenes és ennek a síkra eső merőleges vetülete által bezárt szöget. Ha a vetület egy pont, akkor az egyenes merőleges a síkra. Más esetben az így kapott képegyenes és az eredeti egyenes hajlásszöge adja az egyenes és a sík hajlásszögét.



e és *f* hajlásszöge megegyezik *f* és *g* hajlásszögével (α)

Két kitérő egyenes hajlásszögét a velük párhuzamos, egymást metsző egyenesek hajlásszöge adja.

Két sík hajlásszögét úgy kapjuk, hogy a metszésvonalra, annak egy tetszőleges pontjában mindkét síkban egy-egy merőleges egyenest bocsátunk. Ennek a két egyenesnek a hajlásszöge adja a két sík hajlásszögét. Két sík hajlásszöge derékszögnél nem nagyobb.



7.1 munkalap alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A testek elemzéséhez építtethetünk testeket a készlettel: egy hasábot és egy gúlát (esetleg csonkagúlát is), amelyen a tanulók méréseket és számításokat végeznek a 7.1 munkalap segítségével. A vizsgálatok célja a síkidomok legfontosabb tulajdonságainak (oldalak jellemzői, egyenlő szögek, szögpárok, terület- és kerületképletek) felelevenítése, másrészt a tanulók megszerzik a későbbi, testek származtatásához szükséges tapasztalatokat.

A testek vizsgálatakor a következő kérdésekre összpontosítunk:

- élek, lapok, csúcsok száma;
- határoló síkidomok, azok kerületét és területét mérések alapján határozzák meg a tanulók;
- lapszögek (mérhetők a Polydron készlethez adott szögmérővel) – alapél és oldalél hajlásszöge, alaplap és oldallap hajlásszöge, két oldallap hajlásszöge gúlánál;
- testmagasságok értelmezése hasábok, gúlák, csonkagúlák esetében.

A test elnevezése:
Élek száma:
Csúcsok száma:
Lapok száma:
Így mértük a testmagasságot:
A testmagasság hossza:
Határoló síkidomok (elnevezések, a síkidomok oldalhossza, területük, kerületük).
Az **alapél és az oldalél** hajlásszöge(i):
Két szomszédos oldalél hajlásszöge(i):
Az **alaplap és az oldallap** hajlásszöge(i):
Két szomszédos oldallap hajlásszöge (i):

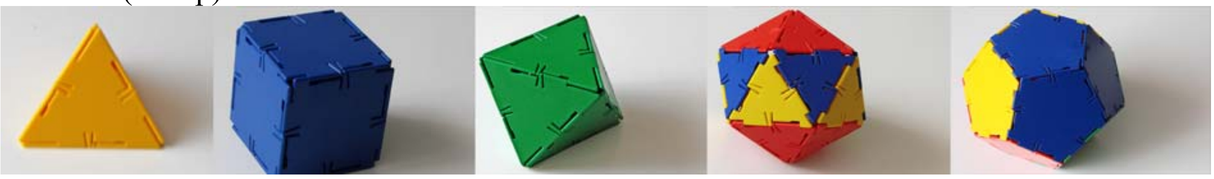
A test térfogata annak a térrésznek a mértéke, amelyet a test felülete határol. A térfogatot mindig valamilyen térfogategységhez hasonlítjuk, amely az egységélű kocka térfogata.

Módszertani megjegyzés: Célszerű régi térfogategységeket feleleveníteni, esetleg a történetükkel és átszámításukkal kapcsolatban internetes kutatás-projektet indítani.

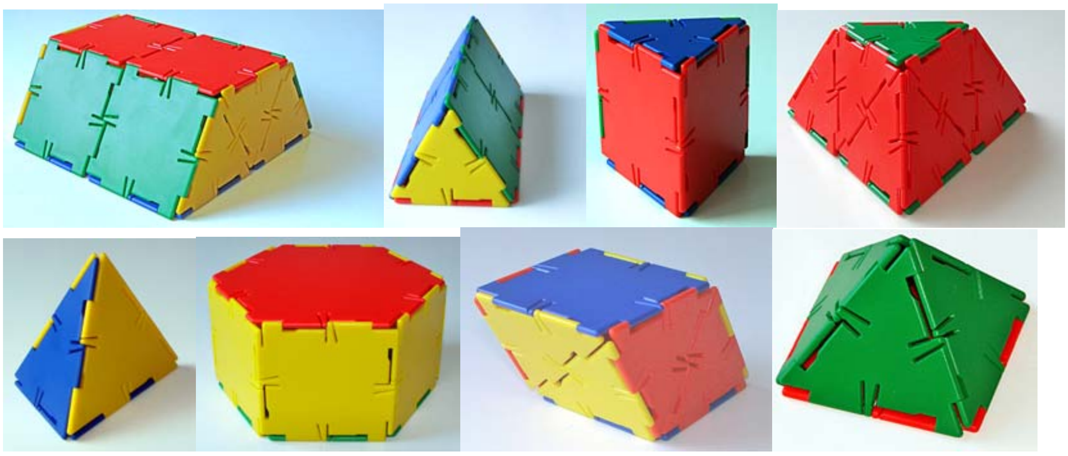
A test felszíne a testet határoló felület területe. Síklapokkal határolt testek esetén a határoló lapok területének összege.

Poliédernek nevezünk egy testet, ha azt véges sok sokszöglap határolja. A poliéder konvex, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza.

A poliéder szabályos, ha élei, élszögei és lapszögei egyenlők. Összesen öt ilyen test van: tetraéder (4 lap), hexaéder (kocka; 6 lap), oktaéder (8 lap), dodekaéder (12 lap), ikozaéder (20 lap).



Egyéb poliéderek:

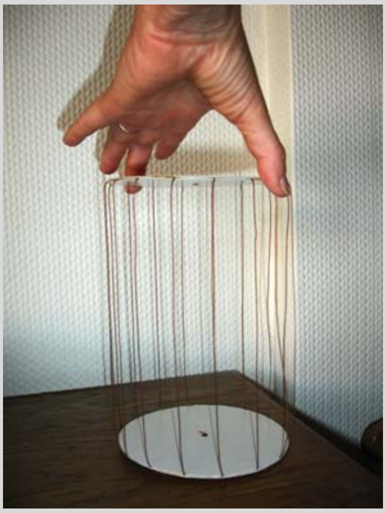


A **test hálója** poliéderek esetén az a sokszöglap, amelyet ha egy síklapból kivágunk, akkor összehajtogatható belőle a test felülete.

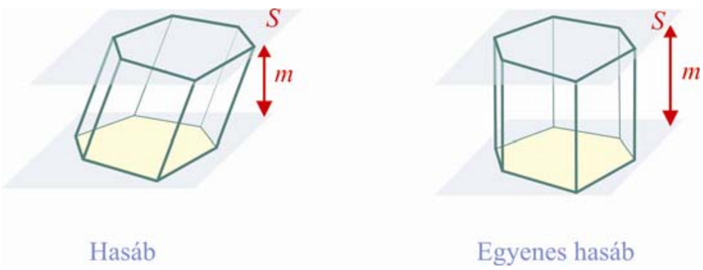
Módszertani megjegyzés: Feladható a csoportoknak a következő feladat: 2 perc alatt melyik csoport találja meg a kocka több hálóját?

II. A hasáb és a henger

Módszertani megjegyzés: A hasáb és a henger esetén a szemléltetést „gumis” modellek segítségével végezzük, amelyeket magunk is elkészíthetünk: két egybevágó kört vagy sokszöget vágunk ki vastag kartonból, és ezeket egyenlő hosszúságú gumiszálakkal egymáshoz rögzítjük (pl. apró lukakat fúrunk a körök szélén, és ezeken vezetjük át a gumiszálakat). Így a tanulók könnyen megértik, hogy a henger és a hasáb esetén az alaplap és a fedőlap egybevágó, és a testmagasság is szemléletesen mérhető egyenes vagy ferde hasáb (henger) esetében.



Adott az alapsíkon egy sokszög (**alaplap**), és egy egyenes, amely az **alapsíkkal** nem párhuzamos. Ha a sokszög minden pontján keresztül párhuzamost húzunk az adott egyenessel, hasábfelületet kapunk. Ezt elmetszük egy, az alapsíkkal párhuzamos síkkal (**fedőlap**). Az így keletkező korlátos (zárt) térrészt nevezzük **hasábnak**. **Egyenes hasábot kapunk**, ha az adott egyenes merőleges az alapsíkra. Az oldallapokat együtt **palástnak** nevezzük. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága adja a **hasáb magasságát**.



A **hasáb térfogata**: *V = alapterület · testmagasság*,

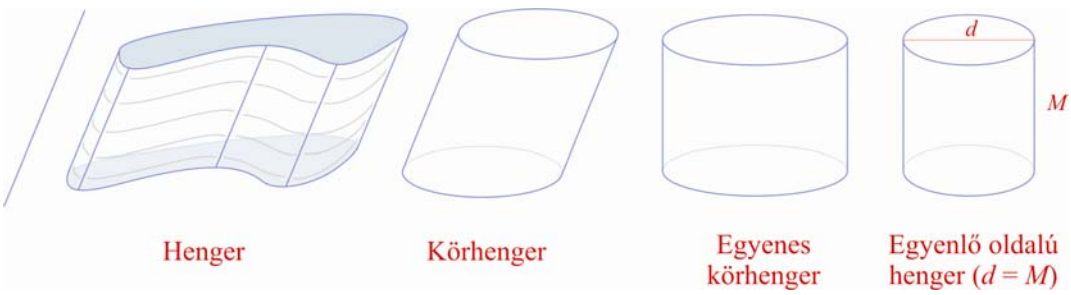
felszíne: *A = 2 · alapterület + a palást területe*.

A térfogat- és felszínképletek bizonyítható állítások. A téglatest és a kocka speciális hasábok.

- A kocka térfogata: $V = a^3$, felszíne $A = 6a^2$ (a a kocka élhossza).
- A téglatest térfogata $V = abc$, felszíne $A = 2\,(ab + bc + ac)$ (a, b és c a téglatest egy csúcsából kiinduló éleinek hossza).

Módszertani megjegyzés: A Polydron készlet és hurkapálca segítségével tanulmányozhatjuk a testek testátlóit, lapátlóit, hajlásszögeit. Javasolt téglatesteket, hasábokat építtetni a tanulókkal csoportmunkában, azon méréseket végezni, kiszámítani a lapátlókat, testátlókat, hajlásszögeket (pl. átló és él, átló és lap), és a mért adatokat összehasonlíttatni a számított adatokkal. Hatékony módszer, ha a tanulók párban végzik a méréseket és számításokat: előbb egy téglatesten mér az egyik tanuló, számít a másik, majd egy szabályos hatszög alapú hasábon felcserélik a szerepeket. A csoport másik párja szintén ugyanezen a két testen dolgozik, és a párok egyeztetik az eredményeket.
Így a mintapéldák helyett a gyakorlat során megépített testeken végezhetünk számításokat. Mindenképpen javasolt térfogatot és felszínt számíttatni, rajzoltassunk testhálót, írassuk be az adatokat a megfelelő élekre, és szögfüggvények alkalmazásával számíttassunk hajlásszögeket is.

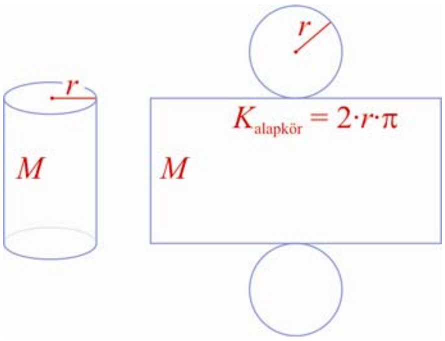
A hengert a hasábhoz hasonlóan származtatjuk.



Adott az alapsíkon egy görbe vonallal határolt síkidom (alaplap), és egy egyenes, amely az alapsíkkal nem párhuzamos. Ha a görbe minden pontján keresztül párhuzamost húzunk az adott egyenessel (alkotók), **hengerfelületet** kapunk. Ezt elmetsszük egy, az alapsíkkal párhuzamos síkkal (fedőlap). Az így keletkező, az alaplap és a fedőlap közé eső térrészt nevezzük **hengernek**. Ha a görbe kör, a test neve **körhenger**. **Egyenes körhengernél** az alkotók merőlegesek az alapsíkra. A test görbe határoló felületét **palástnak** nevezzük. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága adja a **testmagasságot**.

A hasáb térfogatához hasonló a **henger térfogata**: az alapterület és a testmagasság szorzatával határozhatjuk meg. Körhenger esetén: $V = r^2 \cdot \pi \cdot M$, ahol r az alapkör sugara, M a testmagasság.

Az egyenes körhenger (a továbbiakban ezt nevezzük hengernek, ha a feladat szövege nem utal a henger egyéb tulajdonságaira) felszínének kiszámításakor figyelembe vesszük, hogy a henger palástja síkba kiterítve téglalap.



A **henger felszíne**: $A = 2r^2\pi + 2r\pi M = 2r\pi(r + M)$.

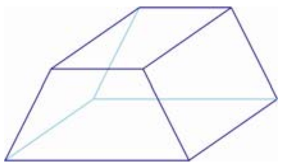
A henger és a hasáb esetében ugyanúgy számítjuk ki a térfogatot:

A **henger térfogata**: *V = alapterület · testmagasság.*

Módszertani megjegyzés: Az alábbi mintapéldát frontálisan, a bemutató segítségével vegyük át. Választhatjuk a két mintapélda feldolgozása helyett Polydron készlet alkalmazását az előbb leírt módon.

Mintapélda$_1$

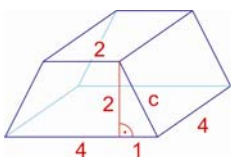
Az ábrán látható prizma egy fényképezőgép alkatrésze. Négy darab téglalap határolja, amelyek közül a szomszédosak egy-egy oldala közös és 4 cm hosszú, valamint két szimmetrikus trapéz, amelyek alapjai 4 cm és 2 cm, magassága 2 cm. Észrevehetjük, hogy ez egy trapéz alapú egyenes hasáb. A két trapéz síkja merőleges a prizma alap- és fedőlapjára. Számítsuk ki a prizma felszínét és a térfogatát!

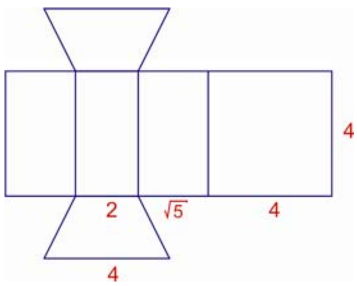


Megoldás:

A felszín kiszámításához szükségünk van a trapéz szárára:

$c = \sqrt{2^2 + 1^1} = \sqrt{5}$.





A test hálóját felrajzolva láthatók a testet határoló síkidomok. A felszín ezek területének összege:

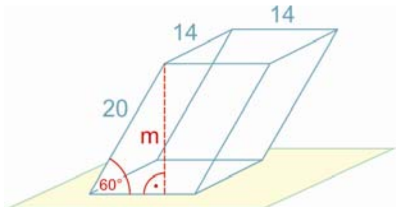
$$A = 4\cdot(2\sqrt{5}+2+4)+\frac{2+4}{2}\cdot 2 = 30+8\sqrt{5} \approx 47{,}9\,.$$

A térfogat kiszámításához felhasználjuk, hogy a test egy trapéz alapú egyenes hasáb, az alapterület a trapéz területe: $T = \frac{2+4}{2}\cdot 2 = 6\,(\text{cm}^2)$, a testmagasság M = 4 (cm), így $V = T\cdot M = 24$. A felszín 47,9 cm^2, a térfogat 24 cm^3.

Mintapélda$_2$

Egy négyzet alapú ferde hasáb két oldallapja téglalap, másik két oldallapja olyan paralelogramma, melynek egyik szöge 60°. Mekkora a hasáb térfogata és felszíne, ha az alapél 14 cm, az oldalél hossza 20 cm?

Megoldás:



Ábrát készítünk, és ráírjuk a megfelelő adatokat. Az alapterület $T = 14^2 = 196\,(\text{cm}^2)$.

Az egyik alapél és az oldalél által alkotott derékszögű háromszögből számítható a testmagasság, amely ebben az esetben az egyik oldallap magassága is egyben: $\sin 60° = \frac{m}{20}$, ahonnan $m = 20\cdot\sin 60° \approx 17{,}32\,(\text{cm})$.

$V = T\cdot m \approx 3394{,}7$, $A = 2\cdot(14^2+20\cdot 14+14\cdot 17{,}32) \approx 1436{,}96$.

A térfogat 3394,7 cm^3, a felszín 1436,96 cm^2.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokat csoportmunkában dolgozzuk fel: mindenki 1-1 részfeladattal foglalkozik a csoportból. Adott időre (például 8 perc) kell végezni. Az értékelés a megoldás helyessége alapján történik, a csoportban először a négyzetes oszlop térfogatának és felszínének képletét kell megkeresni, majd a munkamegosztásról kell dönteni. Az elkészült csapattagok segíthetnek társaiknak, ellenőrizhetik őket.
Gyengébb képességű tanulók esetén a képleteket közösen is meghatározhatjuk. Ekkor a megoldáshoz kevesebb időt adunk.

1. Mekkora az a alapélű, b oldalélű négyzetes oszlop térfogata és felszíne, ha

a) a = 12 cm, b = 2 dm; b) a = 2,4 cm, b = 35 mm; c) a = 400 mm, b = 4 dm;
d) a = 55 mm, b = 0,3 dm ?

Megoldás: a) 2880 cm^3, 1248 cm^2; b) 20,16 cm^3, 45,12 cm^2; c) 64 dm^3; 96 dm^2; d) 90,75 cm^3; 126,5 cm^2.

2. Egy négyzetes oszlop magassága háromszorosa az alapélnek. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!

	alapél	térfogat	felszín
a)	6 cm	*648 cm^3*	*504 cm^2*
b)	4,6 dm	*292 dm^3*	*296,24 dm^2*
c)	*7 cm*	*1029 cm^3*	686 cm^2
d)	*2,5 m*	46,875 m^3	*87,5 m^2*

Megoldás: A tanulóknak a szürke cellák adatait kell kiszámítaniuk.

3. Egy építkezéshez 32 darab, négyzetes oszlop alapú gerendát használnak fel. A gerenda keresztmetszete 10,5 cm x 10,5 cm, hosszuk egységesen 8,4 m.

a) Hány m^3 a gerendák térfogata összesen?

b) A gerendákat olyan felületkezelő anyaggal vonják be, amelynek kiadóssága 10 m^2/liter (azaz 10 m^2 kezeléséhez egy liter vegyszer szükséges). Hány liter vegyszerre van szükség?

Megoldás: a) $32 \cdot 2{,}96\,\mathrm{m}^3 \approx 94{,}72\,\mathrm{m}^3$; b) 35500,5 cm^2 ≈ 3,5 m^2 egy gerenda felszíne, az összes felszín: 112 m^2, ehhez 11,2 liter favédő anyag kell.

4. Számítsd ki az egyenlőszárú háromszög alapú hasáb térfogatát és felszínét, ha az alaplap alapja 50 cm, szárai 45 cm hosszúak, és a hasáb magassága 70 cm!

Megoldás: Az alaplap magassága $m = \sqrt{45^2 - 25^2} = \sqrt{1400} \approx 37{,}4\,(\mathrm{cm})$, az alapterület

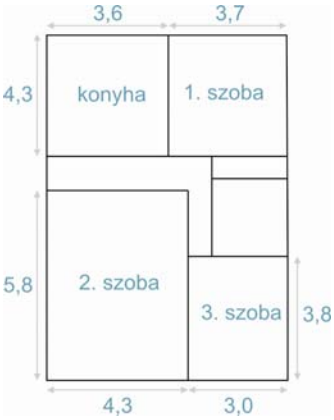
$$T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{50 \cdot 37{,}4}{2} \approx 935\,(\mathrm{cm}^2),\ V = T \cdot M = 65450\,.$$

$$A = 2T + P = 2 \cdot 935 + (50 + 2 \cdot 45) \cdot 70 = 11670\,.$$

A térfogat 65450 cm^3, a felszín 11670 cm^2.

5. Az alábbi lakás szobáiba és konyhájába szeretnének klímaberendezést vásárolni. A lakás magassága 2,8 méter. Becsüljük meg, mekkora teljesítményű berendezéseket vásároljanak az egyes helyiségekbe! Átlagosan 35 W/m^3 teljesítményegységgel számolhatunk.

Megjegyzés: A kapott érték valóban becslés, mert a kívánt teljesítmény függ a helyiség használatának jellegétől, a benne tartózkodó személyek számától, a burkolófelületek anyagától, a tájolástól stb.

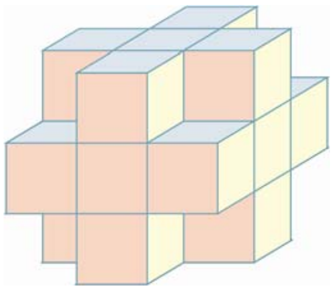


Megoldás: A konyha térfogata $3{,}6 \cdot 4{,}3 \cdot 2{,}8 \approx 43{,}3$ (m^3), a szükséges teljesítmény

$43{,}3 \cdot 35\ \text{W} = 1515{,}5\ \text{W} \approx 1{,}5\ \text{kW}$. Hasonlóan számolva: 1. szoba: 44,5 m^3 és 1,6 kW;

2. szoba: 70 m^3 és 2450 W ≈ 2,5 kW; 3. szoba: 32 m^3 és 1120 W ≈ 1,1 kW.

6. Egy 9 cm oldalhosszúságú kocka sarkaiból levágunk egy-egy 3 cm oldalélű kockát az ábra szerint. Mekkora a megmaradó rész térfogata és felszíne?



Megoldás: $V = 9^3 - 8 \cdot 3^3 = 513$, $A = 6 \cdot 9^2 = 486$.

A térfogat 513 cm^3, a felszín 486 cm^2.

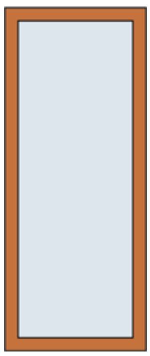
Módszertani megjegyzés: Csoportmunkához ajánlott, hogy a tanulók számítsák ki padjuk faanyagának (vagy bútorlapanyagának) térfogatát és felszínét. Határozzák meg, hogy milyen adatokat kell megmérniük, végezzék el a méréseket, majd a számításokat.

7. Egy téglatest egyik éle 3 m-rel hosszabb a másiknál, a harmadik éle 20 m, a térfogata 2600 m^3. Mekkorák az élei és a felszíne?

Megoldás: Másodfokúra visszavezethető egyenletet kapunk (a a rövidebbik él):

$2600 = a(a+3)20$, ahonnan a hiányzó élek 10 m és 13 m, a felszín 1180 m^2.

8. Egy ajtóban az üveg keretét 8 cm széles és 3 cm vastag deszkából készítették. Az ajtó 210 cm magas és 86 cm széles, az üveg 8 mm vastag. Az ajtó térfogatának hány százaléka az üveg térfogata?



Megoldás: Az üvegtábla méretei: 194 cm x 70 cm, a térfogata $V_1 = 194 \cdot 70 \cdot 0{,}8 = 10864$ (cm³), a keret térfogata $V_2 = 2 \cdot (210 \cdot 8 \cdot 3 + 70 \cdot 8 \cdot 3) = 13440$ (cm³). Az üveg

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} \cdot 100 = 44{,}7\% .$$

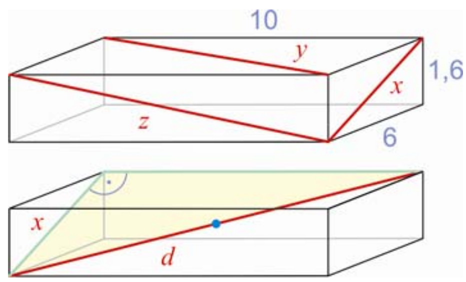
9. Egy szabályos hatszög alapú hasáb alapéle 12 cm, testmagassága 25 cm. Számítsd ki a térfogatát és a felszínét!

Megoldás: $V \approx 9353\ \text{cm}^3$, $A \approx 2548\ \text{cm}^2$.

Mintapélda₃

Egy ideiglenes, téglatest alakú színpad vas keretéhez merevítésként be kell hegeszteni síkonként egy-egy lapátlót és két testátlót (amelyek metszik egymást, ezért a két testátlót négy egyforma darabból kell összeállítani). Számítsuk ki, hogy a kerettel együtt milyen hosszú vasanyagra lesz szükség, ha a színpad 1,6 m magas, és 10 m x 6 m a felület, amin fellépnek a művészek. Mekkora szögben illeszkedik egymáshoz a két testátló és milyen hosszú az a négy darab, amiből összehegesztve megkapjuk ezt a merevítést?

Megoldás:



A téglatest lapátlóit Pitagorasz-tétellel számítjuk ki: $x = \sqrt{6^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{38{,}56} \approx 6{,}21\,(\text{m})$;

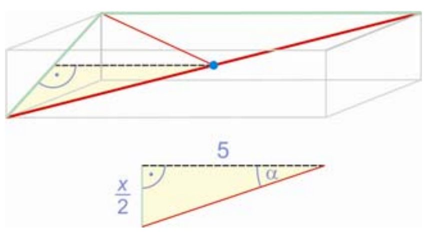
$y = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \approx 11{,}66\,(\text{m})$;

$z = \sqrt{1{,}6^2 + 10^2} = \sqrt{102{,}56} \approx 10{,}13\,(\text{m})$.

A testátlót a kiemelt derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel határozzuk meg: $d^2 = 10^2 + x^2 = 10^2 + 6^2 + 1{,}6^2$, ahonnan $d^2 = 138{,}56$, $d \approx 11{,}77\,(\text{m})$.

A megfelelő darabok hosszát összeadva kapjuk a szükséges anyagmennyiséget:

$4 \cdot (10 + 6 + 1{,}6) + 2 \cdot (x + y + z) + 2 \cdot 11{,}77 \approx 150$, vagyis 150 m anyagra van szükség.

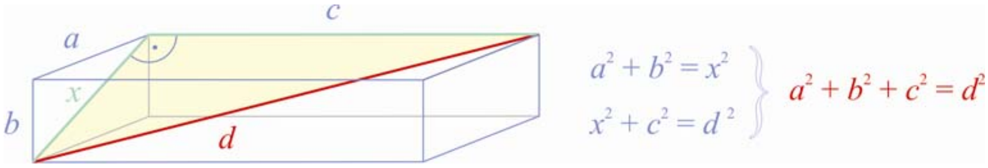


A hajlásszög kiszámításához derékszögű háromszöget keresünk a testátlók által meghatározott síkban.

Szögfüggvény segítségével $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{x}{2}}{5} = \dfrac{x}{10}$, ahonnan $\alpha \approx 31{,}8°$. A keresett hajlásszög $2\alpha \approx 64°$.

A feladat megoldása során láttuk, hogy a **testátló hossza** hogyan függ az oldalak hosszától:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Ebből kapunk egy általánosan is igaz összefüggést:



A téglatest testátlójának hossza: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ahol a, b és c a téglatest egy csúcsban összefutó élei.

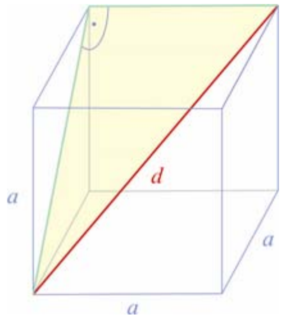
Mintapélda$_4$

Hogyan függ a kocka testátlójának hossza a kocka oldalhosszától (a)?

Megoldás:

A kocka is téglatest, így a testátlóra kapott összefüggést itt is alkalmazhatjuk. Most minden oldal egyenlő:

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2}$, ahonnan $d = a\sqrt{3}$.



Feladatok

10. Egészítsd ki a táblázat hiányzó részeit! a, b és c egy téglatest egy csúcsban összefutó élei, d a testátló, A a felszín és V a térfogat.

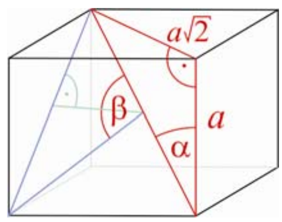
	a	b	c	d	A	V
a)	5 cm	8 cm	10 cm	*13,7 cm*	*340 cm^2*	*400 cm^3*
b)	12,3 cm	0,46 dm	72 mm	*15 cm*	*356,5 cm^2*	*407,4 cm^3*
c)	10 m	20 m	*26 m*	34,3 m	*1960 m^2*	*5200 m^3*
d)	6 cm	*11 cm*	14,8 cm	19,4 cm	*635,2 cm^2*	*976,8 cm^3*
e)	*8 dm*	*16 dm*	*19 dm*	26,1 dm	*1168 dm^2*	*2432 dm^3*

Megoldás: A szürke cellák értékének kiszámítása a feladat.

11. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója

a) a kocka éleivel; b) a kocka lapjaival; c) a kocka egy másik testátlójával?

Megoldás: a) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \approx 54{,}7°$; b) $90° - \alpha \approx 35{,}3°$;



c) $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\beta \approx 109{,}5°$. Azonban a hajlásszög 90°-nál nem nagyobb, ezért a keresett szög β mellékszöge: 70,5°.

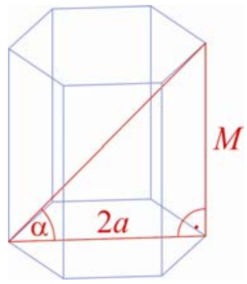
12. Mekkora a kocka térfogata és a felszíne, ha testátlója 12 cm?

Megoldás: A testátló: $d = 12 = a\sqrt{3}$, ahonnan $a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. A térfogat

$V = a^3 = 192\sqrt{3} \approx 332{,}6\ \text{cm}^3$, a felszín $A = 6a^2 = 288\ \text{cm}^2$.

13. Mekkora szöget zár be a 4 cm alapélű, 499 cm^3 térfogatú, szabályos hatszög alapú hasáb leghosszabb testátlója az alaplappal?

Megoldás:



Az alapterület $T = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$, a magasság $M = \frac{V}{T} \approx 12\ \text{cm}$.

$\text{tg}\alpha = \frac{M}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, ahonnan $\alpha \approx 56{,}3°$.

Hengerrel kapcsolatos feladatok

Módszertani megjegyzés: A mintapéldák és a feladatok feldolgozását csoportban célszerű feldolgozni. Használjuk a modulhoz készült bemutatót: a mintapéldákat vetítsük ki, hagyjunk a csoportoknak néhány percet a megoldásra, majd együtt ellenőrizzük az eredményt. A mintapéldákban alapfeladatokat találunk. A Tanulók könyvét ekkor a gyerekek ne használják!

Mintapélda$_5$

Az üvegben a címke szerint 750 ml méz található. Milyen magasan áll a méz a henger alakú üvegben, ha az alaplap belső átmérője 9 cm?

Megoldás:

750 ml = 750 cm^3. A térfogat képlete $V = r^2\cdot\pi\cdot M$, behelyettesítve

$750 = 4{,}5^2\cdot\pi\cdot M \;\Rightarrow\; M \approx 11{,}8\ \text{cm}$.

A méznek az üvegben kb. 12 cm magasan kell állnia.

Mintapélda$_6$

Egy henger magassága kétszerese az alaplap átmérőjének. Mekkora a térfogata, ha a felszíne 985,2 cm^2?

Megoldás:

$M = 2d = 4r$; behelyettesítve a felszín képletébe:

$A = 2r\pi \cdot (r + 4r) = 2r\pi \cdot 5r = 10r^2 \cdot \pi = 985{,}2\,(\text{cm}^2)$. $r = \sqrt{\dfrac{985{,}2}{10 \cdot \pi}} \approx 5{,}6\ (\text{cm})$.

A térfogat értéke a $V = r^2 \cdot \pi \cdot M = 4r^3 \cdot \pi$ összefüggésből: $V \approx 2206{,}9\ \text{cm}^3$.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokat lehetőleg csoportmunkában oldjuk meg.

14. Számítsd ki annak a hengernek a térfogatát és felszínét, amelyet egy 16 cm x 10 cm-es téglalap megforgatásával kapunk, ha a téglalapot a

a) rövidebb oldalának felezőmerőlegese;
b) hosszabb oldalának felezőmerőlegese;
c) rövidebb oldala;
d) hosszabb oldala körül forgatjuk meg.

Az eredményeket foglald táblázatba!

Megoldás: A diákok anyagában nincs táblázat. Az eredmények táblázatos összegzése a csoportmunka része. Előbb érdemes megtervezni a táblázatot, majd elosztani a különböző számolásokat (amelyek során a táblázat celláinak értékét kell meghatározni) a csoporton belül.

	r	M	V	A
a)	*5 cm*	*16 cm*	*1256,6 cm^3*	*659,7 cm^2*
b)	*8 cm*	*10 cm*	*2010,6 cm^3*	*904,8 cm^2*
c)	*16 cm*	*10 cm*	*8042,5 cm^3*	*2613,8 cm^2*
d)	*10 cm*	*16 cm*	*5026,5 cm^3*	*1633,6 cm^2*

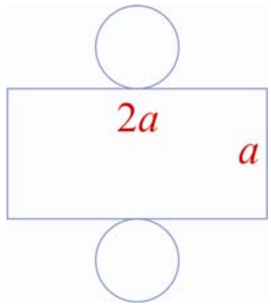
15. Az a és b oldalú téglalapot megforgatjuk az a oldala körül, a keletkező test térfogata V, felszíne A. Keresd meg az összetartozó betű-szám párosokat!

A) $a = 15;\ b = 5$; B) $a = 18;\ b = 12$; C) $a = 4;\ b = 3$; D) $b = 7;\ a = 3$;

1) $\dfrac{V}{A} = \dfrac{18}{5}$; 2) $\dfrac{A}{V} = \dfrac{20}{21}$; 3) $\dfrac{V}{A} = \dfrac{15}{8}$; 4) $\dfrac{V}{A} = \dfrac{6}{7}$.

Megoldás: A– 3; B – 1; C – 4; D – 2. Ügyesebb tanulók számolás helyett észrevehetik, hogy

$$\frac{V}{A}=\frac{ab^2\pi}{2b\pi(a+b)}=\frac{ab}{2(a+b)}.$$



16. Mekkora az ábrán látható henger térfogata? a = 15 cm.

Megoldás:

Az alapkör kerülete: $K=2r\pi=2a\ \Rightarrow\ r=\frac{a}{\pi}\approx 4{,}77$ az alapkör sugara, a testmagasság $M=15$ cm. Így a térfogat nagysága $V=r^2\cdot\pi\cdot M\approx 1072{,}2$ cm^3, a felszín

17. Egy 6 hengeres motorról a henger leírásában a következőt találjuk:

furat ∅ / lökethossz = 89,00/74,8 mm. Hány cm^3-es a motor?

Megoldás: A furat átmérője a henger alapkörének átmérője, a lökethossz pedig a henger magassága. $d=89\ \Rightarrow\ r=\frac{89}{2}=44{,}5$ (mm). A hengerek együttes térfogata

$V=6\cdot r^2\pi\cdot M\approx 2792$ cm^3.

18. Kati mamája egy fektetett félhenger alakú fóliasátrat szeretne, amelyikben ki is tud egyenesedni. Ezért szeretnék, hogy a 23 méter hosszú sátor teteje 2 méter magas legyen.

a) Hány m^2 fóliával lehet a sátrat bevonni?

b) Hány m^3 a sátor térfogata?

Megoldás:

a) $r=2\ \text{m}\ \Rightarrow\ T=\frac{r^2\pi}{2}=2\pi\approx 6{,}28\ (\text{m}^2)$, $A=2T+P=4\pi+r\cdot\pi\cdot M=50\pi\approx 157\ \text{m}^2$.

b) $V=T\cdot M=\frac{r^2\pi}{2}\cdot 23\approx 144{,}51\ \text{m}^3$.

19. Egy henger kiterített palástja négyzet, a felszíne 3384,5 cm^2. Mekkora a térfogata?

Megoldás: A testmagasság egyenlő az alapkör kerületével: $M = 2r\pi$, ezért a felszín:

$$A = 2r\pi(r+M) = 2r\pi(r+2r\pi) = 2r^2\pi(1+2\pi) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{2\pi(1+2\pi)}} \approx 8{,}6\,(\text{cm}),$$

$M \approx 54$ cm. A henger térfogata $V \approx 12547\ \text{cm}^3$.

20. Egy betoncső külső átmérője 50 cm, a belső átmérő 40 cm. Mekkora a 6 méteres betoncső tömege, ha a beton sűrűsége 2200 kg/m^3? (A sűrűséget a $\rho = \frac{m}{V}$ összefüggés adja, ahol *m* a tömeg, *V* a térfogat, és a csőben levő levegő tömege elhanyagolható.)

Megoldás: A cső falának térfogatát a két henger térfogatának különbsége adja:

$$V = r_1^2\pi M - r_2^2\pi M = \left(r_1^2 - r_2^2\right)\pi M = \left(0{,}25^2 - 0{,}2^2\right)\pi \cdot 6 \approx 0{,}424\,(\text{m}^3).$$

A tömeg $m = \rho \cdot V \approx 933$ kg.

21. Egy henger alakú vödör átmérője 26 cm, és felmosáskor 20 cm magasan áll benne a víz. A mosószer kupakján ez áll: „*5 liter vízhez 1 kupakkal öntsön*". Hány kupakkal kell öntenünk felmosáskor a vödörbe?

Megoldás: $r = 13$ cm; $M = 20$ cm; $V = 13^2\pi 20 \approx 10618{,}6\ \text{cm}^3 \approx$ 10,62 liter, vagyis 2 jól megtöltött kupakkal kell beleönteni.

22. Egy henger alaplapjának átmérője harmada a testmagasságnak. Mekkora

a) a térfogata, ha a felszíne 395,8 cm^2; b) a felszíne, ha a térfogata 217,1 dm^3?

Megoldás: $M = 3d = 6r$, így $V = 6r^3\pi$ és $A = 14r^2\pi$.

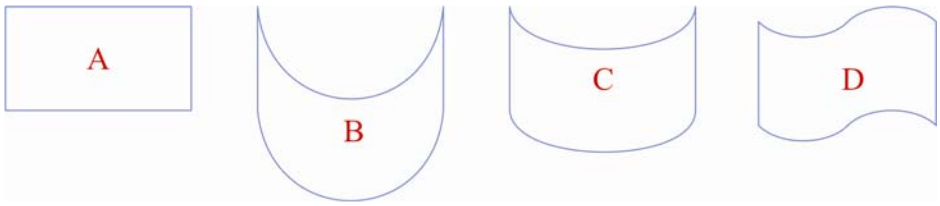
a) $14r^2\pi = 395{,}8 \Rightarrow r \approx 3\ \text{cm} \Rightarrow V \approx 508{,}9\ \text{cm}^3$;

b) $6r^3\pi = 217{,}1 \Rightarrow r \approx 2{,}26\ \text{dm} \Rightarrow A \approx 224{,}6\ \text{dm}^2$.

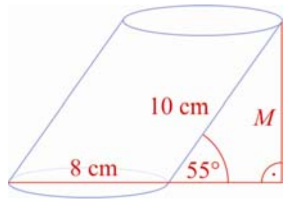
Módszertani megjegyzés: A tanulóknak el kell magyarázni, hogyan tudnak köbgyököt vonni a számológéppel.

23. Egy ferde henger alkotói 55°-os szöget zárnak be a 8 cm átmérőjű alaplappal, az alkotók hossza 10 cm.

a) Válaszd ki, hogy milyen alakú a ferde henger palástja!



b) Mekkora a henger térfogata?



Megoldás:

a) D.

b) $M = 10 \cdot \sin 55° \approx 8{,}2$ cm, a térfogat $V = 4^2 \pi \cdot 8{,}2 \approx 412{,}2\ \text{cm}^3$.

24. Egy henger palástja síkba kiterítve 12 cm x 18 cm-es téglalap. Mennyi a henger felszíne és térfogata? Ne csak egy megoldásra gondolj!

Megoldás: Ha a magasság 12 cm, akkor az alapkör kerülete 18 cm, és ekkor a sugár $r = \dfrac{18}{2\pi} \approx 2{,}9$ cm. Ekkor $V = 2{,}9^2 \pi \cdot 12 \approx 317\ \text{cm}^3$ és $A = 2 \cdot 2{,}9\pi(2{,}9 + 12) \approx 271{,}4\ \text{cm}^2$.

Ha a magasság 18 cm, akkor $r \approx 1{,}9\,(\text{cm})$; $V \approx 204{,}1\ \text{cm}^3$; $A \approx 237{,}6\ \text{cm}^2$.

25. Egyenlő oldalú henger (az alapkör átmérője egyenlő a magassággal)

a) térfogata 2155,1 m^3. Mennyi a felszíne?

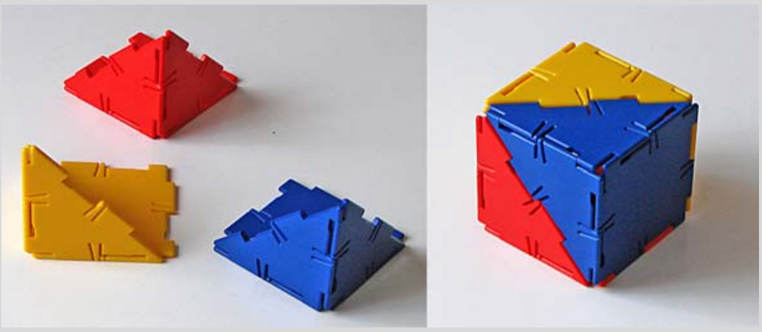
b) felszíne 2851,7 dm^2. Mennyi a térfogata?

Megoldás: a) $r = 7$ m, $M = 14$ m, $A = 923{,}6\ \text{m}^2$;

b) $r = 12{,}3$ dm, $M = 24{,}6$ dm, $V = 11692{,}2\ \text{dm}^3$.

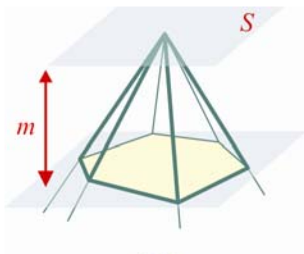
III. A gúla és a kúp

Módszertani megjegyzés: A Polydron készletet használhatjuk annak a szemléltetésre is, hogy az ábrán látható gúla térfogata harmada a vele azonos alapélű kocka térfogatának. A három gúlát ui. össze lehet úgy pattintani, hogy együtt kiadják a kockát.



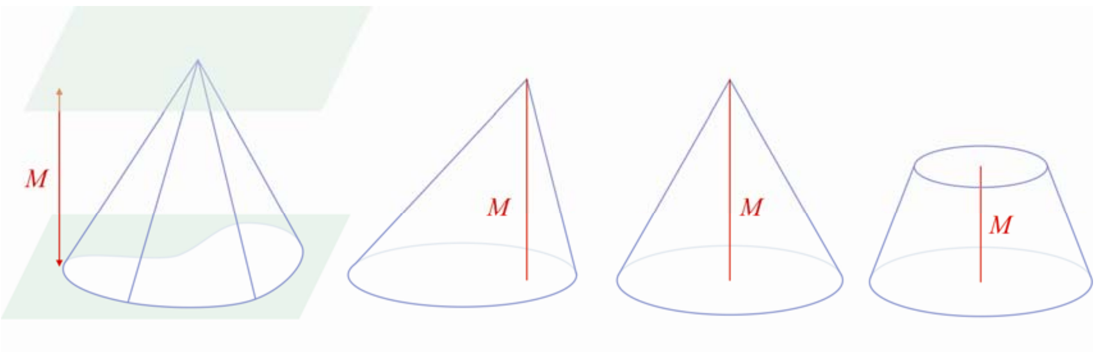
A gúla

Adott az alapsíkon egy sokszög (**alaplap**), és egy pont az alapsíkon kívül (**csúcspont**). Ha a sokszög minden pontját egyenesekkel összekötjük az adott ponttal, gúlafelületet kapunk. A keletkező korlátos térrészt nevezzük **gúlának**. A **gúla magassága** az alaplap síkjának és a csúcspontnak a távolsága.



Gúla

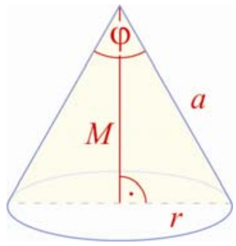
A kúp



Kúp Körkúp Egyenes körkúp Csonka kúp

Adott az alapsíkon egy görbe vonallal határolt síkidom (alaplap), és egy pont az alapsíkon kívül (csúcspont). Ha a görbe minden pontját egyenesek segítségével összekötjük az adott ponttal, kúpfelületet kapunk. A keletkező korlátos testet **kúpnak** nevezzük. Ha a zárt görbe kör, a test neve **körkúp**. **Egyenes körkúpnak** nevezzük a körkúpot, ha a pontnak az alaplap síkjára eső merőleges vetülete az alapkör középpontjába esik. A test határoló felületét nevezzük **palástnak** (egyenes körkúp síkba kiterített palástja körcikk; a palást az alaplapot nem tartalmazza), a csúcspont és a görbe pontjai által meghatározott szakaszokat pedig **alkotóknak**. Az alaplap síkjának és a csúcsnak a távolsága adja a **kúp magasságát**.

Ha az egyenes körkúpot elmetsszük egy olyan síkkal, amely a kúp magasságának egyenesét tartalmazza (tengelymetszet), akkor egyenlőszárú háromszöget kapunk (alapja az alapkör átmérője, szárai a kúp alkotói). Másként: az egyenes körkúp tengelymetszete egyenlőszárú háromszög. A szárak által bezárt szöget (φ) a **kúp nyílásszögének** nevezzük. Az egyenes körkúp szimmetrikus bármely, a tengelyét tartalmazó síkra.



A sugár, a testmagasság és az alkotók között fennáll a derékszögű háromszögre érvényes Pitagorasz-tétel: az $\boldsymbol{r^2 + M^2 = a^2}$ összefüggés.

A gúla és a kúp térfogatát hasonlóan számítjuk ki: $V = \dfrac{alapterület \cdot testmagasság}{3}$.

A felszín is mindkét esetben hasonló: $A = T_{\text{alapterület}} + T_{\text{palást}}$.

A körkúp esetén az alapterület az alapkör területe $r^2\pi$. A körkúp térfogata $V = \dfrac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$.

A képletben r az alapkör sugara, M a kúp magassága.

Az egyenes körkúp felszínének meghatározásához a kúpot az egyik alkotója mentén „szét kell vágnunk”: a palást síkba kiterítve egy körcikk, amelynek területe: $ra\pi$.

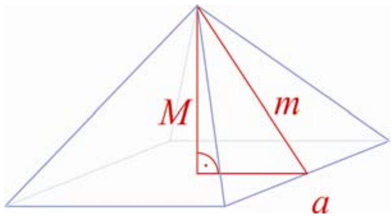
$$\left.\begin{array}{ll} \text{alapterület:} & r^2 \cdot \pi \\ \text{palást területe:} & r \cdot a \cdot \pi \end{array}\right\} \quad A_{kúp} = r^2 \cdot \pi + r \cdot a \cdot \pi = r \cdot \pi\,(r + a)$$

Az egyenes körkúp térfogata: $V = \dfrac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$, felszíne: $A = r\pi(r + a)$.

A képletben r az alapkör sugara, M a kúp magasságának, a az alkotónak a hossza.

Feladatok

26. Kheopsz fáraó négyzet alapú szabályos gúlát formáló Nagy Piramisának eredeti alapéle 230 m, magassága 147 m volt. Számítsuk ki, hogy mekkora a térfogata és a felszíne!



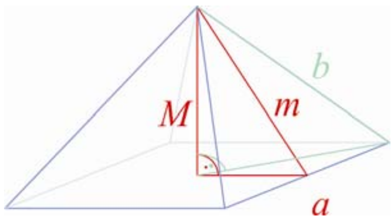
Megoldás: $a = 230$ m, $M = 147$ m;

$$V = \frac{T \cdot M}{3} = \frac{a^2 \cdot M}{3} \approx 2{,}6 \cdot 10^6 \text{ m}^3,$$

$A = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = a^2 + 2am$; Pitagorasz-tétellel kiszámítva $m = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2} \approx 186{,}6$ (m). Behelyettesítve $A = 138736 \approx 1{,}4 \cdot 10^5 \text{ m}^2$.

27. Egy négyzet alapú szabályos gúla alapéle 3,5 dm. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 50 cm

a) a testmagassága; b) az oldallapjának magassága; c) az oldaléle?



Megoldás: a) $a = 35$ cm, $M = 50$ cm.

$$V = \frac{T \cdot M}{3} = \frac{a^2 \cdot M}{3} \approx 20417 \text{ cm}^3,$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2} \approx 53 \text{ cm}, \; A = a^2 + 2am = 4935 \text{ cm}^2.$$

b) $a = 35$ cm, $m = 50$ cm, $M = \sqrt{m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx 46{,}8$ (cm). $V \approx 19110 \text{ cm}^3$,

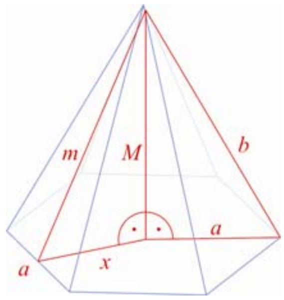
$A = 4725 \text{ cm}^2$.

c) $M^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \Rightarrow M = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{50^2 - \frac{35^2}{2}} \approx 43{,}4$ cm, $V \approx 17721{,}7 \text{ cm}^3$.

$$m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{50^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} \approx 46{,}8 \text{ cm}, \; A \approx 4501 \text{ cm}^2.$$

28. Egy szabályos hatszög alapú egyenes gúla alapéle a = 12 cm. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 20 cm a) testmagassága; b) oldallapjának magassága; c) oldaléle?

Megoldás: Az alapterület mindhárom esetben $T = 6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\approx 374{,}1\,(\text{cm}^2)$, és



$x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\approx 10{,}4\,(\text{cm})$. Az alkalmazott képletek: $V=\dfrac{T\cdot M}{3}$,

$A=T+6\cdot\dfrac{a\cdot m}{2}$.

a) $a=12\,\text{cm};\ M=20\,\text{cm}.\ V\approx 2494\ \text{cm}^3.$

$m=\sqrt{x^2+M^2}\approx 22{,}6\,(\text{cm}),\ A\approx 1188\,\text{cm}^2.$

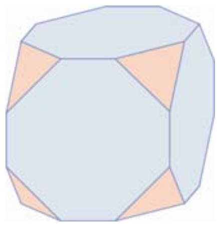
b) $a=12\,\text{cm};\ m=20\,\text{cm}.\ M=\sqrt{m^2-x^2}\approx 17{,}1\,(\text{cm}),$

$V\approx 2132{,}4\,\text{cm}^3.\ A\approx 1094\ \text{cm}^2.$

c) $a=12\,\text{cm};\ b=20\,\text{cm}.\ M=\sqrt{b^2-a^2}=16\,(\text{cm}),\ V\approx 1995{,}2\ \text{cm}^3.$

$m=\sqrt{x^2+M^2}\approx 19{,}1\,(\text{cm}),\ A\approx 1061{,}7\ \text{cm}^2.$

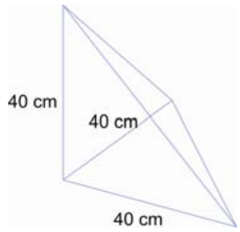
29. Reklámcélra egy cég legyártja az ábrán látható testet: egy 120 cm élű kocka éleinek harmadoló pontjait kötötték össze, és levágták a kocka így adódó sarkait.



a) Mekkora a keletkező test térfogata?

b) Mekkora a felülete a piros és a kék részeknek összesen?

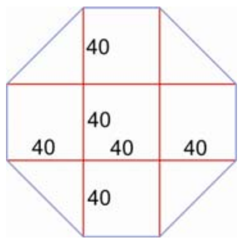
Megoldás:



a) A levágott gúla alaplapjának az egyik derékszögű háromszög alakú lapját tekintjük. Ekkor a gúla magassága 40 cm.

$$V_1=\frac{T\cdot M}{3}=\frac{\frac{40^2}{2}\cdot 40}{3}\approx 10666{,}7\,\text{cm}^3.$$ A test térfogata

$V=120^3-8\cdot V_1\approx 1642666{,}4\ \text{cm}^3\approx 1{,}6\,\text{m}^3.$



b) A testet 6 darab nyolcszög és 8 darab szabályos háromszög határolja. Egy nyolcszög területe: $T_1=5\cdot 40^2+4\cdot\dfrac{40^2}{2}=11200\,(\text{cm}^2)$,

egy háromszög területe:

$$T_2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(40\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\approx 1385{,}6\,(\text{cm}^2).$$

A test felszíne: $A=6\cdot T_1+8\cdot T_2\approx 78284{,}8\,\text{cm}^2\approx 7{,}8\,\text{m}^2.$

30. A Téglatest együttes új nevet vett fel: Pyramys. Az együttes koncertjein árult, műanyagból készült, 3 cm x 4 cm x 5 cm élű téglatestekből 360 darab megmaradt. Ezeket megolvasztják, és olyan négyzet alapú szabályos piramisokat gyártatnak belőle, amelyek alapéle 7 cm, testmagassága 3,5 cm. A gyártás során 7%-os térfogatveszteséggel kell számolni. Hány ilyen piramis készíthető?

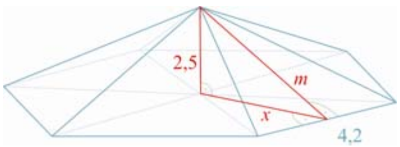
Megoldás: A megmaradt anyag térfogatának 93%-a megegyezik az új piramisok térfogatának összegével: $V_1 \cdot 0{,}93 = V_2$. A téglatestek térfogata, $V_1 = 360 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 21600\ \text{cm}^3$, n darab piramis esetén a térfogat $V_2 = n \cdot \frac{7^2 \cdot 3{,}5}{3} \approx n \cdot 57{,}17$. Az egyenletet felírva: $21600 \cdot 0{,}93 = n \cdot 57{,}17$, ahonnan $n \approx 351{,}4$, vagyis 351 darab piramis készíthető.

31. Egy vállalkozás reklámcélokra szabályos hatszög alapú szabályos gúlákat csináltat, amit fából készítenek el. A gúla alapélei 4,2 cm hosszúak, magassága 25 mm. Eddig 250 ilyen ajándékot osztottak ki.

a) Hány cm^3 faanyag van az eddig kiosztott gúlákban?

b) A gúla oldallapjait színesre festik. Hány cm^2 felületet festenek be egy gúla oldallapjainak a színezésekor? Mennyi festékre volt szükség a 250 ajándék befestésekor, ha 1 m^2-hez 3,6 liter festék kell?

Megoldás:



a) Az alapterület hat szabályos háromszög összege:

$T = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 45{,}83$ (cm^2), a gúlák térfíogata:

$$V = 250 \cdot \frac{T \cdot M}{3} = 250 \cdot 6 \cdot \frac{4{,}2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2{,}5 \approx 250 \cdot 38{,}2 \approx 9550\,\text{cm}^3.$$

b) A palást területének kiszámításához szükségünk van az oldallap magasságára.

$x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}64$ (cm), a Pitagorasz-tételt felírva $x^2 + 2{,}5^2 = m^2$, ahonnan

$m \approx 4{,}41$(cm). A palást területe: $P = 6 \cdot \frac{4{,}2m}{2} \approx 55{,}6\,\text{cm}^2$, összesen a felszín:

$A = 250 \cdot P \approx 13900$ (cm^2) $\approx 1{,}4$(m^2), ezért $1{,}4 \cdot 3{,}6 \approx 5$ liter festék kellett.

Kúpokkal kapcsolatos feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatot célszerű kitűzni csoportmunkában: minden tanuló 4 különböző jellegű számítást végezzen (például az egyik tanuló az A jelűeket, másik a B jelűeket stb). A csoport akkor készül el, ha mind a négy négyes csoportot megtalálták.

32. Számítsd ki a következő adatokkal megadott kúpok nyílásszögeit, és csoportosítsd az egyenlőket! (Minden távolságadat cm-ben értendő. K az alapkör kerülete, T a területe, a az alkotó hossza, r az alapkör sugara, M a kúp magassága.)

A1. $r = 2$, $a = 4$;	A2. $r = 3$, $M = 3{,}4$;	A3. $a = 12$, $K = 47{,}1$;	A4. $M = 19{,}4$, $T = 78{,}5$
B1. $r = 2{,}2$, $a = 8{,}8$;	B2. $r = 3$, $M = 5{,}2$;	B3. $a = 15$, $K = 62{,}8$;	B4. $M = 20$, $T = 804{,}2$
C1. $r = 4$, $a = 6$;	C2. $r = 10$, $M = 12{,}5$;	C3. $a = 64$, $K = 100{,}5$;	C4. $M = 19{,}1$, $T = 380{,}1$
D1. $r = 5$, $a = 8$;	D2. $r = 3{,}5$, $M = 13{,}6$;	D3. $a = 9{,}6$, $K = 30{,}2$;	D4. $M = 13{,}4$, $T = 452{,}4$

Megoldás:

nyílásszög(°)	r	a	M	$K_{alapkör}$	$T_{alapkör}$	No.
60,0	2	4	3,5	12,6	12,6	A1
60,0	3	6	5,2	18,8	28,3	B2
60,0	4,8	9,6	8,3	30,2	72,4	D3
60,0	11	22	19,1	69,1	380,1	C4
83,6	4	6	4,5	25,1	50,3	C1
83,6	3	4,5	3,4	18,8	28,3	A2
83,6	10	15	11,2	62,8	314,2	B3
83,6	12	18	13,4	75,4	452,4	D4
77,4	5	8	6,2	31,4	78,5	D1
77,4	10	16	12,5	62,8	314,2	C2
77,4	7,5	12	9,4	47,1	176,7	A3
77,4	16	25,6	20,0	100,5	804,2	B4
29,0	2,2	8,8	8,5	13,8	15,2	B1
29,0	3,5	14	13,6	22,0	38,5	D2
29,0	16	64	62,0	100,5	804,2	C3
29,0	5	20	19,4	31,4	78,5	A4

Csoporttagonként csoportosítva:

nyílásszög(°)	r	a	M	$K_{alapkör}$	$T_{alapkör}$	No.
60,0	2	4	3,5	12,6	12,6	A1
83,6	3	4,5	3,4	18,8	28,3	A2
77,4	7,5	12	9,4	47,1	176,7	A3
29,0	5	20	19,4	31,4	78,5	A4
29,0	2,2	8,8	8,5	13,8	15,2	B1
60,0	3	6	5,2	18,8	28,3	B2
83,6	10	15	11,2	62,8	314,2	B3
77,4	16	25,6	20,0	100,5	804,2	B4
83,6	4	6	4,5	25,1	50,3	C1
77,4	10	16	12,5	62,8	314,2	C2
29,0	16	64	62,0	100,5	804,2	C3
60,0	11	22	19,1	69,1	380,1	C4
77,4	5	8	6,2	31,4	78,5	D1
29,0	3,5	14	13,6	22,0	38,5	D2
60,0	4,8	9,6	8,3	30,2	72,4	D3
83,6	12	18	13,4	75,4	452,4	D4

Módszertani megjegyzés: A következő feladatot igaz-hamis diákkvartettben ajánljuk feldolgozni. Kérjünk indokolást is a csoportoktól!

33. Döntsd el a következő állításokról, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis.

a) A kúp alkotójának hossza egyenlő a testmagasságával ($a = M$).

b) Ha a kúp alkotója kétszerese az alapkör átmérőjének, akkor a kúp nyílásszöge kb. 29°.

c) Minden kúp nyílásszöge egyenlő a kiterített palást középponti szögével.

d) A palást középponti szöge és az alapkör sugara egyértelműen meghatározza a kúpot.

e) Ha egy kúpot kétszeresére nagyítunk, a palástjának felszíne is kétszeresére növekszik.

Megoldás: a) H; b) I; c) H; d) I; e) H.

Módszertani megjegyzés: A következő alapfeladatot csoportmunkában célszerű elvégezni.

34. Egy a alapú, b szárú egyenlőszárú háromszöget megforgatunk a szimmetriatengelye körül. Állítsd térfogatuk szerint növekvő sorrendbe a keletkező kúpokat!

	A.	B.	C.	D.
a	0,8 dm	1 dm	6 cm	12 cm
b	10 cm	8 cm	1,2 dm	8 cm

Megoldás: A sorrend: C, A, B, D.

	a	b	V (cm^3)
A.	0,8 dm	10 cm	*153,6*
B.	1 dm	8 cm	*163,5*
C.	6 cm	1,2 dm	*109,5*
D.	12 cm	8 cm	*199,5*

35. Egy csokigyárban naponta 12000 darab csokikúpot gyártanak, amelyet egyenként fóliába csomagolnak. A kúpok alapkörének átmérője és magassága egyaránt 4 cm.

a) Hány liter csokoládéból készül el a napi készlet?

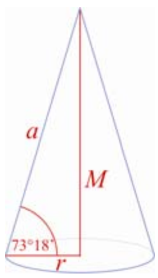
b) Mekkora felületű fóliát használnak naponta csomagolásra, ha a hajtogatás miatt 5%-kal többet kell számítani?

Megoldás: a) $V = 12000 \cdot \dfrac{2^2 \pi \cdot 4}{3} \approx 201061{,}9\,\text{cm}^3 \approx 201$ liter.

b) Az alkotó hossza $a = \sqrt{r^2 + M^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ cm; $A = 12000 \cdot r\pi(r + a) \cdot 1{,}05 \approx$

$\approx 12000 \cdot 2\pi(2 + 4{,}47) \cdot 1{,}05 \approx 512217{,}8\,\text{cm}^2 \approx 51{,}2\,\text{m}^2$.

36. Egy kúp kiterített palástjának területe 63 cm^2, az alkotó és az alaplap hajlásszöge 73°18’. Mekkora a kúp térfogata és a palást középponti szöge?



Megoldás: A palást területe $P = r \cdot a \cdot \pi$. A sugár $r = a \cdot \cos 73°18'$, ezt beírva

$63 = a^2 \cdot \pi \cdot \cos 73°18'$, ahonnan $a \approx 8{,}35$ (cm), $r \approx 2{,}4$ (cm).

$M = a \cdot \sin 73°18' \approx 8$ (cm). A térfogat: $V = \dfrac{2{,}4^2 \pi \cdot 8}{3} \approx 48{,}3\,\text{cm}^3$, a felszín

$A = P + r^2\pi \approx 81{,}1\,\text{cm}^2$.

37. Egy 4,8 m sugarú körlapot négy egybevágó körcikkre vágunk. Milyen magas körkúp alakú sátor készíthető egy-egy darabból?

Megoldás: Az alkotó hossza 4,8 m, a negyedkörív hossza egyenlő az alapkör kerületével.

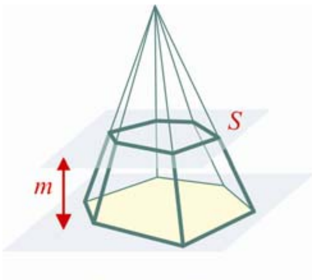
Ezért $2r\pi = \dfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4{,}8\pi \Rightarrow r = 1{,}2$ m. A testmagasság $M = \sqrt{a^2 - r^2} \approx 4{,}65$ m.

38. Egy kúp felszíne 792π, alkotója 8 egységgel hosszabb a sugaránál. Mekkora a térfogata?

Megoldás: Másodfokú egyenletre visszavezethető feladat. $a = r + 8$, $A = r\pi(a + r) =$ $= r\pi(2r + 8) \Rightarrow 792\pi = r\pi(2r + 8)$. Innen kapjuk az $r^2 + 4r - 396 = 0$ egyenletet, aminek pozitív megoldása: $r = 18$ (e). Ekkor $a = 26$ (e), $M = \sqrt{a^2 - r^2} \approx 18{,}76$ (e), a térfogat $V \approx \frac{18^2 \pi \cdot 18{,}76}{3} \approx 6365{,}1$ (e^3).

IV. A csonkagúla

Ha a gúlát elmetsszük egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, **csonkagúlát** kapunk.



Csonkagúla

Mintapélda$_7$

Hány liter virágföldet vásároljunk abba a négyzet alapú, csonkagúla alakú virágládába, amelynek belső méretei: az alaplap éle 26 cm, a fedőlap éle 38 cm, a láda magassága 47 cm?

Megoldás: A cserép térfogatának meghatározásához ismerni kell a csonkagúla térfogatának kiszámítási módját. Hasonlóság segítségével a következő képletet lehet levezetni:

A csonkagúla térfogata: $V=\frac{M}{3}\left(T+\sqrt{t\cdot T}+t\right)$, ahol *M* a testmagasság, *t* a fedőlap, *T* az alaplap területe.

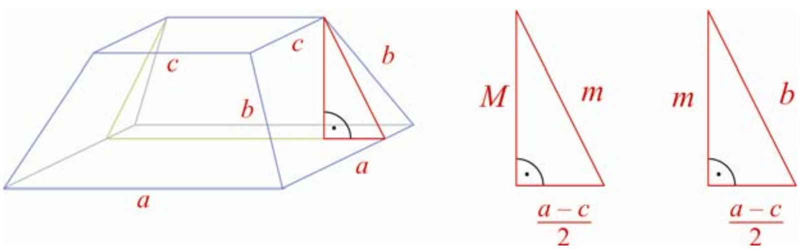
Az adatokat behelyettesítve: $V=\frac{47}{3}\left(26^2+\sqrt{38^2\cdot 26^2}+38^2\right)=48692\ \text{cm}^3\approx 48{,}7\ \text{liter}$.

Érdemes tehát egy 50 literes zsák virágföldet megvásárolni.

A **csonkagúla felszínének** kiszámításához nincs képlet, minden feladatot egyedi módon oldunk meg. Ha a csonkgúla négyzet alapú szabályos gúlából származott, melynek adatai az ábrán láthatók, akkor meghatározzuk az oldallapok (trapézok) területét. Az oldallap magassága (*m*) és testmagasság (*M*), valamint az oldallap magassága és az oldalél (*b*) között a Pitagorasz-tétel teremt kapcsolatot:

$$m^2=M^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$b^2=m^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$



Módszertani megjegyzés: A következő feladatot csoportmunkában javasoljuk megoldani.

Feladatok

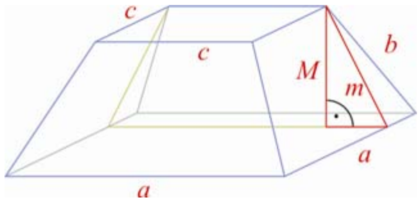
39. Egy egyiptomi matematikatörténeti emlék, a moszkvai papirusz a következőképpen írja le a csonkagúla térfogatának kiszámítását:

„[…] alapélek: 2, illetve 4 könyök, magasság: 6 könyök.

1. Add össze ezt a 16-ot
2. ezzel a 8-cal és ezzel a 4-gyel:
3. kijön 28. Számítsd ki
4. 1/3-át a 6-nak. Kijön 2.
5. Számolj 28-asával kétszer. Kijön 56.
6. Nézd, ez 56. Helyesen számítottad ki."

Valóban helyes a számolás? Ellenőrizd!

Megoldás: $V=\frac{M}{3}\left(t+\sqrt{t\cdot T}+T\right)=\frac{6}{3}\left(2^2+\sqrt{2^2\cdot 4^4}+4^2\right)=56$. Jól számoltak.



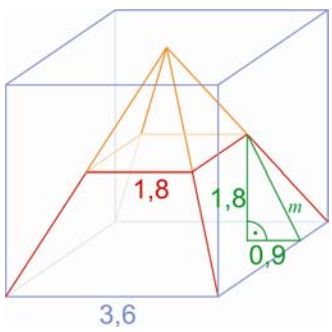
40. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!

	a	b	c	m	M	V	A
a)	10	6	6	$\sqrt{32}\approx 5{,}7$	$\sqrt{28}\approx 5{,}3$	*346,3*	*318,4*
b)	18	$\sqrt{52}\approx 7{,}2$	10	6	$\sqrt{20}\approx 4{,}5$	*906*	*760*
c)	$a_1=2;$	5	8	4	$\sqrt{247}\approx 15{,}7$	*439,6*	*148*
	$a_2=14$					*1946,8*	*436*
d)	*23*	$\sqrt{306}\approx 17{,}5$	5	15	12	*2676*	*1394*

41. Egy 3,6 dm élű kocka egyik oldalának csúcsait összekötjük a szemközti oldal középpontjával, majd az így kapott gúlát elvágjuk az adott oldallal párhuzamos, a kocka középpontján átmenő síkkal. Határozd meg az így kapott csonkagúla térfogatát és felszínét!

Megoldás:

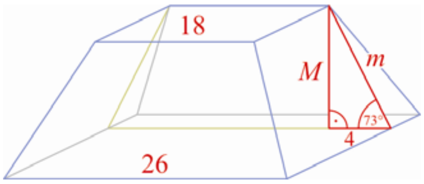
$$V=\frac{1{,}8}{3}\left(3{,}6^2+1{,}8\cdot 3{,}6+1{,}8^2\right)\approx 13{,}6\,\text{dm}^3.$$



$m = \sqrt{1{,}8^2 + 0{,}9^2} \approx 2{,}0\,(\text{dm})$. $A = 3{,}6^2 + 1{,}8^2 + 4 \cdot \frac{1{,}8 + 3{,}6}{2} \cdot 2 \approx 37{,}8\,\text{dm}^2$.

42. Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla alapéle 26 cm, fedőlapjának éle 18 cm, és az oldallapok 73°-os szöget zárnak be az alaplappal. Mekkora a térfogata és a felszíne?

Megoldás: $m = \frac{4}{\cos 73°} \approx 13{,}7\,(\text{cm})$;



$M = 4 \cdot \text{tg}73° \approx 13{,}1\,(\text{cm})$; $t = 18^2 = 324\,(\text{cm}^2)$;

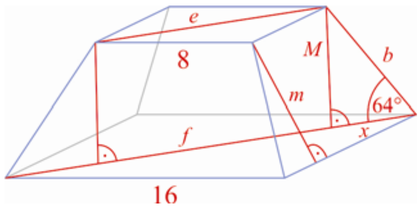
$T = 26^2 = 676\,(\text{cm}^2)$;

$V = \frac{M}{3}\left(t + \sqrt{tT} + T\right) \approx 6410{,}3\ \text{cm}^3$;

$A = t + T + 4 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot m \approx 2205{,}6\ \text{cm}^2$.

43. Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla alapéle 16 cm, fedőlapjának éle 8 cm, és az oldalélek 64°-os szöget zárnak be az alaplappal. Mekkora a térfogata és a felszíne?

Megoldás: $e = 8\sqrt{2} \approx 11{,}3\ (\text{cm})$; $f = 16\sqrt{2} \approx 22{,}6\,(\text{cm})$;



$x = \frac{f - e}{2} \approx 5{,}65\,(\text{cm})$; $M = x \cdot \text{tg}64° \approx 11{,}6\,(\text{cm})$;

$b = \frac{x}{\cos 64°} \approx 12{,}9\,(\text{cm})$; $m = \sqrt{b^2 - 4^2} \approx 12{,}3\,(\text{cm})$;

$t = 8^2 = 64\,(\text{cm}^2)$; $T = 16^2 = 256\ (\text{cm}^2)$. $V = \frac{M}{3}\left(t + \sqrt{tT} + T\right) \approx 1732{,}3\ \text{cm}^3$;

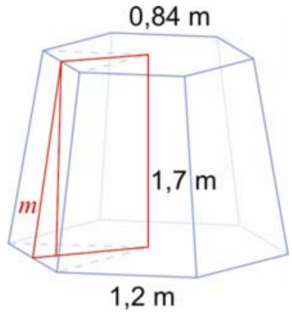
$A = t + T + 4 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot m \approx 910{,}4\ \text{cm}^2$.

44. Egy szobor talapzata 1,7 méter magas szabályos hatszög alapú egyenes csonkagúla, az alaplap éle 120 cm, és a fedőlap éle 30%-kal kisebb az alaplap élénél.

a) Mekkora a talapzat tömege, ha az anyaga 2,7 kg/dm^3 sűrűségű márvány?

b) Télire becsomagolják a szobor talapzatát, hogy megóvják az időjárás viszontagságaitól. Mennyi csomagolóanyagra van szükség, ha a kötözéshez a talapzat felszínén kívül még 10% anyagot rá kell számolni?

Megoldás: a) A fedőlap éle $1,2\cdot 0,7=0,84$ (m). Az alaplap területe



$$T=6\cdot\frac{1,2^2\sqrt{3}}{4}\approx 3,74\,(\mathrm{m}^2)\text{, a fedőlapé}$$

$$t=6\cdot\frac{0,84^2\sqrt{3}}{4}\approx 1,83\ (\mathrm{m}^2).$$

$$V=\frac{1,7}{3}\left(3,74+\sqrt{3,74\cdot 1,83}+1,83\right)\approx 4,639\ (\mathrm{m}^3)\text{. A tömeg:}$$

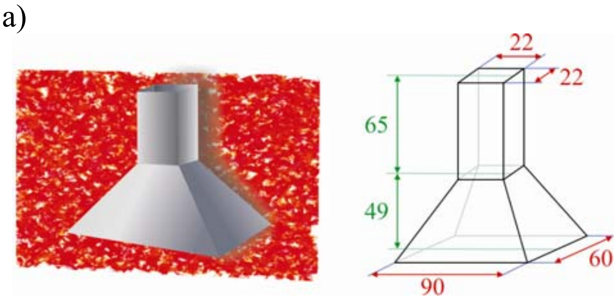
$$m=\rho\cdot V=2,7\cdot 4639\approx 12525\,\mathrm{kg}.$$

Az oldallap magassága $m^2=1,7^2+\left(\frac{(1,2-0,84)\sqrt{3}}{2}\right)^2$ összefüggésből $m\approx 1,73$ (m),

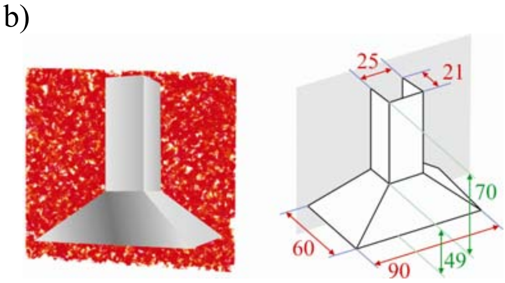
$$P=6\cdot\frac{1,2+0,84}{2}\cdot 1,73\approx 10,59\ (\mathrm{m}^2)\text{. Összesen tehát } 10,59+1,83\approx 12,42\,\mathrm{m}^2.$$

45. Az ábrákon kürtős páraelszívók láthatók. Számítsd ki a térfogatukat és a felszínüket! A páraelszívók szimmetrikusak egy olyan síkra, amelyik az alaplap 60 cm-es élével párhuzamos és az alaplapra merőleges. Minden távolságadat cm-ben értendő.

a)



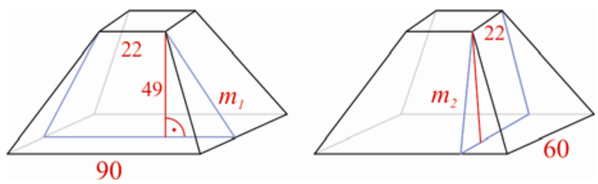
b)



Megoldás:

a) A csonkagúla térfogata: $V_1=\frac{49}{3}\cdot\left(60\cdot 90+22^2+\sqrt{60\cdot 90\cdot 22^2}\right)\approx 122511\,(\mathrm{cm}^3)$, a négyzetes oszlopé $V_2=22^2\cdot 65=31460\,(\mathrm{cm}^3)$, együtt 153971 cm^3.

A felszínhez szükség van a kétféle oldallap magasságaira:

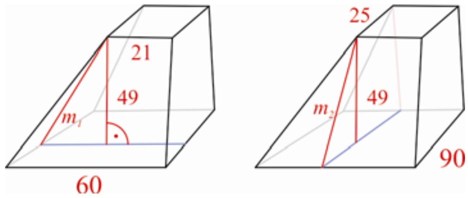


$$m_1=\sqrt{49^2+34^2}\approx 59,6\,(\mathrm{cm}),$$

$$m_2=\sqrt{49^2+19^2}\approx 52,6\,(\mathrm{cm}).$$

$$A=2\cdot\frac{90+22}{2}\left(59,6+52,6\right)+4\cdot 22\cdot 65=18286,4\,\mathrm{cm}^2.$$

b) Itt nincs hátlap, a csonkagúla egyik oldallapja merőleges az alaplapra.

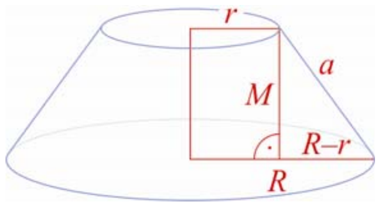


A térfogat $V_1 = \frac{49}{3} \cdot \left(60 \cdot 90 + 21 \cdot 25 + \sqrt{60 \cdot 90 \cdot 21 \cdot 25}\right) \approx 124276$ (cm^3), a négyzetes oszlopé $V_2 = 21 \cdot 25 \cdot 70 = 36750$ (cm^3), együtt 161026 cm^3.

A két magasság: $m_1 = \sqrt{49^2 + 39^2} \approx 62{,}6$ (cm), $m_2 = \sqrt{49^2 + 32{,}5^2} \approx 58{,}8$ (cm), a felszín: $A = \frac{90 + 25}{2} \cdot 62{,}6 + 2 \cdot \frac{90 + 21}{2} \cdot 58{,}8 + (2 \cdot 21 + 25) \cdot 70 = 14816{,}3$ cm^2.

V. A csonkakúp

Ha a kúpot elmetszük egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, akkor egy kisebb kúpot és egy másik testet is kapunk, amelyet **csonkakúpnak** nevezünk. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága adja a csonkakúp **testmagasságát**.

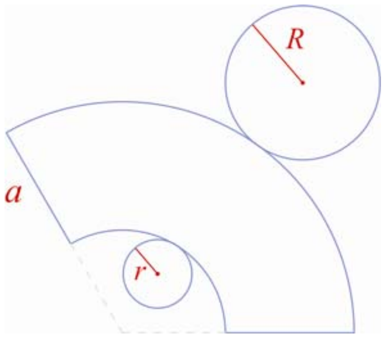


Az egyenes körkúpból származtatott csonkakúp térfogata:

$$V=\frac{M\cdot\pi}{3}\left(r^2+r\cdot R+R^2\right).$$

Módszertani megjegyzés: Célszerű megjegyezni, hogy ez az összefüggés analóg a csonkagúla térfogatának képletével. A kapcsolat felfedezését egy kis segítséggel a diákok maguk is megteszik.

A csonkakúp felszínét megkapjuk, ha az alapkör és a fedőkör területéhez hozzáadjuk a csonkakúp palástjának felszínét. A palást síkba kiterítve körgyűrűcikket alkot.



A csonkakúp felszíne $A=\pi\cdot[r^2+R^2+(r+R)\cdot a]$.

A a felszín, r az alapkör sugara, R a fedőkör sugara, a az alkotó.

Mintapélda₈

Egy csonkakúp alapkörének sugara 9 cm, a fedőköré 4 cm, az alkotója 15 cm.

a) Számítsd ki a csonkakúp térfogatát!

b) Számítsd ki a csonkakúp palástjának területét és a felszínét!

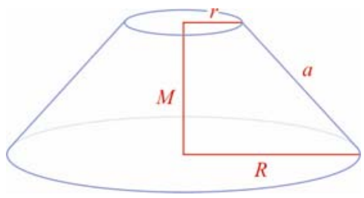
Megoldás: A szokásos jelölésekkel $a^2=M^2+(R-r)^2 \Rightarrow M=\sqrt{200}\approx 14{,}1$ (cm).

a) Képletbe helyettesítés után $V\approx 1963{,}8\ \text{cm}^3$;

b) $P=(r+R)\cdot a\cdot\pi\approx 612{,}6\ \text{cm}^2$; $A\approx 917{,}3\ \text{cm}^2$.

Feladatok

46. Egészítsd ki a táblázat hiányzó részeit! Minden adat azonos egységrendszerben értendő. r a fedőkör sugara, R az alapkör sugara, M a csonkakúp magassága, a az alkotó, P a palást felszíne, A a csonkakúp felszíne és V a csonkakúp térfogata.



	r	R	a	M	V	P	A
a)	5	10	12	*10,9*	*1999,1*	*565,5*	*958,2*
b)	12	18	*10*	8,0	*5730,3*	*942,5*	*2412,7*
c)	4	*14*	20	*17,3*	*4861,0*	1131,0	*1797,0*

Módszertani megjegyzés: Gyakorlásképpen feladhatjuk a körcikk középponti szögét is kérdésként.

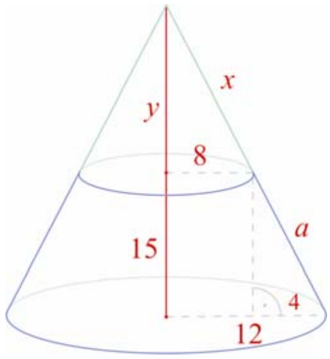
47. Egy csonkakúp alapkörének sugara 12 cm, a fedőköré 8 cm, a magassága 15 cm.

a) Számítsd ki a kiegészítő kúp alkotójának hosszát!

b) Számítsd ki, hogy mekkora középponti szögű körcikkből lehet elkészíteni a csonkakúp palástját!

c) Számítsd ki, hogy a kiegészítő kúp térfogata hány százaléka a csonkakúp térfogatának!

Megoldás:



a) Az alkotó hossza $a=\sqrt{15^2+4^2}=\sqrt{241}\approx 15{,}52\,(\text{cm})$. A hasonló háromszögek miatt $\frac{12}{8}=\frac{a+x}{x}\;\Rightarrow\; x\approx 31\,(\text{cm})$ a kiegészítő kúp alkotója.

b) $\alpha=360°\cdot\frac{2R\pi}{2(a+x)\pi}\approx 93°$.

c) A kiegészítő kúp magassága: $y=\sqrt{x^2-8^2}\approx 29{,}95\,(\text{cm})$;

$$\frac{\frac{8^2\cdot 29{,}95\cdot\pi}{3}}{\frac{15\cdot\pi}{3}\left(8^2+8\cdot 12+12^2\right)}\cdot 100\approx 42\%\,.$$

48. Egy gyertyaöntő olyan csonkakúp alakú gyertyákat önt, amelyek alapkörének átmérője 10 cm, a fedőköré 6 cm, és a magassága 8 cm.

a) Hány gyertyát tud kiönteni 50 liter folyékony viaszból?

b) Minden gyertyát külön celofánba csomagol, és a gyertya felszínénél 17%-kal többet kell számolnia a csomagoláshoz. Hány m^2 celofánt használ fel a kiöntött gyertyák csomagolásához?

Megoldás:

a) 50 liter = 50 dm^3 = 50000 cm^3. Egy gyertya térfogata: $V \approx 410{,}5\ \text{cm}^3$, $\frac{50000}{410{,}5} \approx 121{,}8$,

vagyis 121 gyertyát tud kiönteni.

b) Az alkotó hossza $a = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} \approx 8{,}25$, egy kúp felszíne $A = 100\pi \approx 314.2\ \text{cm}^2$.

A szükséges celofán $50 \cdot A \cdot 1{,}17 \approx 18380{,}7\ \text{cm}^2 \approx 1{,}8\ \text{m}^2$.

VI. A gömb térfogata, felszíne

A gömb a természet egyik, talán a legfontosabb alapformája. Bizonyítható, hogy az egyenlő térfogatú testek közül a gömbnek a legkisebb a felszíne, ezért ugrik össze gömb alakú cseppé a folyadék, ha teheti (például a higany). Az égitestek alakja többé-kevésbé gömb, és kis golyókkal modellezzük a természet sok jelenségét (például az atommagot és a körülötte keringő elektronokat csakúgy, mint a gázrészecskéket az ideális gázban, vagy a légszennyezést okozó aeroszol részecskéket).

Módszertani megjegyzés: Javasoljuk, hogy indítsunk kutatási projekteket érdekes, gömb alakú tárgyakról, épületekről (Atomium Brüsszelben, kupolás épületek stb.). Például nagyon sok gömb alakú vírust találunk.

A **gömb** egy adott ponttól (a középponttól) egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben. Minden síkmetszete kör, a legnagyobb területű síkmetszetet *főkörnek* nevezzük. Ha a gömböt egy síkkal metsszük, akkor gömbsüveg keletkezik (a gömbsüvegre vonatkozó összefüggéseket megtalálod a függvénytáblázatban).

A gömb térfogatát, illetve felszínét az integrálszámítás segítségével határozzuk meg, ami túlmutat a középszintű érettségi tananyagán.

Az r sugarú gömb térfogata és felszíne:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi, \quad A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

Feladatok

49. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! r a gömb sugara, V a térfogata, A a felszíne.

	r	A	V
a)	3	*113,1*	*113,1*
b)	*4,5*	254,5	*381,7*
c)	*2,2*	*60,8*	44,6
d)	*5*	*314,2*	523,6

Módszertani megjegyzés: A következő feladathoz javasoljuk diákkvartett módszert.

50. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, illetve melyik hamis!

a) Ha egy gömb sugarát háromszorosára növeljük, a felszíne és a térfogata is háromszorosára változik.

b) Az egység sugarú gömb felszínének mérőszáma háromszorosa a térfogat mérőszámának.

c) Ha egy 5 cm-nél nagyobb r sugarú gömb sugarát 3 cm-rel növeljük, a felszíne $4\cdot(r+3)^2$-nel növekszik.

d) Ha egy 5 cm-nél nagyobb r sugarú gömb sugarát 3 cm-rel növeljük, a térfogata $\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$-vel növekszik.

e) Ha két gömb felszínének különbsége 490 cm^2, akkor a két gömb sugarát R-rel és r-rel jelölve $R^2-r^2=39$.

Megoldás: a) H; b) I; c) H; d) H; e) I.

51. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amelyre igaz, hogy térfogatának mérőszáma duplája a felszíne mérőszámának?

Megoldás: $2\cdot\frac{4}{3}r^3\pi=4r^2\pi \Rightarrow r=\frac{3}{2}$ egység.

52. Egy 7 cm átmérőjű üveggolyó belül üreges, a falvastagság 6 mm. Mekkora az üveggolyó tömege, ha az üvegben elhanyagolható súlyú levegő van, és az üveg sűrűsége $\rho=2800\ \mathrm{kg/m^3}$, és a tömeg az $m=\rho\cdot V$ képlettel számolható?

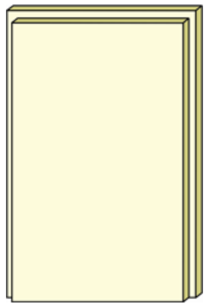
Megoldás: A belső sugár 2,9 cm, a külső 3,5 cm. A térfogat a két gömb térfogatának különbsége: $V=\frac{4}{3}\pi\left(3{,}5^3-2{,}9^3\right)\approx 77{,}43\ \mathrm{cm^3}\approx 77{,}43\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$. $m=\rho\cdot V\approx 0{,}22$ kg.

53. Mekkora oldalú fémkockából tudnak önteni 120 darab, 4,6 cm átmérőjű gömböt?

Megoldás: $V=120\cdot\frac{4}{3}\cdot 2{,}3^3\cdot\pi=6115{,}8\ \mathrm{cm^3}$. A kocka térfogata a^3, tehát

$a=\sqrt[3]{6115{,}8}\approx 18{,}3$ cm.

VII. Feladatgyűjtemény



54. Egy ajtót úgy készítettek, hogy két bútorlapot összeragasztottak. Az egyik méretei: 82 cm x 201 cm x 23 mm, a másik méretei: 85 cm x 202,5 cm x 15 mm.

a) Számítsd ki az egyes bútorlapok, majd az egész ajtó anyagának térfogatát!

b) Mekkora a tömege az ajtónak, ha a bútorlap sűrűsége 600 kg/m^3?

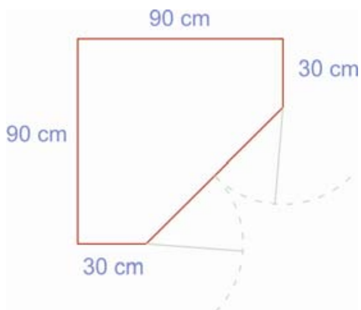
A sűrűség, a tömeg és a térfogat közötti összefüggés: $\rho = \frac{m}{V}$.

Megoldás: a) $V_1 = 0{,}82 \cdot 2{,}01 \cdot 0{,}023 \approx 0{,}038\ \mathrm{m}^3$,

$V_2 = 0{,}85 \cdot 2{,}025 \cdot 0{,}015 \approx 0{,}026\ \mathrm{m}^3$, $V = V_1 + V_2 \approx 0{,}064\ \mathrm{m}^3$.

b) $m = \rho \cdot V \approx 38{,}4\ \mathrm{kg}$.

55. Egy hasáb alakú sarokgardrób alaplapja látható az ábrán. Mennyibe kerül a bútorlap, ha a szekrény magassága 193 cm, körben mindenhol bútorlap határolja, és a négyzetméterár 2400 tallér ?



Megoldás: Az alapterület $T = 90^2 - \frac{60^2}{2} = 6300\ \mathrm{cm}^2$. Az első oldal szélessége (a két ajtó együtt) $60\sqrt{2} \approx 84{,}9$ cm, így a felszín:

$A = 2 \cdot 6300 + 193 \cdot (2 \cdot 90 + 2 \cdot 30 + 84{,}9) = 75305{,}7\ \mathrm{cm}^2 \approx 7{,}53\ \mathrm{m}^2$.

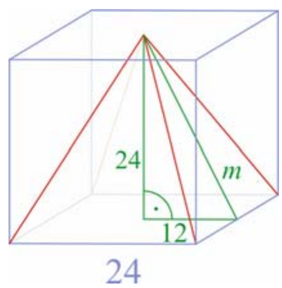
A költség kb. 18072 tallér.

56. Egy 24 cm élű kocka egyik oldalának csúcsait összekötjük a szemközti oldal középpontjával. Határozd meg az így kapott gúla térfogatát és felszínét!

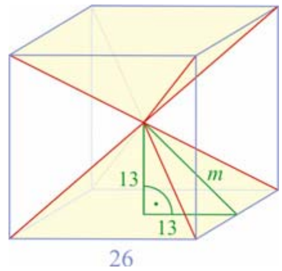
Megoldás:

$V = \frac{a^3}{3} = 4608\ \mathrm{cm}^3$. Az oldallap magassága

$m = \sqrt{12^2 + 24^2} \approx 26{,}8$ (cm), így $A = a \cdot (a + 2m) \approx 1862{,}4\ \mathrm{cm}^2$.

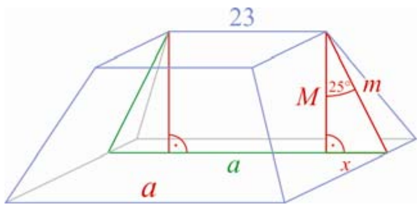


57. Egy kerítésdíszt úgy készítenek, hogy egy 26 cm élű kocka szemközti oldalainak csúcsait összekötik a kocka középpontjával (középen pontszerűen összehegesztik). Határozd meg az így kapott dísz térfogatát és felszínét!



Megoldás: $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 26^2 \cdot 13 \approx 5858{,}7\ \text{cm}^3$. $m = 13\sqrt{2}$, az egész test felszíne $A = 2 \cdot 26^2 + 8 \cdot \frac{26 \cdot 13\sqrt{2}}{2} \approx 3264\ \text{cm}^2$.

58. Egy négyzet alapú csonkagúla testmagassága 25°-os szöget zár be az oldallap magasságával, és a két magasság különbsége 6,8 cm. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha a fedőlap éle 23 cm?



Megoldás: $m - M = 6{,}8$; $M = m \cdot \cos 25°$, ezért

$M(1 - \cos 25°) = 6{,}8$, ahonnan

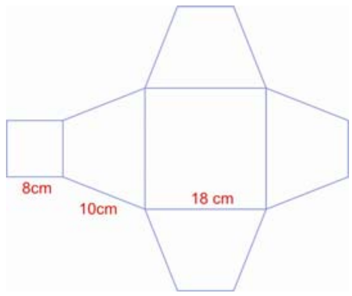
$M \approx 72{,}6\ (\text{cm}), m \approx 80{,}1\ (\text{cm})$.

$x = m \cdot \sin 25° \approx 33{,}9\ (\text{cm})$, $a = 23 + 2x \approx 90{,}8\ (\text{cm})$;

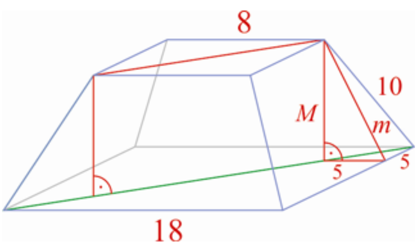
$T \approx 8244{,}6\ (\text{cm}^2)$, $t = 529\ (\text{cm}^2)$, $V \approx 262861{,}4\ \text{cm}^3 \approx 262{,}9\ \text{dm}^3$;

$A \approx 27004{,}4\ \text{cm}^2 \approx 270\ \text{dm}^2$.

59. Mekkora annak a négyzet alapú csonkagúlának a térfogata és felszíne, amelyiknek hálója az ábrán látható?



Megoldás:



$m = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}7$; $M = \sqrt{m^2 - 5^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$;

$t = 8^2 = 64$; $T = 18^2 = 324$;

$$V = \frac{M}{3}\left(t + \sqrt{t \cdot T} + \sqrt{T}\right) \approx 1259{,}1\ \text{cm}^3;$$

$$A = t + T + 4 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot m \approx 840{,}4\ \text{cm}^2.$$

60. A szilikon tömítőanyagot hengerekben árulják. A henger belső átmérője 45 mm, a tubus hossza 21,6 cm, és az aljától 4 cm-nyi helyet nem szilikon tölt ki. A henger folytatása egy 10,6 cm alkotójú csonkakúp alakú kinyomócső, amelynek egyik végén 8 mm, a másik végén 2 mm átmérőjű a lyuk. Hány méteres egyenes csíkot tudnánk kinyomni a csőből? (A benne található szilikon folyékony, összenyomhatatlan.)

Megoldás:

A henger sugara 2,25 cm, magassága 17,6 cm. A hengerbe töltött szilikon térfogata: $V = 2{,}25^2 \cdot \pi \cdot 17{,}6 \approx 280\ \text{cm}^3$.

A kinyomócső magassága: $\sqrt{106^2 - 3^2} \approx 105{,}96$ mm, kinyomás után a kinyomócsőben maradó szilikon térfogata: $V_1 = \frac{10{,}596 \cdot \pi}{3}\left(0{,}4^2 + 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2\right) \approx 2{,}33$ cm3, vagyis a kinyomott csík térfogata $280 - 2{,}33 = 277{,}67\ \text{cm}^3$.

A kinyomott cső sugara 1 mm, az egyenes csíkot hengerként számolva a cső hossza: $x = \frac{277{,}67}{0{,}1^2 \cdot \pi} \approx 8838{,}51\ \text{mm} \approx 8{,}84\ \text{m}$.

61. A szomszéd szeretett volna hétvégi telkére egy jurtát, és találtunk is egy angol nyelvű honlapot az interneten, ahol rendelni lehet.

A szavak jelentése:

Diameter : átmérő

Wall Height : falmagasság

Roof Height : tetőmagasság

feet : láb (1 láb = 30,48 cm)

Forrás: [http://www.yurtworkshop.com/yurts/10footMongolianGer.aspx]

Diameter (feet)	12
Wall Height (feet)	4
Roof Height (feet)	7'6"

Mekkora a jurta felszíne és térfogata? (Az egyszerűség kedvéért modellezzük alul-felül nyitott henger és kúp összerakásával a jurtát.)

Megjegyzés: A hüvelyk olyan régi hosszmérték (a tízes számrendszeren alapuló mértékrendszer előtti időszakból), amely az emberi test egyik részét, a hüvelykujj nagyságát vette mértékül. A hüvelyk a tizenkettes mértékrendszerbe tartozik; egy lábnak a 12-ed része. Egy hüvelyk 12 vonalból áll, azaz 2,6 cm (tehát egy *vonal* 0,2 cm). Négy hüvelyk (azaz 10,4 cm) alkotott egy markot. A hüvelyk német neve *(Zoll)* is elterjedt: *coll.* Ezt az elnevezést főleg kézművesek, ácsok, asztalosok, használták *(colos deszka, colos szeg, fél colos cső* stb.). [Forrás: Magyar néprajzi lexikon.]

Megoldás:

Módszertani megjegyzés: A feladatban nem közöltük, hogy mit jelent a 7’6” jelölés, de az idézett forrásból megérthető. A csoport remélhetőleg rájön arra, hogy az nem biztos, hogy 7,6 láb, hanem coll, és a 6 coll éppen fél lábnak felel meg. Nem adta meg a feladat azt sem, hogy milyen mértékegységben kérjük a megoldást, de a hazai SI miatt m^2-ben kérjük a végeredményt. Számolni egyszerűbb és célszerűbb lábban a kevesebb törtszám miatt.

Az alapkör sugara $r = 6$ láb, a henger magassága 4 láb, a kúp magassága 3,5 láb, az alkotó hossza $a = \sqrt{6^2 + 3{,}5^2} \approx 6{,}95$ láb, a felszín:

$A = P_{henger} + P_{kúp} = 2r\pi M_{henger} + ra\pi = r\pi(2M_{henger} + a) \approx 281{,}8$ láb^2, amit cm^2-be átváltva

$281{,}8 \cdot 30{,}48^2 \approx 261801{,}6$ cm$^2 \approx 26{,}2$ m^2.

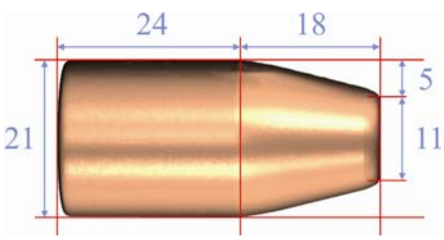
A térfogat $V = r^2\pi M_{henger} + \dfrac{r^2\pi M_{kúp}}{3} = r^2\pi\left(M_{henger} + \dfrac{M_{kúp}}{3}\right) \approx 584{,}34$ láb^3, ami

$584{,}34 \cdot 30{,}48^3 \approx 16546559$ cm$^3 \approx 16{,}6$ m^3.

Módszertani megjegyzés: Az ilyen kis jurtákat általában szaunának vagy meditációs teremnek használják.

62. Az ábra egy 9 mm átmérőjű lőszer oldalnézetét mutatja. Végezz méréseket az ábrán, és számítsd ki a lövedék felszínét és térfogatát!

Megoldás: Az ábrán lemért adatok alapján az ábra és a lőszer adatainak aránya $k = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.



Minden távolságadatot szorozni kell k-val, hogy a lőszer adatait megkapjuk. Így a henger hossza 10,3 mm, a csonkakúp magassága 7,7 mm, a fedőkör sugara 2,4 mm.

A térfogat az egyes részek térfogatának összege:

$V = 4{,}5^2 \pi \cdot 10{,}3 + \frac{7{,}7\pi}{3}\left(4{,}5^2 + 4{,}5 \cdot 2{,}4 + 2{,}4^2\right) \approx 952$ (mm^3). A felszínnél számolhatunk úgy, hogy a csonkakúp felszínéhez hozzájön a henger palástja:

$A = \pi\left(r^2 + R^2 + (r+R)a\right) + 2R\pi M$. A csonkakúp alkotója $a = \sqrt{2{,}1^2 + 7{,}7^2} \approx 8$ (mm).

A felszín $A \approx 546{,}4\ \text{mm}^2$. Ezek közelítő értékek, a mérési és kerekítési hibák miatt hasonló eredmények jönnek ki.

63. Egy csonkakúp alakú parfümös üveget kartondobozba csomagolnak. A doboz méretei: 6 cm x 6 cm x 8 cm, a parfümös üveg méretei: a fedőlap átmérője 5 cm, az alaplap átmérője 3 cm, a magassága 7 cm.

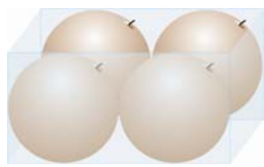
a) Hány ml parfüm van az üvegben, ha az üveg térfogatának 56%-a a folyadék?

b) A doboz térfogatának hány százaléka „üres”, azaz nincs kitöltve a parfümös üveggel?

Megoldás: a) $V_{üveg} \approx 89{,}8\ \text{cm}^3$, $89{,}8 \cdot 0{,}56 \approx 50{,}3\,\text{cm}^3$, az üvegben kb. 50 ml parfüm van.

b) $V_{doboz} = 288\ \text{cm}^3$, az arány $\frac{288 - 89{,}8}{288} \cdot 100 \approx 68{,}8\,\%$.

64. 4 darab 9 cm átmérőjű, gömb alakú gyertyát csomagolnak kartondobozba, szorosan egymás mellé.

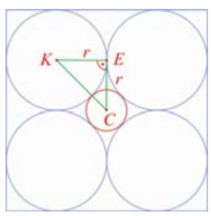


a) A doboz térfogatának hány százalékát töltik ki a gyertyák?

b) A sérülések elkerülése érdekében a gyertyák közé az alaplap közepére egy hungarocell hengert tolnak, ami a gyertyákat érinti, és nem engedi elmozdulni. Legfeljebb mekkora legyen a henger sugara?

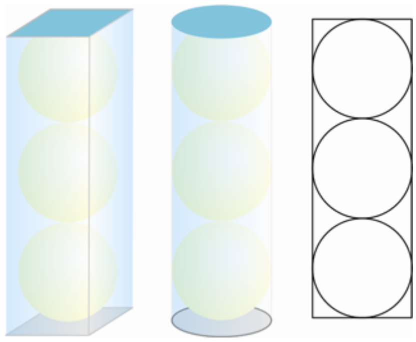
Megoldás: a) A doboz méterei: 18 cm x 18 cm x 9 cm, így a térfogata $9 \cdot 18^2 = 2916\ \text{cm}^3$. A gyertyák térfogata $4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 4{,}5^3 \pi \approx 1526{,}8\ \text{cm}^3$. A keresett arány $\frac{1526{,}8}{2916} \cdot 100 \approx 52{,}4\,\%$.

b) A henger alapkörének sugara a *KEC* egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának és a gyertyák sugarának a különbsége:



$r\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 1{,}86$ cm.

65. Egy teniszlabdagyárban 3 labdát csomagolnak kétféle csomagolásba: négyzetes oszlop, illetve henger alakú, műanyag oldalfalú dobozba. A dobozokat kartonokkal zárják le, mindkét végükön. A labdák átmérője 6,5 cm.



a) Mekkora területű kartonra, illetve műanyagra van szükség az egyes dobozok elkészítéséhez?

b) A dobozok térfogatának hány százaléka a három teniszlabda térfogata?

c) Anyagfelhasználás és térkitöltés szempontjából melyik dobozt célszerűbb gyártani?

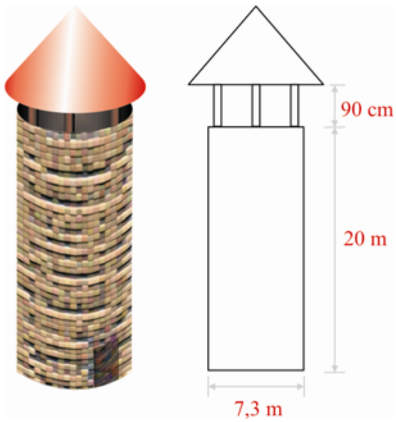
Megoldás:

a) A négyzetes oszlop méretei: 6,5 cm x 6,5 cm x 19,5 cm. A karton területe $2\cdot 6{,}5^2 = 84{,}5\ \text{cm}^2$, a fólia területe $4\cdot 6{,}5\cdot 19{,}5 = 507\ \text{cm}^2$. A henger alakú doboz esetén a szükséges karton $2\cdot 3{,}25^2\pi \approx 66{,}37\ \text{cm}^2$, a fólia területe $2\cdot 3{,}25\cdot \pi\cdot 19{,}5 \approx 398{,}2\ \text{cm}^2$.

b) A teniszlabdák térfogatának összege $3\cdot\frac{4}{3}\cdot 3{,}25^3\cdot\pi \approx 431{,}38\ \text{cm}^3$. A négyzetes oszlop térfogata $6{,}5^2\cdot 19{,}5 = 823{,}88\,\text{cm}^3$, az arányuk $\frac{431{,}38}{823{,}88}\cdot 100 \approx 52{,}4\,\%$. A henger térfogata $3{,}25^2\cdot\pi\cdot 19{,}5 \approx 647{,}07\ \text{cm}^3$, a térkitöltés $\frac{431{,}38}{647{,}07}\cdot 100 \approx 66{,}7\,\%$.

c) Anyagfelhasználás és térkitöltés szempontjából is a hengeres dobozt célszerű gyártani.

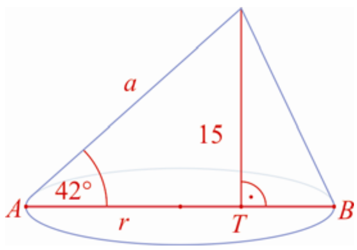
66. Egy ipari alpinista csoport azt a megbízást kapja, hogy fesse le az itt látható, hengerből és kúpból összeállított kilátó külső felületét. A tető kúp alakú, a torony szélétől 40–40 cm távolságra nyúlik ki. Az egész torony magassága 25,1 m. Határozd meg, hogy a tetőre és a vakolatra használt festékből hány m²-re valót kell a csapatnak beszereznie!



Megoldás: Az egyik fajta festék a henger palástjához kell: $A_1 = 2r\pi M = 2\cdot\frac{7,3}{2}\cdot\pi\cdot 20 \approx 458,7\ \text{m}^2$, a másik fajta a kúp palástjához. A kúp sugara: $\frac{7,3+0,8}{2} = 4,05\,(\text{m})$, magassága $25,1-(20+0,9) = 4,2\ (\text{m})$, alkotója $\sqrt{4,2^2+4,05^2} \approx 5,83\,(\text{m})$. A kúp palástja: $A_2 = ra\pi = 4,05\cdot 5,83\cdot\pi \approx 74,2\ \text{m}^2$.

67. Ferde körkúp alapkörének területe 452,4 cm², a leghosszabb alkotó 42°-os szöget zár be az alaplappal. Mekkora a legrövidebb alkotó, ha a kúp magassága 15 cm?

Megoldás: Az alapkör sugara $r = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \approx 12\,(\text{cm})$. A leghosszabb alkotó $a = \frac{15}{\sin 42°} \approx 22,4\,(\text{cm})$. A kúp tengelymetszetét használjuk: $AT = \sqrt{22,4^2 - 15^2} \approx 16,64$ cm-re van, a legkisebb alkotó pedig $BT = 24 - 16,64 \approx 7,36$ cm-re. Így a legrövidebb alkotó hossza $\sqrt{15^2 + 7,36^2} \approx 16,7$ cm.



68. Egy forgáskúp alapkörének sugara 10, felszíne 224π egység. Hányszorosára növekszik a kúp térfogata, ha alkotóit 10 egységgel meghosszabbítjuk?

Megoldás: $A = r\pi(r+a) \Rightarrow a = 12,4$ (e). A keletkező kúp az eredetihez hasonló, a hasonlóság aránya $k = \frac{22,4}{12,4} = \frac{56}{31}$. A térfogat a hasonlóság köbével szorzódik, így a keresett hányados $\left(\frac{56}{31}\right)^3 \approx 5,9$.

69. Egy csonkakúp fedőkörének sugara 5 cm-rel kisebb az alapkör sugaránál, testmagassága 19,4 cm. Mekkora a felszíne, ha a térfogata 5617,3 cm^3?

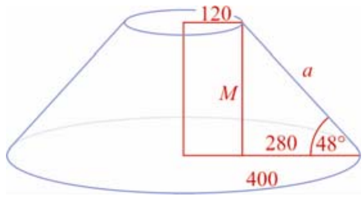
Megoldás: Másodfokú egyenlettel megoldható feladat. A szokásos jelölésekkel a térfogat képletébe behelyettesítve $5617{,}3=\frac{19{,}4\pi}{3}[r^2+r\cdot(r+5)+(r+5)^2]$, ahonnan

$0=r^2+5r-83{,}83$ adódik. Ennek pozitív megoldása: $r\approx 7$ cm. $R=12$ cm,

$a=\sqrt{M^2+5^2}\approx 20$ cm, a felszín $A\approx 1800{,}1\,\mathrm{cm}^2$.

70. Egy csonkakúp alapkörének sugara 4 m, fedőkörének sugara 120 cm, és az alkotók az alaplappal 48°-os szöget zárnak be. Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata?

Megoldás:



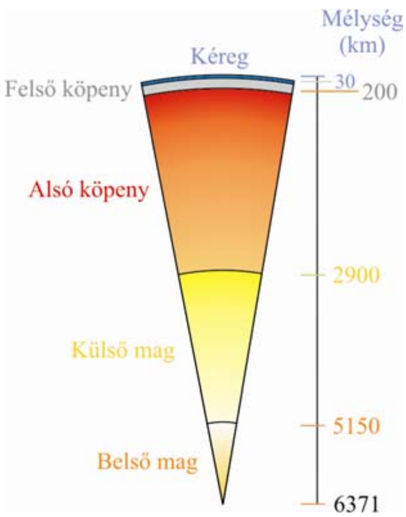
Szögfüggvénnyel számolva: $a=\frac{280}{\cos 48°}418{,}45\,(\mathrm{m})$,

$M=280\cdot \mathrm{tg}48°\approx 310{,}97\,(\mathrm{m})$. Így $V\approx 72{,}4\ \mathrm{m}^3$, $A\approx 123{,}15\,\mathrm{m}^2$.

71. A Föld felszínének 80%-a víz. Mit gondolsz, melyik égitesten nagyobb a szárazföld területe, ha a Holdon nincsen víz? A Föld sugara 6370 km, a Hold átmérője 3476 km.

Megoldás: A Földön a szárazföldek területeinek összege $0{,}2\cdot 4\cdot 6370^2\pi\approx 1{,}02\cdot 10^8\ \mathrm{km}^2$, a Hold felszíne $4\cdot\left(\frac{3476}{2}\right)^2\pi\approx 3{,}79\cdot 10^7\ \mathrm{km}^2$, tehát a Földön több a száraz felszín.

72. A föld kérge és a földköpeny legfelső része összefüggő és együtt mozgó réteget alkot, ezt nevezzük a föld kőzetburkának (litoszféra). Határozd meg az ábra alapján, hogy a szilárd kőzetburok térfogata hány százaléka az egész föld térfogatának? (Tekintsük a Földet gömb alakúnak.)



Megoldás:

A rajzról leolvasható, hogy a kőzetburok 200 km mélységig tart, ezért a 200 km-es gömbhéj térfogata: $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(6371^3 - 6171^3\right)$.

Ez a föld térfogatának $\dfrac{\frac{4}{3}\pi\left(6371^3 - 6171^3\right)}{\frac{4}{3}\pi \cdot 6371^3} \cdot 100 \approx 9{,}1$ %-a.

Megjegyzés: A valóságban a rétegek vastagsága változó, az ábrán átlagértékek szerepelnek.

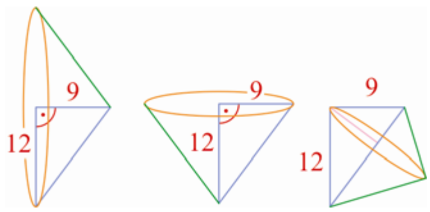
73. Egy 9 cm és 12 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatunk az egyik oldala körül. Állítsd nagyságrendi sorrendbe a keletkező testek felszínét és térfogatát, ha

a) a rövidebb befogója; b) a hosszabb befogója;

c) az átfogója mentén forgatjuk meg?

Megoldás:

A háromszög átfogójának hossza $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ cm, magasságának meghatározásához felírjuk kétféleképpen a háromszög területét: $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{a \cdot b}{c} = 7{,}2$ cm.



a) $r = 12$, $M = 9, a = 15$; $V \approx 1357{,}2\ \text{cm}^3$, $A \approx 1017{,}9\ \text{cm}^2$.

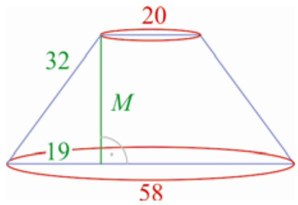
b) $r = 9$, $M = 12, a = 15$; $V \approx 1017{,}9\ \text{cm}^3$, $A \approx 678{,}6\ \text{cm}^2$.

c) Jelölje c_1 és c_2 az átfogónak azokat a szeleteit, amelyekre a magasság bontja az átfogót. Mindkét kúp alapkörének sugara a derékszögű háromszög magassága. A térfogat $V = \frac{1}{3}\pi \cdot m^2 \cdot \left(c_1 + c_2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot m^2 \cdot c \approx 814{,}3\ \text{cm}^3$, a felszín a két kúp palástjának összege: $A = 7{,}2 \cdot \pi \cdot (9 + 12) \approx 475\ \text{cm}^2$.

A sorrendek: $V_c < V_b < V_a$, $A_c < A_b < A_a$.

74. Egy húrtrapézt megforgatunk a szimmetriatengelye körül. A trapéz alapjai 58 mm és 20 mm, szárai 32 mm hosszúak. Mekkora a keletkező test térfogata és felszíne?

Megoldás:



Csonkakúp lesz a forgástest. A trapéz magassága megegyezik a testmagassággal:

$$M = \sqrt{32^2 - 19^2} \approx 25{,}75\,(\text{mm}).$$

$$V = \frac{25{,}75 \cdot \pi}{3}\left(10^2 + 10 \cdot 29 + 29^2\right) \approx 33194{,}3\ \text{mm}^3,$$

$$A = \pi \cdot \left(10^2 + 29^2 + (10 + 29) \cdot 32\right) \approx 6876{,}9\ \text{mm}^2.$$