9. modul

Szinusz- és koszinusztétel

Készítette: Csákvári Ágnes

A modul célja	A koszinusz- és a szinusztétel ismerete, és azok alkalmazása feladatok megoldásában. Térbeli objektumok adatainak meghatározása a fenti tételek segítségével.
Időkeret	8 óra
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Képzőművészet, építészet, modellezés. Természeti környezet. Fizika, csillagászat Szűkebb környezetben: Geometriai alakzatok. Geometriai transzformációk. Sík- és térgeometriai összefüggések, számítások. Hegyesszögek, forgásszögek szögfüggvényei, a szögfüggvények tulajdonságai. Ajánlott megelőző tevékenységek: A háromszögek nevezetes vonalai: szögfelező, szakaszfelező merőleges, magasságvonal. A kör érintőjének elemi geometriai tulajdonságai. Hegyesszögek szögfüggvényei, a szögfüggvények kiterjesztése. Forgásszög szögfüggvényei, trigonometrikus függvények. Ajánlott követő tevékenységek: Térgeometria. Felszín és térfogatszámítás.
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számítás: Háromszögek hiányzó adatainak kiszámolása. Zsebszámológép biztos használata. Mennyiségi következtetés: Ismert adatokból logikus rend szerint ismeretlen adatok meghatározása. Nagyon fontos a jó vázlat elkészítése. Becslés, mérés, kerekítés, valószínűségi szemlélet: A feladatok várható eredményének becslése, különösen a szöveges feladatok esetén. Valóságból vett mért értékű feladatok matematikai átfogalmazása, azok megoldása, és az eredmények visszakonvergálása a valós problémába. A feladat szövege alapján arányos ábra/vázlat készítése. Szövegértés: Szövegértelmezés továbbfejlesztése a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek továbbfejlesztése. A geometriai feladatok algebrai megoldása során keletkező hamis gyökök kiválasztásának képessége. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás:

	A geometriai feladatok megoldási tervének elkészítési képessége. A geometriai feladatok algebrai eszközökkel történő megoldásának képessége. Geometriai fogalmak segítségével az absztrakciós képesség fejlesztése. Induktív, deduktív következtetés: Összefüggések, képletek felfedezése gyakorlati tapasztalatból kiindulva, azok általánosítása és alkalmazása más esetekben.

TÁMOGATÓ RENDSZER

9.1 kártyakészlet: szakértői mozaik alkalmazásához, A, B, C és D feliratú kártyák.
9.2 kártyakészlet: feladatmegoldáshoz, csoportmunkában.
9.3 feladatlap: a 3. mintapélda feldolgozásához.
9.4 feladatlap: a 4. mintapélda feldolgozásához.
9.5 feladatlap: a 6. mintapélda feldolgozásához.
9.6 feladatlap: a 8. mintapélda feldolgozásához.
9.7 feladatlap: a 9. mintapélda feldolgozásához.
9.8 feladatlap: a 10. mintapélda feldolgozásához.

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Középszint: Tudja és használja a szinusz- és koszinusztételt. Tudjon számolásokat végezni általános háromszögben.
Emelt szint: Szinusz- és koszinusztétel bizonyítása

JAVASOLT ÓRABEOSZTÁS

1. Szinusztétel
2. Szinusztétel alkalmazása
3. Koszinusztétel
4. Koszinusztétel alkalmazása
5. A két tétel alkalmazása
6. Feladatok megoldása

7. – 8. Gyakorlati alkalmazás

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Szinusztétel és alkalmazása			
1.	Mintapéldák megbeszélése, szinusztétel felfedezése	számolás, becslés, induktív, deduktív gondolkodás, szövegértés, kombinatív gondolkodás	1., 2. mintapélda
2.	A szinusztétel gyakorlása a háromszög néhány adatának ismeretében (szakértői mozaik, csoportmunka)	deduktív gondolkodás, számolás, számítás	Az 1. feladat példáiból válogatva 9.1. kártyakészlet
3.	A 3., 4. mintapéldák megbeszélése.	szövegértés, számolás, számítás, mennyiségi következtetés, valószínűségi szemlélet, kombinatív gondolkodás	3., 4. mintapélda; 9.3 és 9.4 feladatlapok
4.	Gyakorlás szakértői mozaikkal	szövegértés, számolás, számítás, mennyiségi következtetés, valószínűségi szemlélet, kombinatív gondolkodás	A 2–10. feladatokból válogatva
II. Koszinusztétel és alkalmazása			
1.	Mintapéldák megbeszélése, koszinusztétel felfedezése	számolás, becslés, induktív, deduktív gondolkodás, szövegértés, kombinatív gondolkodás	5., 6., 7. mintapélda; 9.5. feladatlap
2.	A koszinusztétel gyakorlása a háromszög néhány adatának ismeretében (szakértői mozaik, csoportmunka)	deduktív gondolkodás, számolás, számítás	A 11. feladat példáiból válogatva

3.	A 8., 9., 10. mintapéldák megbeszélése	szövegértés, számolás, számítás, mennyiségi következtetés, valószínűségi szemlélet, kombinatív gondolkodás	8., 9., 10. mintapélda; 9.6, 9.7. és 9.8. feladatlapok
4.	Gyakorlás szakértői mozaikkal (csoportmunka)	szövegértés, számolás, számítás, mennyiségi következtetés, valószínűségi szemlélet, kombinatív gondolkodás	A 12–19. feladatokból válogatva;

III. Vegyes feladatok			
1.	Gyakorlás ellenőrzés párban módszerrel (csoportmunka)	szövegértés, kombinatív gondolkodás, számolás, számítás, becslés, valószínűségi szemlélet, deduktív következtetés	A 20.–26. feladatokból válogatva
2.	Gyakorlás szakértői mozaikkal	szövegértés, kombinatív gondolkodás, számolás, számítás, becslés, valószínűségi szemlélet, deduktív következtetés	A 27–39. feladatokból válogatva; 9.2. kártyakészlet
3.	Gyakorlás (feladatküldés, csoportmunka), vagy feladatok megoldása tetszőleges módszerrel	szövegértés, kombinatív gondolkodás, számolás, számítás, deduktív következtetés	Az 1–39. feladatokból válogatva (ami kimaradt)

Bevezetés

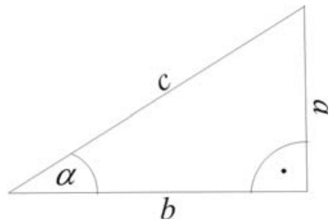
Derékszögű háromszögekben már megismertük a szögfüggvényeket.

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}} = \frac{b}{a}$$



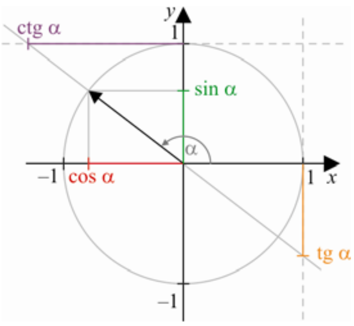
Ekkor a szögek 0° és 90° közötti értékeket vehettek fel. Később kiterjesztettük a szögfüggvény fogalmát tetszőleges szögekre is. Először 0° és 360° közötti szögekre, majd a forgásszögekre is értelmeztük a szögfüggvényeket.

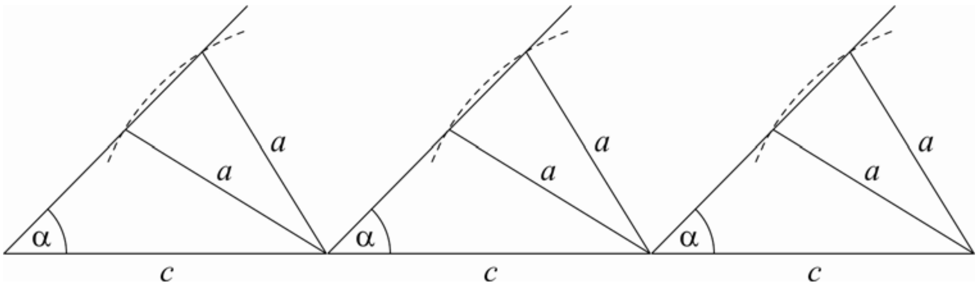
Tetszőleges forgásszög koszinuszán az adott irányszögű egységvektor x koordinátáját, szinuszán pedig az y koordinátáját értjük.

Forgásszög tangensét, illetve kotangensét a következőképpen definiáltuk:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ ahol } \cos\alpha \neq 0,$$

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ ahol } \sin\alpha \neq 0.$$





Mivel általános háromszögekben nem alkalmazhatók ezek az összefüggések, így azok hiányzó szögeinek, oldalainak kiszámításához általában a magasságvonalakat hívtuk segítségül. Ez az eljárás ugyan jó eredményre vezetett, de meglehetősen hosszadalmas, néha bonyolult is volt.

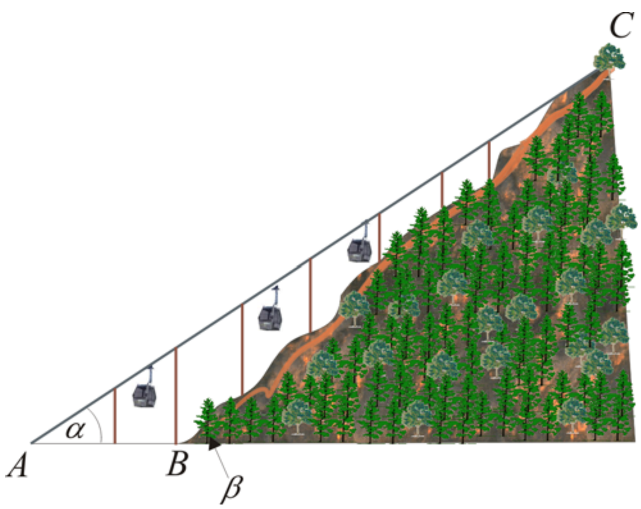
Ebben a modulban olyan trigonometrikus összefüggéseket ismerünk meg, amelyek jóval egyszerűbbé teszik korábbi számításainkat.

Módszertani megjegyzés: Az összetettebb feladatokhoz a megoldásban leírt tervek segítségével feladatlapok készíthetők, a mintapéldák feladatlapjaihoz hasonlóan. Így különböző képességű csoportok is meg tudják oldani a példákat. Jobb képességű csoportoknál a mintapéldák a feladatlapok segítségével önálló feldolgozásra is kiadhatók.
Feladatlapok készültek a 3., 4., 6., 7., 9. és 10. mintapéldákhoz, de ezek csak egyfajta gondolatmenetet mutatnak meg. Van olyan feladat, amely többféleképpen is megoldható. Tanítási óra közben a tanár akkor használhatja ezeket a feladatlapokat, ha a gyengébb tanulóknak kisebb lépésekre bontással szeretne segíteni a feladat megoldásában.

I. Szinusztétel

Mintapélda₁

Egy hegy aljáról a tetejére libegővel és gyalog egyaránt fel lehet jutni. Ha az ösvényen megyünk a hegy tetejére, közvetlenül a libegő állomásánál lyukadunk ki. A libegő pályájának meredeksége 15°, a hegy oldalán felvezető egyenes ösvényé 17°. A libegő indulási pontjától mindössze 120 m-t kell síkterepen előre sétálnunk, hogy elérkezzünk az ösvényig.

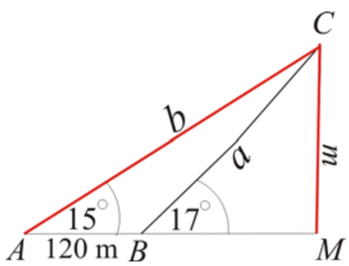


a) Hányszorosa a kötélpálya hossza az ösvény hosszának?

b) Milyen hosszú a libegő kötélpályája? Mennyit kell gyalogolnia annak, aki az ösvényt választja?

c) Milyen magas a hegy?

Megoldás:



A: a libegő kiindulási pontja

B: az ösvény kiindulási pontja

C: a hegy teteje, ahová megérkezünk.

Továbbá tudjuk még, hogy $AB = 120$ m; $\alpha = 15°$; $\beta = 17°$.

Feltételezzük, hogy B-ből C-be szintén egyenes szakasz vezet.

Keressük az $\frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$ arányt. Továbbá: b =?; a = ?; m = ?

A magasság talppontját jelöljük M-mel.

a) Az AMC derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{m}{b} \quad \Rightarrow \quad m = b \cdot \sin\alpha$.

A BMC derékszögű háromszögben $\sin\beta = \frac{m}{a} \quad \Rightarrow \quad m = a \cdot \sin\beta$.

Ebből $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$.

Mindkét oldalt elosztjuk b-vel, illetve $\sin\beta$-val: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Tehát a két oldalhossz aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával, vagyis $\frac{a}{b} = \frac{\sin 15°}{\sin 17°} = 0{,}8852$ (sin 17° = sin 163°). Ebből átrendezéssel adódik, hogy $b \approx 1{,}13\ a$.

A kötélpálya hossza kb. 1,13-szorosa az ösvény hosszának.

b) Az ABC háromszögben ismerjük az AB oldalt, ami 120 m és a rajta fekvő két szöget.

A háromszög harmadik szöge: $\gamma = 2°$

Bizonyítható, hogy az a) részben kapott összefüggéshez hasonlóan igaz $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ és $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ összefüggés is.

Behelyettesítés után kapjuk:

$$\frac{a}{120} = \frac{\sin 15°}{\sin 2°} \Rightarrow a = \frac{120 \cdot \sin 15°}{\sin 2°} \approx 889{,}9,$$

illetve $$\frac{b}{120} = \frac{\sin 17°}{\sin 2°} \Rightarrow b = \frac{120 \cdot \sin 17°}{\sin 2°} \approx 1005{,}3.$$

Az ösvény kb. 890 m hosszú, míg a kötélpálya kb. 1005 m hosszú.

c) A hegy magasságának meghatározásához például felhasználhatjuk a BMC derékszögű háromszöget.

$\sin 17° \approx \frac{m}{889{,}9}$. Ebből $m \approx 889{,}9 \cdot \sin 17° \approx 260{,}2$.

A hegy kb. 260 m magas.

Szinusztétel: Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

A szinusztétel bizonyítása (kiegészítő anyag)

A háromszög területét kiszámíthatjuk, ha ismerjük két oldalát és az általuk közbezárt szöget. A területet megkapjuk, ha a két oldal szorzatát megszorozzuk a közbezárt szög szinuszával, és vesszük a kapott szorzat felét.

$$T=\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}=\frac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2}=\frac{b\cdot c\cdot \sin\alpha}{2}.$$

Ebből $\quad \dfrac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2}=\dfrac{b\cdot c\cdot \sin\alpha}{2}.$

Mindkét oldalt beszorozzuk 2-vel és elosztjuk c-vel ($c\neq 0$):

$$a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha,$$

ami az állítást igazolja.

Megjegyzés: A szinusztétel más alakban is felírható.

Mindkét oldalt elosztjuk b-vel és sin β-val. Az osztást elvégezhetjük, mert a háromszög egyik oldala sem és szögei szinusza sem lehet 0.

Kapjuk: $\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$

Hasonlóan igazolhatók: $\quad \dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, és $\quad \dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$

Átrendezés után kapjuk: $\quad \dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}.$

Mintapélda$_2$

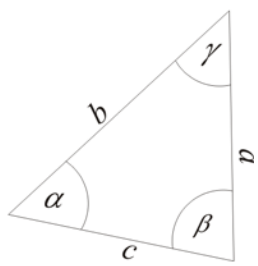
A szokásos jelöléseket használva adjuk meg a háromszög néhány adatát. Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalait és szögeit!

a) $a = 4{,}2$ cm; $c = 3{,}7$ cm; $\alpha = 54°$

b) $a = 4{,}2$ cm; $c = 3{,}7$ cm; $\gamma = 54°$

c) $b = 8$ cm; $a = 4$ cm; $\alpha = 30°$

d) $\beta = 75°$; $a = 12{,}1$ dm; $b = 8{,}2$ dm



Megoldás:

a) Adott: $a = 4{,}2$ cm; $c = 3{,}7$ cm; $\alpha = 54°$.

Keressük a b oldalt, valamint a β és γ szögeket.

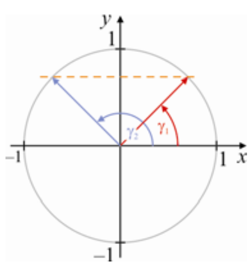
A szinusztétel segítségével γ könnyen meghatározható:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{c}{a}\quad\Rightarrow\quad \sin\gamma=\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{3{,}7\cdot\sin 54°}{4{,}2}=0{,}7127.$$

Két olyan szög létezik 0° és 180° között, amelyiknek szinusza 0,7127:

$\gamma_1 = 45{,}5°$ és $\gamma_2 = 180° – 45{,}5° = 134{,}5°$.

Minthogy $a > c$, ezért $\alpha > \gamma$, így γ_2 nem megoldás.



Tudjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180°$, ebből $\beta = 180° - 54° - 45{,}5° = 80{,}5°$.

A b oldalt ismét szinusztétellel határozzuk meg:

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad b=\frac{3{,}7\cdot\sin 80{,}5°}{\sin 45{,}5°}\approx 5{,}1\,.$$

A keresett háromszög oldalai 4,2 cm, 3,7 cm és 5,1 cm hosszúak, szögei pedig 54°; 45,5° és 80,5°.

b) Adott: a = 4,2 cm; c = 3,7 cm; γ = 54°.

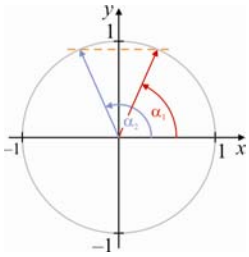
Keressük a b oldalt, valamint az α és β szögeket.

A szinusztétel segítségével α meghatározható: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{c}$.

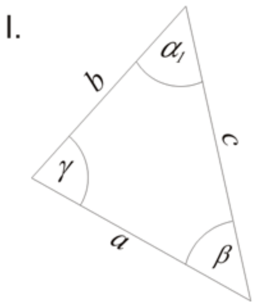
Ebből $\sin\alpha=\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{c}$. Behelyettesítve: $\sin\alpha=\dfrac{4{,}2\cdot\sin 54°}{3{,}7}=0{,}9183$.

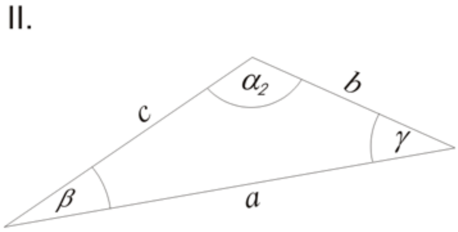
Két olyan szög létezik 0° és 180° között, amelyiknek a szinusza 0,9183:

$\alpha_1 = 66{,}7°$ és $\alpha_2 = 180° - 66{,}7° = 113{,}3°$.



Két háromszög is lehet jó megoldás. Az egyik hegyes, a másik tompaszögű.





I. esetben $\alpha_1 = 66{,}7°$

Tudjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Ebből $\beta = 180° - 66{,}7° - 54° = 59{,}3°$.

A b oldalt ismét szinusztétellel határozzuk meg: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha_1}$

Átrendezéssel adódik: $b=\dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha_1}=\dfrac{4{,}2\cdot\sin 59{,}3°}{\sin 66{,}7°}\approx 3{,}9$.

II. esetben $\alpha_2 = 113{,}3°$

Az I. megoldáshoz hasonlóan járunk el. Ezúttal β= 180° –113,3° –54°= 12,7°.

Alkalmazzuk a szinusztételt az α_2 és β szögekre, valamint az a és a keresett b oldalra: $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_2}$.

Átrendezéssel adódik: $b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha_2} = \frac{4{,}2\cdot\sin 12{,}7°}{\sin 113{,}3°} \approx 1{,}0$.

A következő két megoldást kaptuk:

I. A hegyesszögű háromszög hiányzó adatai: $\alpha_1 = 66{,}7°$; $\beta = 59{,}3°$; $b = 3{,}9$ cm.

II. A tompaszögű háromszög hiányzó adatai: $\alpha_2 = 113{,}3°$; $\beta = 12{,}7°$; $b = 1{,}0$ cm.

c) Adott: b = 8 cm; a = 4 cm; α = 30°.

Keressük a β és γ szögeket, valamint a c oldalt.

A szinusztétel alkalmazásával megkapjuk a β szöget:

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$ Ebből átrendezéssel kapjuk: $\sin\beta = \frac{8\cdot\sin 30°}{4} = 1 \quad\Rightarrow\quad \beta = 90°$,

tehát a háromszög derékszögű.

γ = 90° – 30° = 60°, a c oldalt vagy szögfüggvény, vagy Pitagorasz-tétel segítségével határozhatjuk meg.

Most alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $c^2 = b^2 - a^2 = 8^2 - 4^2 = 48$.

Ebből $c = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$.

A keresett értékek: β = 90°; γ = 60° és $c \approx$ 6,9 cm.

d) Adott: β = 75°; b = 8,2 dm; a = 12,1 dm.

Keressük az α és a γ szögeket, valamint a c oldalt.

A szinusztétel alkalmazásával kiszámíthatjuk az α szöget: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$.

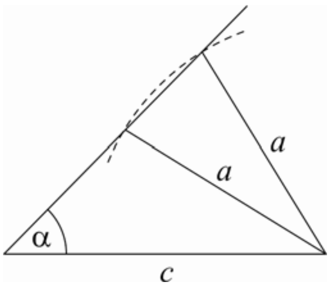
Ebből $\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} = \frac{12{,}1\cdot\sin 75°}{8{,}2} \approx 1{,}4253$.

Bármely szög szinusza legfeljebb 1, ezért ilyen háromszög nem létezik.

Megjegyzés: A szinusztételnél tapasztaltak megegyeznek az elemi geometriában tanult ismereteinkkel:

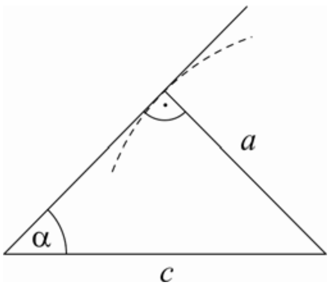
Ha adott egy háromszög két oldala, és a rövidebbikkel szemközti szöge, akkor a következő esetek lehetségesek:

1. Két megoldása van, egy tompa- és egy hegyesszögű háromszög.



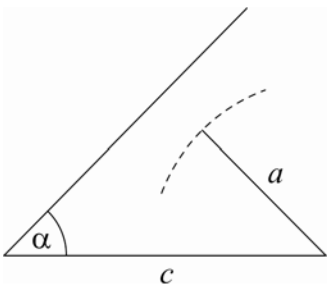
Ekkor $\sin\gamma < 1$ és γ-ra egy hegyes és egy tompaszög adódik.

2. Egyetlen megoldása van, mégpedig a háromszög derékszögű.



Ekkor $\sin\gamma = 1$, innen $\gamma = 90°$.

3. Nincs ilyen háromszög.



Ekkor $\sin\gamma > 1$, nincs háromszög.

Feladatok

9.1. kártyakészlet alkalmazása

Az 1. feladat megoldásához szakértői mozaik módszert javaslunk csoportmunkában, négyfős csoportokban. Ehhez rendelkezésre áll a 9.1 kártyakészlet A, B, C és D feliratú kártyákkal, amelyet a modul többi, szakértői mozaikkal feldolgozható feladatánál is alkalmazhatunk. Általában az A feladatok a legkönnyebbek, a D jelűek pedig a legnehezebbek.

Ajánlás:

a) két lehetséges megoldás közül csak az egyik jó, a másik esetén a háromszög belső szögeinek összege nagyobb 180°-nál.
b) egy jó megoldás: adott egy oldal, valamint két szög.
c) két jó megoldás
d) nincs ilyen háromszög

A többi feladat gyakorlásnak vagy házi feladatnak kitűzhető.

1. Az alábbi táblázatban háromszögek adatai szerepelnek a szokásos jelölésekkel. (Az oldalak mértéke az egység.) Számold ki a táblázat hiányzó értékeit!

	a	b	c	α	β	γ
a)		13	17			58°
b)			20		69,5’	41,6°
c)		52	75		16,27°	
d)	3,6	4,2		76°		
e)	27		18,2	103,4°		
f)	11,32	15,02		37°		
g)	13				97°	51°

Megoldási útmutató:

A feladatok a 2. mintapélda alapján oldhatók meg.

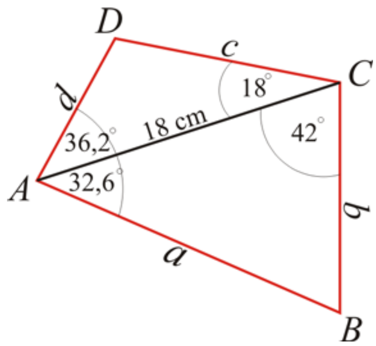
	a	b	c	α	β	γ
a)	19,83	13	17	81,57°	40,43°	58°
b)	28,1	28,2	20	68,9°	69° 30’	41,6°
c)	$a_1 \approx 119{,}6$ $a_2 \approx 24{,}4$	52	75	$\alpha_1 \approx 139{,}9°$ $\alpha_2 \approx 7{,}56°$	16,27°	$\gamma_1 \approx 23{,}83°$ $\gamma_2 \approx 156{,}17°$

d)	3,6	4,2	–	76°	$\sin\beta > 1$, nincs mo.	–
e)	27	16,8	18,2	103,4°	35,63°	40,97°
f)	11,32	15,02	18,8	37°	53°	90°
g)	13	24,35	19,06	32°	97°	51°

Mintapélda₃

Milyen hosszúak az általános négyszög oldalai, ha az AC átlója 18 cm hosszú? Az A csúcsnál lévő szöget az átló 36,2°-os és 32,6°-os, a C csúcsnál lévő szöget pedig 18°-os és 42°-os részekre bontja úgy, hogy a 36,2°-os és a 18°-os szögek vannak azonos oldalon.

Megoldás:



Tudjuk, hogy az α szöget az átló két részre bontja: α_1 = 36,2°; α_2 = 32,6°.

A szöveg alapján α = 36,2° + 32,6° = 68,8°.

Az átlót e-vel jelölve e = 18 cm.

Az átló a γ szöget is két részre bontja. γ_1 = 18°; γ_2 = 42°.

Terv:

1. A négyszög B és D csúcsánál lévő szögének meghatározása
2. CDA háromszög oldalainak kiszámítása szinusztétellel
3. ABC háromszög oldalainak kiszámítása szinusztétellel

Számítás:

1. CDA háromszögből δ = 180° – 36,2° – 18° = 125,8°.

   Az ABC háromszögből β = 180° – 42° – 32,6° = 105,4°.

2. $\frac{d}{e} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta} \Rightarrow d = \frac{e\cdot\sin\gamma_1}{\sin\delta} = \frac{18\cdot\sin 18°}{\sin 125{,}8°} = 6{,}9$

   $\frac{c}{e} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\delta} \Rightarrow c = \frac{e\cdot\sin\alpha_1}{\sin\delta} = \frac{18\cdot\sin 36{,}2°}{\sin 125{,}8°} = 13{,}1$

3. $\frac{b}{e}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad b=\frac{e\cdot\sin\alpha_2}{\sin\beta}=\frac{18\cdot\sin 32{,}6°}{\sin 105{,}4°}=10{,}1$

$$\frac{a}{e}=\frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{e\cdot\sin\gamma_2}{\sin\beta}=\frac{18\cdot\sin 42°}{\sin 105{,}4°}=12{,}5$$

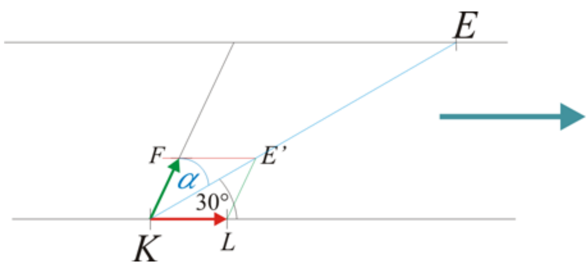
A négyszög oldalainak hossza: 12,5 cm; 10,1 cm; 13,1 cm; 6,9 cm.

Mintapélda$_4$

Az utasokat a folyón egy komp viszi az egyik partról a másikra. A kiindulási pontból a cél a folyási iránnyal a parthoz viszonyítva 30°-os szögben látszik. A folyó sodrása miatt a komp-nak más irányban kell haladnia. Mekkora ez az eltérés, ha a komp sebessége állóvízben 2,5 m/s, a folyóé 2 m/s?

Megoldás:

A *K* kiindulási pontból az *E* érkezési pontba szeretnénk eljutni. Ha az *E* pontot célozzuk meg, akkor a folyó sodrása miatt lejjebb kötünk ki. Ezért egy feljebb lévő pont a cél, amit a komp akkor érne el, ha állóvízben közlekedne.



A kompot a *K* kiindulási pontból a víz sodra 1 másodperc alatt a 2 méterre levő *L* pontba viszi. Az *LKE* szög 30°. A komp álló vízben 1 sec alatt 2,5 métert tesz meg, így a *K* pontból az *F* pontba jutna. Az *EKF* szöget keressük. Továbbiakban jelöljük α-val.

Egy másodperc alatt a komp az *E'* pontba jut.

$$\left|\overrightarrow{KL}\right|=\left|\overrightarrow{FE'}\right|=2 \;; \qquad \left|\overrightarrow{KF}\right|=\left|\overrightarrow{E'L}\right|=2{,}5$$

A $\overrightarrow{KL}$ és a $\overrightarrow{KF}$ vektorok eredője a $\overrightarrow{KE'}$. Az ábrán a vektorösszeadásnak megfelelő paralelogramma szerepel.

Az *LKE'* szög és a *KE'F* szög megegyezik, mert váltószögek. A *KE'F* háromszögnek ismerjük két oldalát, a nagyobbikkal szemben lévő szögét, és keressük a kisebbikkel szemben lévőt. Mivel nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ezért a keresett szög 30°-nál kisebb lesz.

Felírjuk erre a háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 30°}=\frac{2}{2{,}5} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=0{,}4 \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 23{,}6°$$

A másik megoldás tompaszög lenne, ami nem lehetséges.

A kompnak egy 23,6°-kal feljebb lévő pontot kell célba vennie, hogy a kikötőhöz érkezzen.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok megoldásához szakértői mozaik módszert javaslunk.

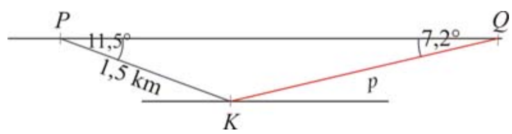
Ajánlás:

„A” jelűek feladata: a szinusztétel közvetlen alkalmazását igénylő egyszerű, a hétköznapi életből vett szöveges feladatok (2. feladat)
„B” jelűek feladata: Összetett feladatok háromszögekre (6. feladat)
„C” jelűek feladata: Összetett feladatok sokszögekre (7. feladat)
„D” jelűek feladata: Összetett gyakorlati feladatok (10. feladat)

„A” jelűek feladatai:

2. A folyóparton lévő kikötőből két irányba szoktak indítani kompot. A célállomások a folyó túlpartján vannak. Az egyik 1,5 km-re van a folyó sodrásával megegyező irányban. Ebből a célállomásból a kiindulási pont 11,5°-os szögben látszik. A másik célállomásból pedig, ami a folyó sodrásával ellentétes irányban található, 7,2°-os szögben látszik. Milyen távol van a másik célállomás a kiindulási ponttól?

Megoldás:



Ismerjük a *KPQ* háromszögben a q oldalt, és keressük p-t. A q oldallal szemben a β szög, a p oldallal szemben az α szög tartozik, ahol

$q = 1,5$ km; $\beta = 7,2°$; $\alpha = 11,5°$.

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{q \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \approx 2,4$$

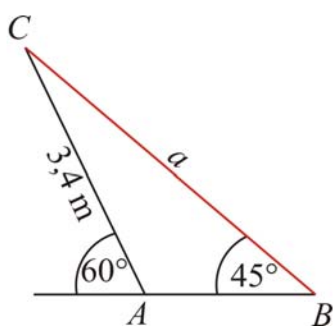
A másik célállomás 2,4 km-re van a kiindulási ponttól.

3. Egy emeletes családi házban a padlásra eredetileg 60°-os emelkedésű, 3,4 m hosszú falépcsőt építettek. A tulajdonos ezt túlságosan meredeknek tartotta, és kicseréltette 45°-os emelkedésű lépcsőre. Mennyivel lett hosszabb a lépcső?

Megoldás:

Az *ABC* háromszögben az alábbi adatokat ismerjük:

$b = 3,4$ m; $\beta = 45°$; $\alpha = 180° – 60° = 120°$.



Keressük az a oldalt.

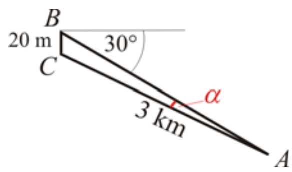
Alkalmazzuk a szinusztételt:

$$\frac{a}{3{,}4}=\frac{\sin 120°}{\sin 45°} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{3{,}4\cdot\sin 120°}{\sin 45°}\approx 4{,}2$$

A két hosszúság különbsége: $4{,}2 - 3{,}4 = 0{,}8$.

A lépcső 0,8 méterrel lett hosszabb.

4. A domb tetején lévő kilátó tetejétől 30°-os depressziószögben (a vízszintestől negatív irányban felvett szög) látszik a kilátó aljától 3 km-re lévő kicsiny település egy pontja. A kilátó 20 m magas. Mekkora szögben látszik e pontból a kilátó?



Megoldás:

Jelöljük A-val a megfigyelési pont helyét, B-vel a kilátó tetejét és C-vel a kilátó alját.

Ennek megfelelő jelöléseket használva tudjuk: $b = 3$ km; $a = 20$ m; $\alpha = ?$

$$\beta' = 30° \Rightarrow \beta = 60°$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\beta}{b}=0{,}0058 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0{,}33°$$

Megjegyzés: a másik megoldásnak a feladat szövege miatt nincs értelme.

A településről a kilátó 0,33°-ban látszik.

„B” jelűek feladatai:

5. Egy háromszög területe 62 m^2. Két szöge 40° és 60°. Milyen hosszúak az oldalai?

Megoldás:

Terv:

1. A háromszög harmadik szögének kiszámítása
2. Behelyettesítés a területképletbe (két oldal ismeretlen)
3. Szinusztétellel az egyik ismeretlen oldal kifejezése a másik oldal segítségével
4. Visszahelyettesítés a területképletbe, megoldás
5. 3.-ban kifejezett oldal kiszámítása
6. Harmadik oldal kiszámítása szinusztétellel

Számítás:

1. $\alpha = 40°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 180° - 40° - 60° = 80°$.

2. $T = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} \Rightarrow 62 \approx 0{,}4924ab$

3. A szinusztétel alapján: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow a = b\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx 0{,}7422b$.

4. $62 \approx 0{,}4924 \cdot 0{,}7422\, b^2 \Rightarrow b \approx 13{,}0$.

5. $a = 0{,}7422b \approx 9{,}67$.

6. A szinusztételből $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c \approx 14{,}8$.

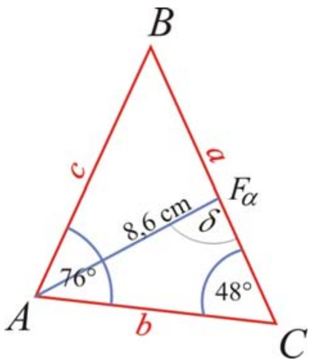
Az oldalak kb. 13,0 m, 9,7 m illetve 14,8 m hosszúak.

6. Egy háromszög két szöge 76° és 48°. A 76° nagyságú szög szögfelezője 8,6 cm hosszú. Milyen hosszúak a háromszög oldalai és mekkora a hiányzó szöge?

Megoldás:

$\alpha = 76°$; $\gamma = 48°$. Az α szög szögfelezője $f_\alpha = 8{,}6$ cm.

A szögfelező BC oldallal való metszéspontját jelöljük F_α -val.



Terv:

1. Az $AF_\alpha C$ szög (δ) kiszámítása
2. b oldal meghatározása szinusztétellel
3. β kiszámítása
4. c oldal meghatározása szinusztétellel
5. a oldal meghatározása szinusztétellel

Számítás:

1. $\delta = 180° - 38° - 48° = 94°$

2. Az ACF_α háromszögben $\dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{f_\alpha} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{8{,}6 \cdot \sin 94°}{\sin 48°} \approx 11{,}54$.

3. $\beta = 180° - 76° - 48° = 56°$

4. Az $AF_\alpha B$ háromszögben $\dfrac{\sin(180° - \delta)}{\sin\beta} = \dfrac{c}{f_\alpha} \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{8{,}6 \cdot \sin 86°}{\sin 56°} \approx 10{,}35$.

5. Az ABC háromszögben $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{11{,}54 \cdot \sin 76°}{\sin 56°} \approx 13{,}51$.

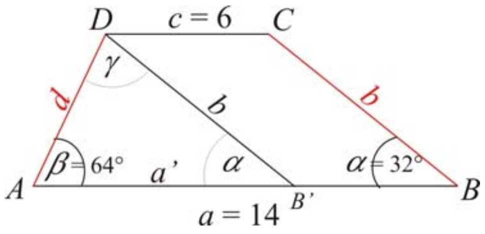
A háromszög hiányzó szöge 56°-os. Az oldalai 11,54 cm, 10,35 cm és 13,51 cm hosszúak.

„C" jelűek feladatai:

7. Egy trapéz hosszabbik alapján fekvő szögei 32° és 64° fokosak. Két alapja 6 és 14 egység. Milyen hosszúak a szárai?

Megoldás:

A *D* csúcsból párhuzamost húzunk a *BC* szárral. Az így kapott *AB'D* háromszögnek a szögei $\alpha = 32°$; $\beta = 64°$.



Az *AB'D* háromszög *AB'* oldala a trapéz két alapjának a különbsége: *AB'* = 14 – 6 = 8 egység.

$\gamma = 180° - 32° - 64° = 84°$

A szinusztétel alkalmazása:

b meghatározása: $\frac{b}{8} = \frac{\sin 64°}{\sin 84°} \Rightarrow b = \frac{8 \cdot \sin 64°}{\sin 84°} \Rightarrow b \approx 7{,}2$;

d meghatározása: $\frac{d}{8} = \frac{\sin 32°}{\sin 84°} \quad \Rightarrow \quad d \approx 4{,}3$.

A trapéz szárai 4,3 és 7,2 egység hosszúak.

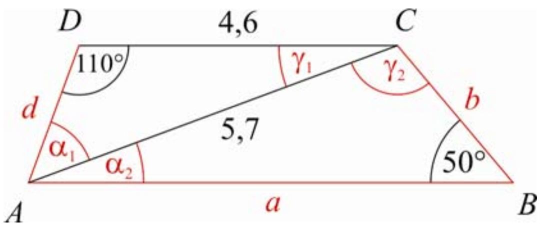
8. Egy trapéz rövidebbik alapja, *CD* = 4,6 dm. Az egyik átlója, *AC* = 5,7 dm. A *D* csúcsnál lévő szög 110°, a *B* csúcsnál lévő pedig 50°. Milyen hosszúak a trapéz ismeretlen oldalai és szögei?

Megoldás:

Terv:

1. A trapéz másik két szögének kiszámítása
2. Kiszámítani, hogy az átló mekkora részekre osztja a szögeket (szinusztétel)
3. A trapéz szárainak és másik alapjának kiszámítása szinusztétellel

Számítás:



1. $\delta = 110° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 70°$; $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\beta = 50° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 130°$; $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

2. $\frac{\sin \alpha_1}{\sin 110°} = \frac{4{,}6}{5{,}7} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha_1 = 0{,}7583$

$\alpha_1 = 49{,}3°$; $\alpha_2 = 20{,}7°$

$\alpha_2 = \gamma_1 = 20{,}7°$; $\gamma_2 = 109{,}3°$

3. $\dfrac{d}{5{,}7}=\dfrac{\sin 20{,}7°}{\sin 110°} \quad\Rightarrow\quad d=\dfrac{5{,}7\cdot\sin 20{,}7°}{\sin 110°}\approx 2{,}1$

$$\frac{b}{5{,}7}=\frac{\sin 20{,}7°}{\sin 50°} \quad\Rightarrow\quad b\approx 2{,}6$$

$$\frac{a}{5{,}7}=\frac{\sin 109{,}3°}{\sin 50°} \quad\Rightarrow\quad a\approx 7{,}0$$

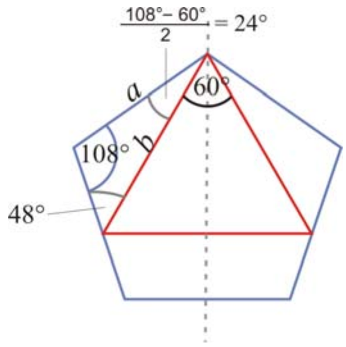
A trapéz hiányzó szögei 70° és 130°-osak. A keresett oldalai 2,1 dm, 2,6 dm és 7,0 dm hosszúak.

9. Egy szabályos *a* oldalú ötszögbe rajzoljunk egy szabályos háromszöget úgy, hogy a háromszög egyik oldala párhuzamos legyen az ötszög egy oldalával, valamint ezzel az oldallal szemközti csúcs az ötszög egyik csúcsa. Hányszorosa a háromszög oldala az ötszög oldalának?

Megoldás:

A szabályos ötszögnek és a szabályos háromszögnek közös szimmetriatengelye van. Jelöljük *b*-vel a szabályos háromszög oldalát. A szabályos ötszög szögei 108°-osak.

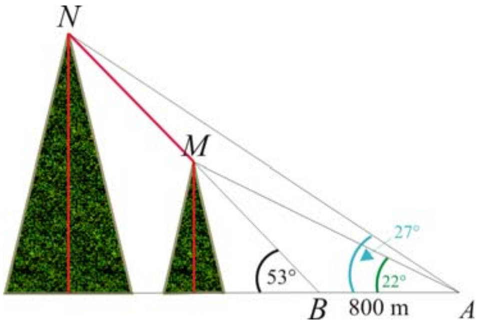
Az ábra alapján: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin 108°}{\sin 48°} \quad\Rightarrow\quad b\approx 1{,}28a$.



A háromszög oldala kb. 1,28-szorosa az ötszög oldalának.

„D” jelűek feladata:

10. A síkságon állva két, egymás mögött lévő hegycsúcsot látunk, a közelebbit 22°, a távolabbit 27° emelkedési szögben. Ha 800 métert gyalogolunk előre, akkor a két hegycsúcs közös, 53°-os emelkedési szög alatt látszik. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság fölött, és milyen távol vannak egymástól légvonalban?



Megoldás:

Jelölje A a kiindulási pontot, B a 800 méterrel közelebbi pontot, M a közelebbi hegycsúcsot, N a távolabbi hegycsúcsot.

Terv:

1. AMB szög meghatározása
2. BM oldal kiszámítása szinusztétellel
3. Kisebbik hegy magasságának meghatározása
4. BNA szög kiszámítása
5. BN oldal kiszámítása szinusztétellel
6. Nagyobbik hegy magasságának meghatározása
7. Két hegy távolságának kiszámítása

Számítás:

1. A B csúcsnál lévő 53°-os szög egy háromszög külső szöge, ami a nem mellette lévő két belső szög összege, ezért az AMB szög nagysága 53° – 22° = 31°.
2. A szinusztételt alkalmazva kiszámítjuk a BAM háromszög BM oldalának hosszát:
$$\frac{BM}{800} = \frac{\sin 22°}{\sin 31°} \quad \Rightarrow \quad BM \approx 581{,}9\ (\text{m}).$$
3. A kisebbik hegy magassága: $\sin 53° = \frac{m}{581{,}9} \quad \Rightarrow \quad m \approx 464{,}7\ (\text{m}).$
4. Ugyanígy járunk el a BAN háromszögre is: BNA szög = 53° – 27° = 26°.
5. $\frac{BN}{800} = \frac{\sin 27°}{\sin 26°} \quad \Rightarrow \quad BN \approx 828{,}5\ (\text{m}).$
6. A nagyobbik hegy magassága: $\sin 53° = \frac{n}{828{,}5} \quad \Rightarrow \quad n \approx 661{,}7$.
7. A két hegycsúcs távolsága légvonalban $BN - BM \approx 246{,}6$.

A hegycsúcsok a síkság fölött kb. 465 m és kb. 662 m magasan vannak. Egymástól való távolságuk kb. 247 m.

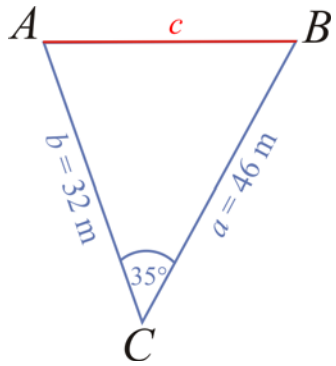
II. Koszinusztétel

Míg a szinusztétel a háromszög két oldala és a velük szemközti szögek között mutat összefüggést, addig a koszinusztétel a háromszög 3 oldala és egyik szöge között.

Mintapélda$_5$

Egy sebességmérő műszer az autóút egyenes szakaszán 32 m távolságban érzékelt egy balról közeledő autót. Egy másodperc múlva ugyanazt az autót már jobbra, 46 m-re mérte be. Az autó első helyzete (A), a radar (C), és az autó második helyzete (B) meghatározta ACB szög 35°. Mekkora az autó sebessége?

Megoldás:



Készítsünk ábrát!

A sebesség kiszámításához szükségünk van arra, hogy hány métert tett meg ez idő alatt az autó: c = ?

Alkalmazható a következő összefüggés, amelyet **koszinusztételnek** nevezünk: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$.

Behelyettesítjük a, b és γ értékét:

$$c^2 = 46^2 + 32^2 - 2\cdot 46\cdot 32\cdot\cos 35° = 3140 - 2411{,}6 = 728{,}4$$

$$c \approx 27 \text{ (m)}$$

Ennek az alapján $v = \dfrac{c}{t} = \dfrac{27}{1} = 27\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 97{,}2\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

Az autó sebessége 97,2 km/h a műszer szerint.

Koszinusztétel: Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldalának négyzetösszegéből kivonjuk a közbezárt szög koszinuszának és ezen oldalaknak a kétszeres szorzatát:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cdot\cos\beta$$

Megjegyzések:

1. Ha $\gamma = 90°$, ui. a háromszög derékszögű, akkor a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos 90°$ képlet átalakul, azaz $c^2 = a^2 + b^2$, mivel $\cos 90° = 0$, így $2ab\cdot\cos 90° = 0$.

   A koszinusztétel derékszögű háromszög esetén a Pitagorasz-tételt adja.
2. A koszinuszfüggvény 0° és 180° között kölcsönösen egyértelmű, ezért a koszinusztétel minden esetben egyértelmű megoldást ad, feltéve, hogy létezik a megadott adatoknak megfelelő háromszög.
3. A koszinusztétel és a 2. megjegyzés azt is jelenti, hogy $c^2 = a^2 + b^2$ csak akkor áll fenn, ha $\gamma = 90°$. (A Pitagorasz-tétel megfordítása is igaz.)

A koszinusztétel bizonyítása (kiegészítő anyag)

Az ABC háromszögben vezessük be a következő jelöléseket: $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$.
Ekkor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.
A háromszög oldalainak hossza éppen ezen vektorok hosszával egyenlő.
Tudjuk, hogy $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = a^2$, $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}|^2 = b^2$ és $\mathbf{c}^2 = |\mathbf{c}|^2 = c^2$.

Emeljük négyzetre a $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ egyenlet mindkét oldalát!

$$c^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{ab}$$

A kétszeres szorzatban **ab** két vektor skaláris szorzatát jelenti. Eszerint

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\gamma = ab\cdot\cos\gamma.$$

Behelyettesítjük a megfelelő helyekre a vektorok négyzete és az oldalak négyzete közötti összefüggéseket valamint figyelembe vesszük a skaláris szorzat definícióját, így megkapjuk a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Mintapélda$_6$

Egy háromszög oldalai 8 cm, 11 cm és 13 cm hosszúak. Mekkorák a szögei?

Megoldás:

Terv:

1. Mivel a koszinuszfüggvény 0° és 180° között kölcsönösen egyértelmű, ezért koszinusztétellel kiszámítjuk a legnagyobb oldallal szemközti szöget.
2. Ezek után már bármely másik szöget meghatározhatjuk szinusztétellel. Most már nem kell odafigyelni a tompaszögű megoldásra, hiszen a legnagyobb szöget az első lépésben megkaptuk.
3. A háromszög belső szögeinek összege 180°. A harmadik szöget ennek alapján határozzuk meg.

Számítás:

1. $13^2 = 11^2 + 8^2 - 2\cdot 11\cdot 8\cdot\cos\gamma$

   A kijelölt műveletek elvégzése és egyenletrendezés után kapjuk:

   $\cos\gamma = 0{,}0909 \Rightarrow \gamma = 84{,}8°$.

2. $\frac{\sin 84{,}8°}{\sin\beta} = \frac{13}{11} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta = 0{,}8427 \quad\Rightarrow\quad \beta = 57{,}4°$, a tompaszögű megoldás nem lehetséges, mert a háromszög legnagyobb szöge 84,8°.

3. $\alpha = 180° - 84{,}8° - 57{,}4° = 37{,}8°$

A háromszög szögei: 84,8°; 57,4° és 37,8°.

Mindig az adott feladatban megadott adatoktól függ, hogy a háromszögekre kimondott két tétel közül melyiket alkalmazzuk.

A szinusztételt akkor alkalmazhatjuk, ha

1. adott egy háromszög egyik oldala és két szöge.
2. adott két oldal és az egyikkel szemközti szög.

A koszinusztételt akkor alkalmazhatjuk, ha

1. adott két oldal és a közbezárt szög.
2. adott három oldal.

Mintapélda$_7$

A szokásos jelöléseket használva megadjuk a háromszög néhány adatát. Határozzuk meg hiányzó oldalait és szögeit!

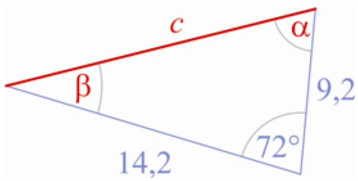
a) a = 14,2 cm; b = 9,2 cm; γ = 72°

b) a = 5 cm; b = 6 cm; c = 7 cm

c) a = 5,4 cm; c = 7,8 cm; α = 37°

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát!



Mivel a c oldalhoz tartozó szög adott, ezért a következőképpen írjuk fel a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Behelyettesítünk: $c^2 = 14{,}2^2 + 9{,}2^2 - 2\cdot 14{,}2\cdot 9{,}2\cdot\cos 72° \approx 205{,}54$;

$$c \approx 14{,}3\ .$$

A szinusztétel alkalmazásával meghatározzuk α értékét.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}\text{, ahonnan } \frac{\sin\alpha}{\sin 72°} = \frac{14{,}2}{14{,}3}\text{, } \sin\alpha \approx 0{,}9444\ .$$

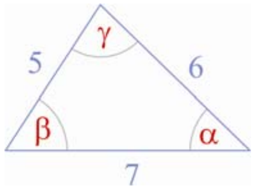
$\alpha \approx 70{,}8°$

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) \approx 37{,}2°$

A háromszög harmadik oldala 14,3 cm, hiányzó szögei 70,8° és 37,2°.

Módszertani megjegyzés: az α szög koszinusztétellel is kiszámítható. A közelítő értékekkel való számolás miatt az utolsó jegyben eltérés lehet.

b) Készítsünk ábrát!



Mivel a koszinuszfüggvény 0° és 180° között kölcsönösen egyértelmű, ezért koszinusztétellel meghatározzuk a leghosszabb oldallal szemben lévő szöget. Mivel nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ez a szög a háromszög legnagyobb szöge.

$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot6\cdot5\cdot\cos\gamma$

$49 = 61 - 60\cdot\cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{-12}{-60} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 78{,}46°$$

Kétféleképpen haladhatunk tovább.

I. lehetőség: A koszinusztétel ismételt alkalmazásával kiszámítjuk valamelyik másik szöget, például β-t:

$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot7\cdot5\cdot\cos\beta,$

$36 = 74 - 70\cdot\cos\beta,$

$$\cos\beta = \frac{-38}{-70} \approx 0{,}5429 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 57{,}12°\ .$$

II. lehetőség: A szinusztétel alkalmazásával számítjuk ki valamelyik másik szöget, például β-t:

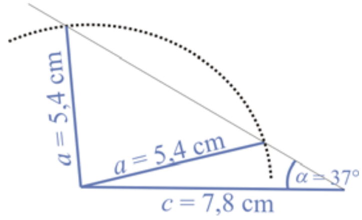
$$\frac{\sin\beta}{\sin 78{,}46°} = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta \approx 0{,}8398 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 57{,}12°\ .$$

A másik megoldás nem lehetséges, mert a háromszög hegyesszögű.

A harmadik szög kiszámítása: $\alpha = 180° - 78{,}46° - 57{,}12° = 44{,}42°$.

A háromszög szögei: 78,46°; 57,12° és 44,42°.

c) Készítsünk ábrát! Mivel a rövidebb oldallal szemközti szögét ismerjük, így két háromszög is adódhat megoldásként.



Ezt a feladatot kétféleképpen oldjuk meg!

I. Szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 37°} = \frac{7{,}8}{5{,}4} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma \approx 0{,}8693 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \approx 60{,}4°;\ \gamma_2 \approx 119{,}6°.$$

1. eset: $\gamma_1 = 60{,}4°$.

$\beta_1 = 180° - 60{,}4° - 37° = 82{,}6°$

A b oldalt szinusztétellel számítjuk ki: $\dfrac{b}{5{,}4} = \dfrac{\sin 82{,}6°}{\sin 37°} \quad \Rightarrow \quad b \approx 8{,}9\ \text{cm}$.

2. eset: $\gamma_2 = 119{,}6°$.

$\beta_2 = 180° - 119{,}6° - 37° = 23{,}4°$

A b oldalt szinusztétellel számítjuk ki: $\dfrac{b}{5{,}4} = \dfrac{\sin 23{,}4°}{\sin 37°} \quad \Rightarrow \quad b \approx 3{,}6\ \text{cm}$.

Az első esetben a háromszög harmadik oldala 8,9 cm, hiányzó szögei 60,4° és 82,6°.

A második esetben a háromszög harmadik oldala 3,6 cm, hiányzó szögei 119,6° és 23,4°.

II. Koszinusztételt alkalmazva: $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$.

Behelyettesítünk:

$5{,}4^2 = 7{,}8^2 + b^2 - 2b\cdot 7{,}8\cdot\cos 37°$ (b-ben másodfokú egyenletet kaptunk.)

$0 = b^2 - 12{,}46b + 31{,}68$

$$b_{1;2} \approx \frac{12{,}46 \pm \sqrt{12{,}46^2 - 4\cdot 31{,}68}}{2} = \frac{12{,}46 \pm 5{,}34}{2}$$

$b_1 \approx 8{,}9$ (cm); $b_2 \approx 3{,}6$ (cm).

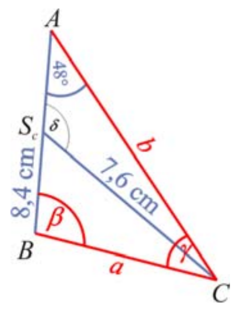
Megjegyzés: Innen a hiányzó szögek mindkét háromszög esetében koszinusztétellel vagy szinusztétellel is kiszámíthatók. (Ez utóbbi esetben nem a legnagyobb szöget számoljuk, hogy biztosan hegyesszöget kapjunk.) A számolás eredményeként az I. megoldásban kapott szögek adódnak.

Mintapélda$_8$

Egy háromszög egyik oldala 8,4 cm, a hozzá tartozó súlyvonal 7,6 cm hosszú, az adott oldalon fekvő egyik szög 48°. Mekkorák a háromszög hiányzó oldalai és szögei?

Megoldás:

Tudjuk: $c = 8{,}4$ cm; $s_c = 7{,}6$ cm; $\alpha = 48°$.



AB felezőpontja S_c, az AS_cC szöget jelöljük δ-val.

Kiszámítandó: γ; β; a; b.

Terv:

1. γ szög két részének nagysága szinusztétellel
2. δ kiszámítása
3. b oldal kiszámítása szinusztétellel
4. a oldal kiszámítása koszinusztétellel
5. Másik szög meghatározása valamelyik tétellel
6. A harmadik szög kiszámítása

Számítás:

1. A súlyvonal a γ szöget két részre osztja: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = \frac{\frac{c}{2}}{s_c} \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma_1 = \frac{4{,}2\cdot\sin 48°}{7{,}6} \approx 0{,}4107 \quad\Rightarrow\quad 24{,}2° \approx \gamma_1$$

(A másik megoldás nem lehetséges, mert 155,8° + 48° > 180°.)

2. $\delta = 180° - 48° - 24{,}2° = 107{,}8°$

3. $$\frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{b}{s_c} \quad\Rightarrow\quad b = \frac{7{,}6\cdot\sin 107{,}8°}{\sin 48°} \approx 9{,}7$$

4. Az S_cBC háromszögben koszinusztétellel számítjuk ki az a oldalt.

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot s_c\cdot\cos(180° - \delta) = 4{,}2^2 + 7{,}6^2 - 2\cdot 4{,}2\cdot 7{,}6\cdot\cos 72{,}2° \approx 55{,}88$$

$a \approx 7{,}5$

5. Az ABC háromszögben most már ismerjük mind a három oldalt és az A csúcsnál lévő szöget, amely a legkisebb oldalhoz tartozó szög. Ezért koszinusztétellel kiszámítjuk a legnagyobb oldalhoz (b oldal) tartozó szöget.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$

$9{,}7^2 = 7{,}5^2 + 8{,}4^2 - 2\cdot 7{,}5\cdot 8{,}4\cdot\cos\beta$

A kijelölt műveletek elvégzése, és egyenletrendezés után kapjuk: $\cos\beta = 0{,}2597$,

$\beta = 74{,}9°$.

6. $\gamma = 180° - 74{,}9° - 48{,}4° = 56{,}7°$

A háromszög hiányzó oldalai 7,5 cm és 9,7 cm hosszúak, keresett szögei pedig 74,9°, illetve 56,7°-osak.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A 11. feladat megoldásához a szakértői mozaik módszert javasoljuk. Ajánlás:

a) egyértelmű megoldás, tompaszögű háromszög
c) mivel a > b és α adott, a szinusztétel alkalmazása célszerű. Koszinusztétel alkalmazása esetén másodfokú egyenletet kapunk.
d) három oldal adott
e) egyértelmű megoldás, derékszögű háromszög

A többi feladat gyakorlásra vagy házi feladatnak tűzhető ki.

11. A szokásos jelöléseket használva számítsd ki a háromszög hiányzó oldalait és szögeit! A távolságok egységben adottak.

	a	b	c	α	β	γ
a)	8,2	13,5	9,1			
b)		3	5	120°		
c)	102	87		84°		
d)	7	11	15			
e)	36,2	22,4	42,57			
f)	7,9		13,4	36,13°		
g)		13	14			55°

Megoldási útmutató: A feladatok a mintapéldák alapján megoldhatók.

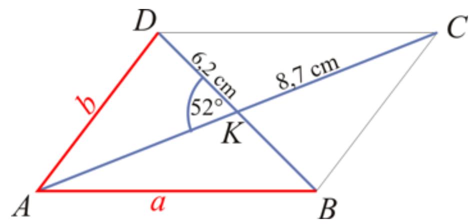
	a	b	c	α	β	γ
a)	8,2	13,5	9,1	36,3°	102,5°	41,2°
b)	7	3	5	120°	21,8°	38,2°
c)	102	87	63,1	84°	58°	38°
d)	7	11	15	25,8°	43,3°	110,9°
e)	36,2	22,4	42,57	58,25°	31,75°	90°
f)	7,9	10,825	13,4	36,13°	53,87°	90°
g)	16,5	13	14	75,5°	49,5°	55°

Megjegyzés: A számított értékek közelítő értékek.

Mintapélda$_9$

Egy paralelogramma átlói 6,2 cm és 8,7 cm hosszúak. A közbezárt szögük 52°. Milyen hosszúak az oldalai?

Megoldás:



Az $ABCD$ paralelogrammában $AC = e = 8{,}7$,

$BD = f = 6{,}2$.

A paralelogramma átlói felezik egymást. A felezőpontjukat jelöljük K-val.

Az AKD háromszögben $AK = \frac{e}{2} = 4{,}35$ és $KD = \frac{f}{2} = 3{,}1$.

Az AKD szöget jelöljük φ-vel: $\varphi = 52°$.

Keressük az AD oldalt, ami a paralelogramma b oldala. Az AKD háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos\varphi\,.$$

Behelyettesítve az értékeket kapjuk:

$$b^2 = 4{,}35^2 + 3{,}1^2 - 2\cdot 4{,}35\cdot 3{,}1\cdot\cos 52° \approx 11{,}9,$$

$$b \approx 3{,}5\,.$$

A paralelogramma a oldalát is hasonlóan számíthatjuk ki az AKB háromszögből.

Az AKB háromszögben $AK = \frac{e}{2} = 4{,}35$ és $KB = \frac{f}{2} = 3{,}1$.

Az AKB szöget jelöljük φ'-vel: $\varphi' = 180° - \varphi$.

Felhasználjuk, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$

Alkalmazzuk az AKB háromszögre is a koszinusztételt:

$$a^2 = 4{,}35^2 + 3{,}1^2 - 2\cdot 4{,}35\cdot 3{,}1\cdot(-\cos 52°) \approx 45{,}1\,,$$

$$a \approx 6{,}7\,.$$

A paralelogramma oldalai 3,5 cm és 6,7 cm hosszúak.

Mintapélda$_{10}$

Egy háromszögnek ismerjük két oldalát, melyek 3,2 cm és 7,8 cm hosszúak. A területe 11,8 cm^2. Milyen hosszú a harmadik oldala?

Megoldás:

Terv:

1. Területképletből a háromszög egyik szögének kiszámítása
2. A harmadik oldal kiszámítása koszinusztétellel

Számítás:

1. A háromszög harmadik oldalának kiszámításához szükségünk van az egyik szögre.

   Tudjuk: a = 3,2 cm; b = 7,8 cm és T = 11,8 cm^2.

   A $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletből kiszámítható a két megadott oldal által közbezárt szög: $11{,}8 = \frac{3{,}2 \cdot 7{,}8 \cdot \sin\gamma}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin\gamma = \frac{2 \cdot 11{,}8}{3{,}2 \cdot 7{,}8} \approx 0{,}9455$.

   $\gamma_1 \approx 71°$; $\gamma_2 \approx 109°$

2. Két megfelelő háromszöget kaptunk. Az egyik hegyesszögű, a másik tompaszögű. Mindkét háromszögnek meghatározzuk a harmadik oldalát a koszinusztétel segítségével.

   I. Hegyesszögű eset:

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma_1$

   $c^2 = 3{,}2^2 + 7{,}8^2 - 2 \cdot 3{,}2 \cdot 7{,}8 \cdot \cos 71° \approx 54{,}83$

   $c_1 \approx 7{,}4$

   II. Tompaszögű eset:

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma_2$

   $c^2 = 3{,}2^2 + 7{,}8^2 - 2 \cdot 3{,}2 \cdot 7{,}8 \cdot \cos 109° \approx 87{,}33$

   $c_2 \approx 9{,}3$

A hegyesszögű háromszög harmadik oldala 7,4 cm, a tompaszögű háromszögnek 9,3 cm hosszú.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok megoldásához a szakértői mozaik módszert javasoljuk. Ajánlás:

„A” jelűek feladata: a koszinusztétel közvetlen alkalmazását igénylő egyszerű, a hétköznapi életből vett szöveges feladatok (12. feladat)
„B” jelűek feladata: Összetett feladatok háromszögekre (15. feladat)
„C” jelűek feladata: Összetett feladatok sokszögekre (17. feladat)
„D” jelűek feladata: Összetett gyakorlati feladatok (19. feladat)

„A” jelűek feladata:

12. Az Alföldön két gémeskút 700 m távolságra van egymástól. Egy juhász meg szeretné itatni a birkáit. A két gémeskút 60°-os szögben látszik a helyről, ahol áll. Az egyik kútig 600 m-t kell mennie. Vajon közelebb van-e a másik?

Megoldás:

A juhász és a másik gémeskút távolságát x-szel jelöljük. Az x oldal egy olyan háromszög oldalának hossza, melynek két oldala 700 m és 600 m, és a 700 m hosszú oldallal szemközti szög 60°. Koszinusztétellel számítjuk ki a keresett oldalt:

$700^2 = x^2 + 600^2 - 2 \cdot x \cdot 600 \cdot \cos 60°$. Átrendezve kapjuk: $0 = x^2 - 600x - 130000$.

A másodfokú egyenlet egyik gyöke kb. 770, másik gyöke negatív, ezért nem megoldás.

A másik kút kb. 770 méterre, azaz távolabb van.

13. Egy kikötőből egy csónak és egy vitorlás indul ki egyszerre. A vitorlás nyugat felé 15 km/h sebességgel, a csónak délnyugat felé 22 km/h sebességgel halad. Milyen távol lesznek egymástól háromnegyed óra múlva?

Megoldás:

A vitorlás ¾ óra alatt 11,25 km-t tesz meg, a csónak 16,5 km-t. Útvonaluk egymással 45°-os szöget zár be. Egy olyan háromszög harmadik oldalának hosszát keressük, melynek két oldala 11,25 km és 16,5 km, és közbezárt szögük 45°. Koszinusztétellel kiszámítható a harmadik oldal:

$x^2 = 11{,}25^2 + 16{,}5^2 - 2 \cdot 11{,}25 \cdot 16{,}5 \cdot \cos 45°$ Ebből $x \approx 11{,}67$.

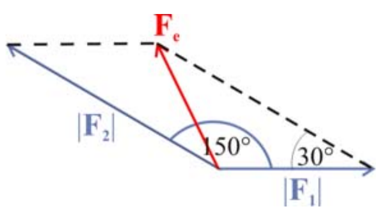
A vitorlás és a csónak háromnegyed óra múlva kb. 11,7 km-re lesz egymástól.

Megjegyzés: Kellemesebb a számolás, ha a megoldás során az 1 óra alatt megtett úttal számolunk, és a ¾-ed órát csak a megoldás végén vesszük figyelembe.

14. A játszótéren egy oszlophoz két kötelet rögzítettek. Két gyerek játék közben két irányba húzza a köteleket, az egyik 400 N, a másik 700 N erővel. A két irány 150°-os szöget zár be. Mekkora erő hat az oszlopra?

Megoldás:

$|\mathbf{F_1}| = 400$ N; $|\mathbf{F_2}| = 700$ N. Az $\mathbf{F_e}$ eredő erő nagyságát kiszámíthatjuk például a paralelogrammaszabály alkalmazá-



sával. Ekkor az $\mathbf{F_e}$ eredő erő az összetevő erők közös kezdőpontjából kiinduló átló vektora. Az $\mathbf{F_e}$ eredő erő nagysága egy olyan háromszög oldalhosszúsága, melynek két oldala 400 és 700 egység, közbezárt szögük 30°. Koszinusztétellel számítjuk ki a harmadik oldalt:

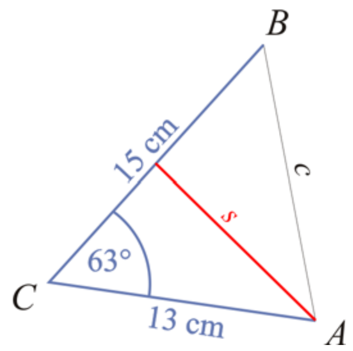
$$|\mathbf{F_e}|^2 = 400^2 + 700^2 - 2\cdot400\cdot700\cdot\cos 30° = 650000 - 484974 = 165026 \Rightarrow |\mathbf{F_e}| \approx 406\ .$$

Az oszlopra kb. 406 N erő hat.

„B” jelűek feladata:

15. Egy háromszög két oldala 13 cm és 15 cm, közbezárt szögük 63°. Milyen hosszú a 15 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal?

Megoldás:



A BC oldal fele: $\frac{15}{2} = 7{,}5$ (cm). Alkalmaztuk a koszinusztételt:

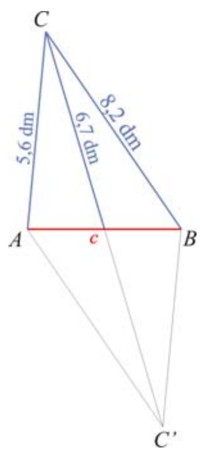
$$s^2 = 7{,}5^2 + 13^2 - 2\cdot7{,}5\cdot13\cdot\cos 63° \approx 136{,}72$$

$$s \approx 11{,}7\ .$$

A 15 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal 11,7 cm hosszú.

16. Egy háromszög két oldala 8,2 dm és 5,6 dm hosszúságú. A harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal 6,7 dm. Mekkora a harmadik oldal hossza?

Megoldás:



Az ABC háromszögben adott az a és a b oldal, valamint az s_c súlyvonal. Ha ismernénk a C csúcsnál lévő γ szöget, akkor a koszinusztétel alkalmazásával ki tudnánk számítani a c oldalt.

A C csúcsot tükrözve a c oldal felezőpontjára egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek egyik átlója $2s_c$. A paralelogramma A-nál lévő szöge $180° - \gamma$.

A C csúcs tükörképét jelöljük C'-vel.

Terv:

1. A paralelogramma A csúcsnál lévő szög koszinuszának meghatározása koszinusztétellel az ACC' háromszögből.
2. γ szög kiszámítása (elég a koszinuszát kiszámolni).
3. A paralelogramma másik átlójának kiszámítása koszinusztétellel (keresett oldal).

Számítás:

1. A CAC' háromszögre írjuk fel a koszinusztételt:

$$(2s_c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \gamma).$$

Tudjuk, hogy $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$.

2. Az egyenlet felírható a következő alakban is:

$$4s_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma.$$

Ebben az egyenletben csak a γ szög értéke az ismeretlen. Behelyettesítve az adatokat, rendezés után: $\cos\gamma = \dfrac{13{,}4^2 - 8{,}2^2 - 5{,}6^2}{2\cdot 8{,}2\cdot 5{,}6} \approx 0{,}8815$.

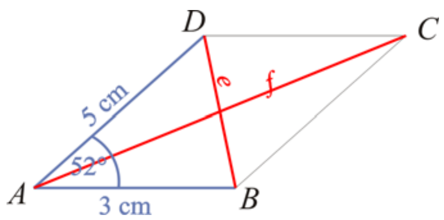
3. A $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ egyenletből pedig $c \approx 4{,}2$.

A háromszög harmadik oldala 4,2 dm.

„C" jelűek feladata:

17. Egy paralelogramma oldalai 3 cm és 5 cm, közbezárt szögük 52°. Milyen hosszúak az átlói?

Megoldás:



A rövidebbik átlóját jelöljük e-vel.

A paralelogramma oldalai $a = 3$ cm és $b = 5$ cm, közbezárt szögük $\alpha = 52°$.

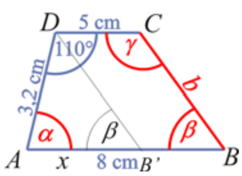
$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \approx 15{,}53 \Rightarrow e \approx 3{,}94$

$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \approx 52{,}47 \Rightarrow f \approx 7{,}24$

A paralelogramma átlói 3,94 cm és 7,24 cm hosszúak.

18. Egy trapéz alapjai 5 és 8 cm hosszúak. Az egyik szára 3,2 cm. Ez a szár a rövidebbik alappal 110°-os szöget zár be. Mekkora a trapéz másik szára és az ismeretlen szöge?

Megoldás:



A D csúcson keresztül párhuzamost húzunk a BC szárral (B' pont); $DB' = b$.

Terv:

1. ADB' háromszög α szögének és AB' oldalának meghatározása
2. Koszinusztétellel a $B'D$ oldal kiszámítása
3. A β szög kiszámítása szinusztétellel; a trapéz negyedik szögének meghatározása

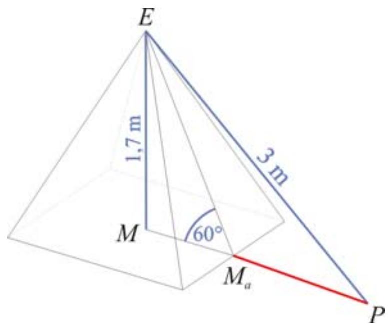
Számítás:

1. $AB' = x = 8 - 5 = 3$; $AD = 3{,}2$; $\alpha = 180° - 110° = 70°$.
2. $b^2 = x^2 + d^2 - 2xd\cos\alpha = 3^2 + 3{,}2^2 - 2\cdot 3\cdot 3{,}2\cdot\cos 70° \approx 12{,}7 \Rightarrow b \approx 3{,}56$.
3. $\dfrac{\sin\beta}{\sin 70°} = \dfrac{3{,}2}{3{,}56} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 57°$, a másik megoldás nem lehetséges, mert a háromszög hegyesszögű. $\gamma = 180° - 57° = 123°$.

A trapéz másik szára 3,56 cm hosszú, ismeretlen szögei 70°; 57° és 123°-osak.

„D" jelűek feladata:

19. Egy szabályos négyoldalú gúla alakú sátor magassága 1,7 m, oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. Rögzítéséhez 3 m hosszú zsinórokat használunk. A sátort az alaplap oldalfelezői mentén rögzítjük (az ábrán csak az egyik rögzítési pont, *P* látható). Milyen messze van a sátor aljától a rögzítési pont?



Első megoldás:

A sátor oldallapjai egyenlőszárú háromszögek. Az oldallapok magasságvonala az alaplappal 60°-os szöget zár be. Egy ilyen magasságvonal talppontját jelöljük M_a-val, a gúla magasságának talppontját *M*-mel, csúcsát *E*-vel, a rögzítési pontot *P*-vel. Keressük az M_aP távolságot.

Terv:

1. Oldallap magasságának kiszámítása szinusz szögfüggvénnyel
2. PM_aE szög meghatározása
3. A keresett távolság kiszámítása koszinusztétellel

Számítás:

1. Az M_aME derékszögű háromszögben szögfüggvénnyel kiszámítjuk az $EM_a = m_a$ távolságot. $\sin 60° = \dfrac{1{,}7}{m_a} \quad\Rightarrow\quad m_a = 1{,}96\,(\mathrm{m})$.
2. A PM_aE szög kiegészítő szöge 60°, ezért a PM_aE szög 120°.
3. A PM_aE háromszögben koszinusztétel alkalmazásával kapjuk meg a keresett távolságot.

$3^2 = 1{,}96^2 + PM_a^2 - 2\cdot 1{,}96\cdot PM_a\cdot\cos 120°$

$0 = PM_a^2 + 1{,}96\cdot PM_a^2 - 5{,}2$

$PM_a \approx 1{,}5$

A rögzítési pont a sátor aljától kb. 1,5 méterre van.

Második megoldás:

Terv:

1. MM_aE derékszögű háromszögből MM_a kiszámítása tangens szögfüggvénnyel
2. MPE derékszögű háromszögben MP kiszámítása Pitagorasz-tétellel
3. M_aP hosszának kiszámítása

Számítás:

1. $MM_a = \dfrac{MP}{tg 60°} \quad \Rightarrow \quad MM_a \approx 0{,}98\,(\text{m})$
2. $MP = \sqrt{EP^2 - EM^2} \quad \Rightarrow \quad MP \approx 2{,}47\,(\text{m}).$
3. $M_aP = MP - MM_a \approx 1{,}49$.

A rögzítési pont a sátor aljától kb. 1,5 méterre van.

III. Vegyes feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok megoldásához az ellenőrzés párban módszert javasoljuk. Ajánlás: 21 és 22, illetve 24 és 26 feladatok órai munkára, a többi házi feladatnak.

Feladatok

20. Egy háromszög kerülete 114 egység. Két szöge 54° és 59°. Milyen hosszúak az oldalai?

Megoldás:

Terv:

1. Háromszög harmadik szögének kiszámítása
2. Szinusztétel alkalmazása: Két oldal kifejezése a harmadik oldal segítségével
3. Behelyettesítés a kerületképletbe, a kiválasztott oldal kiszámítása
4. A másik két oldal kiszámítása

Számítás:

1. $\alpha = 54°$; $\beta = 59°$; $\gamma = 180° - 54° - 59° = 67°$.
2. A szinusztétel felhasználásával kifejezünk 2 oldalt a 3. oldal segítségével:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} \approx 0{,}944b,$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow c = \frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} \approx 1{,}074b.$$

3. $K = a + b + c \quad \Rightarrow \quad 114 = 0{,}944b + 1{,}074b + b \Rightarrow b \approx 37{,}8$
4. $c = 1{,}07b = 40{,}6; \quad a = K - (b + c) = 35{,}6$

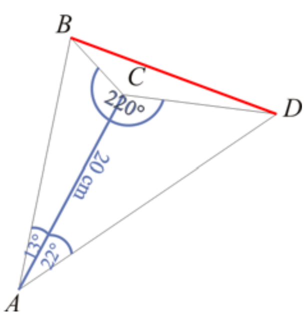
A háromszög oldalai 37,8 egység, 40,6 egység és 35,6 egység hosszúak.

21. Egy konkáv négyszög belső átlója 20 cm. Az átló az egyik szöget 13° és 22°-os részekre osztja, a 220°-os homorú szöget pedig felezi.

a) Mekkora a négyszög területe?

b) Milyen hosszú a másik átló?

Megoldás:



Ismerjük az *ABCD* konkáv négyszög $AC = e$ átlóját (20 cm). Az e átló az α szöget $\alpha_1 = 13°$ és $\alpha_2 = 22°$ részekre osztja,

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 35°$. A *C* csúcsnál lévő szög $\gamma = 220°$, amit az *e* átló felez.

a) Kiszámítandó a négyszög területe: $T = T_{ABC} + T_{ACD}$.

Terv:

1. *ADC* szög meghatározása
2. *Az ACD* háromszög *AD* oldalának kiszámítása szinusztétellel
3. *ACD* háromszög területének kiszámítása
4. 1.–3. lépések végrehajtása az *ABC* háromszögre
5. A négyszög területének kiszámítása

Számítás:

Az *ACD* háromszögnek ismerjük két szögét, így a harmadikat is, valamint egyik oldalát. A $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképlet alkalmazásához szükségünk van még egy oldalra.

Szinusztétellel kiszámítjuk például az *AD* oldalt.

1. Az *e* átlóval szemben lévő szög $\delta = 180° - 110° - 22° = 48°$.

2. $\frac{\sin 110°}{\sin 48°} = \frac{AD}{20} \quad \Rightarrow \quad AD \approx 25{,}3$

3. $T_{ACD} = \frac{20 \cdot 25{,}3 \cdot \sin 22°}{2} \approx 94{,}8\,(\text{cm}^2)$

4. Az *ABC* háromszög területének kiszámításakor a négyszögnek már három belső szögét ismerjük. A negyedik, β szög kiszámításához felhasználjuk, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°: $\beta = 360° - 220° - 48° - 35° = 57°$.

   Az *AB* oldalt szintén a szinusztétel alkalmazásával határozzuk meg.

   $\frac{\sin 110°}{\sin 57°} = \frac{AB}{20} \quad \Rightarrow \quad AB \approx 22{,}4$

   $T_{ABC} = \frac{20 \cdot 22{,}4 \cdot \sin 13°}{2} \approx 50{,}4\ (\text{cm}^2)$

5. $T = T_{ABC} + T_{ACD} \approx 50{,}4 + 94{,}8 \approx 145{,}2$

A négyszög területe 145,2 cm^2.

b) A *DB* átlót az *ADB* háromszögből koszinusztétellel határozzuk meg. Az előző feladatban már kiszámítottuk az *AD* és az *AB* oldalak hosszát, és ismerjük a két oldal által közbezárt szöget.

$DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos\alpha = 25{,}3^2 + 22{,}4^2 - 2 \cdot 25{,}3 \cdot 22{,}4 \cdot \cos 35° \approx 213{,}39$

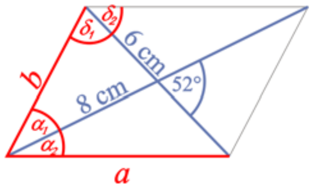
$DB = 14{,}6$

A másik átló hossza 14,6 cm.

22. Egy paralelogramma átlói 6 cm és 8 cm hosszúak. Közbezárt szögük 52°. Milyen hosszúak a paralelogramma oldalai, és az átlók mekkora részekre osztják a szögeket?

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást, valamint a $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ összefüggést.



Terv:

1. Koszinusztétellel kiszámoljuk az a és b oldalakat
2. Koszinusztétellel meghatározzuk a paralelogramma α szögét
3. Szinusztétellel kiszámítjuk α_1-et, majd kivonással α_2-t
4. Kivonással meghatározzuk δ-t, majd δ_1-et és δ_2-t

Számítás:

1. $a^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 52° = 39{,}8 \quad \Rightarrow \quad a \approx 6{,}3$

   $b^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 52° = 10{,}2 \quad \Rightarrow \quad b \approx 3{,}2$

2. $6^2 = 6{,}3^2 + 3{,}2^2 - 2 \cdot 6{,}3 \cdot 3{,}2 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \approx 0{,}3455 \Rightarrow \alpha \approx 69{,}8°$

3. $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin 52°} = \dfrac{3}{3{,}2} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_1 \approx 0{,}7388 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 47{,}6°\,;\ \alpha_2 \approx 22{,}2°$

4. $\delta = 180° - \alpha = 110{,}2°$

   $\delta_1 = 180° - 52° - 47{,}6° \approx 80{,}4° \quad \Rightarrow \quad \delta_2 \approx 110{,}2° - 80{,}4° \approx 29{,}8°$

A paralelogramma oldalai 6,3 cm és 3,2 cm hosszúak.

A 8 cm-es átló az α szöget 47,6°-os és 22,2°-os részekre osztja.

A 6 cm-es átló a δ szöget 80,4°-os és 29,8°-os részekre osztja.

23. Egy háromszög egyik oldala 10 cm, a másik két oldal különbsége 3 cm hosszú. A 10 cm-es oldallal szemben lévő szög 108°. Milyen hosszúak a háromszög oldalai és szögei?

Megoldás:

Jelöljük az oldalakat: $a = 10$ cm; b; c; $\alpha = 108°$.

Terv:

1. c oldal kifejezése b oldallal

2. b oldal kiszámítása koszinusztétellel

3. β kiszámítása szinusztétellel, majd γ meghatározása kivonással

Számítás:

1. $c = b + 3$

2. Koszinusztétellel kiszámítjuk b-t: $a^2 = b^2 + (b + 3)^2 - 2b(b + 3)\cos\alpha$.

$$0 = 2{,}62\, b^2 + 7{,}85\, b - 91 \quad \Rightarrow \quad b \approx 4{,}6 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad c \approx 7{,}6$$

3. Csak a hegyesszögű megoldás lehetséges, hiszen a háromszög tompaszögű.

$$\frac{\sin\beta}{\sin 108°} = \frac{4{,}6}{10} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 26°;\ \gamma \approx 46°$$

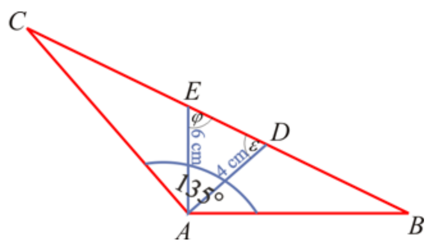
A háromszög két oldala 5,2 cm és 8,2 cm hosszú, szögei 26° és 46°.

24. Egy háromszög egyik szöge 135°. Az ebből a csúcsból kiinduló 4 és 6 cm hosszú szakaszok ezt a szöget három egyenlő részre osztják. A szakaszok a szöggel szemközti oldal D illetve E pontjaiban végződnek. Mekkora a háromszög kerülete?

Megoldás:

Az ADE háromszögben ismerjük az EAD szöget, ami 45°, továbbá két oldalát.

Terv:



1. Koszinusztétellel kiszámítjuk a DE oldalt
2. Szinusztétellel kiszámítjuk az ADE szöget
3. DEA szög meghatározása
4. BA meghatározása tangens szögfüggvénnyel a BEA derékszögű háromszögből
5. AC meghatározása tangens szögfüggvénnyel az ADC derékszögű háromszögből
6. BC kiszámítása az ABC háromszögből koszinusztétellel
7. A háromszög kerületének kiszámítása

Számítás:

1. $DE^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot6\cdot4\cdot\cos45° \approx 18 \quad \Rightarrow \quad DE \approx 4{,}25$ cm.

2. AED szöget jelöljük φ-vel, az ADE szöget pedig ε-nal.

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin 45°} = \frac{6}{4{,}25}$$

$\sin\varepsilon \approx 0{,}9983 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 86{,}63°$. A másik érték nem megoldás, mert az ε az ADC derékszögű háromszögnek is belső szöge, vagyis nem lehet nagyobb 90°-nál.

3. $\varphi \approx 180° - 86{,}63° - 45° \approx 48{,}37°$

4. $tg\varepsilon = \dfrac{AC}{AD} \quad \Rightarrow \quad AC \approx 67{,}93$

5. $tg\varphi = \dfrac{AB}{AE} \quad \Rightarrow \quad AB \approx 6{,}75$

6. $BC^2 = 6{,}75^2 + 67{,}93^2 - 2 \cdot 6{,}75 \cdot 67{,}93 \cdot \cos 135° \approx\ 5308{,}5 \quad \Rightarrow \quad BC \approx 72{,}86$

7. $K = 72{,}86 + 6{,}75 + 67{,}93 \approx 14{,}8$

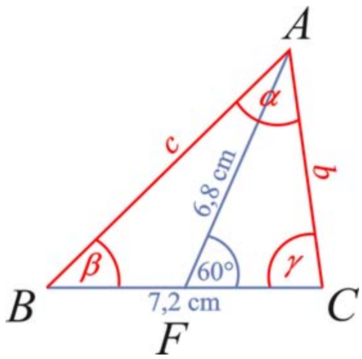
A háromszög kerülete 148 cm.

25. Egy háromszögben az egyik oldalhoz tartozó súlyvonal 6,8 cm, az oldal 7,2 cm hosszú. A súlyvonal az oldallal 60°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

Megoldás:

a = 7,2 cm; s_a = 6,8 cm, AFC szög 60°.

Terv:



1. Koszinusztétellel kiszámítjuk b és c oldalakat
2. Koszinusztétellel kiszámítjuk a legnagyobb oldallal szemközti szöget
3. Szinusztétellel meghatározzuk β szöget
4. α szög kiszámítása

Számítás:

1. $b^2 = 3{,}6^2 + 6{,}8^2 - 2 \cdot 6{,}8 \cdot 3{,}6 \cdot \cos 60° \approx 34{,}72 \quad \Rightarrow \quad \approx 5{,}9$

   $c^2 = 3{,}6^2 + 6{,}8^2 + 2 \cdot 6{,}8 \cdot 3{,}6 \cdot \cos 60° \approx 83{,}68 \quad \Rightarrow \quad c \approx 9{,}1$

2. $9{,}1^2 = 7{,}2^2 + 5{,}9^2 - 2 \cdot 7{,}2 \cdot 5{,}9 \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 87{,}4°$

3. $\dfrac{\sin\beta}{\sin 87{,}4°} = \dfrac{5{,}9}{9{,}1} \quad \Rightarrow \quad \beta = 40{,}4°$, a tompaszög nem megoldás, mert a háromszög legnagyobb szöge 87,4°.

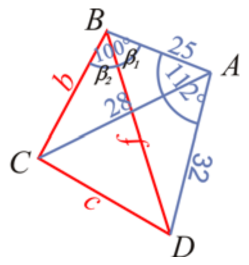
4. $\alpha = 180° - 87{,}4° - 40{,}4° = 52{,}2°$

A háromszög oldalai 5,9 cm és 9,1 cm hosszúak, szögei 87,4°; 40,4° és 52,2°.

26. Egy négyszögben $AB = a = 25$ egység; $AD = d = 32$ egység és $AC = e = 28$ egység. Két szöge $\beta = 100°$ és $\alpha = 112°$. Milyen hosszúak a négyszög oldalai és a másik átlója?

Megoldás:

Terv:



1. Koszinusztétellel kiszámítjuk a másik átlót
2. Koszinusztétellel kiszámítjuk a $BC = b$ oldalt
3. β szög felbontása két részre (szinusztétel)
4. Koszinusztétellel kiszámítjuk c oldalt

Számítás:

1. $f^2 = 25^2 + 32^2 - 2\cdot25\cdot32\cdot\cos 112° \approx 2248{,}4 \quad\Rightarrow\quad f \approx 47{,}4$

2. $28^2 = 25^2 + b^2 - 2\cdot25\cdot b\cdot\cos100° \quad\Rightarrow\quad 0 = b^2 + 8{,}68b - 159 \quad\Rightarrow\quad b \approx 9{,}0$

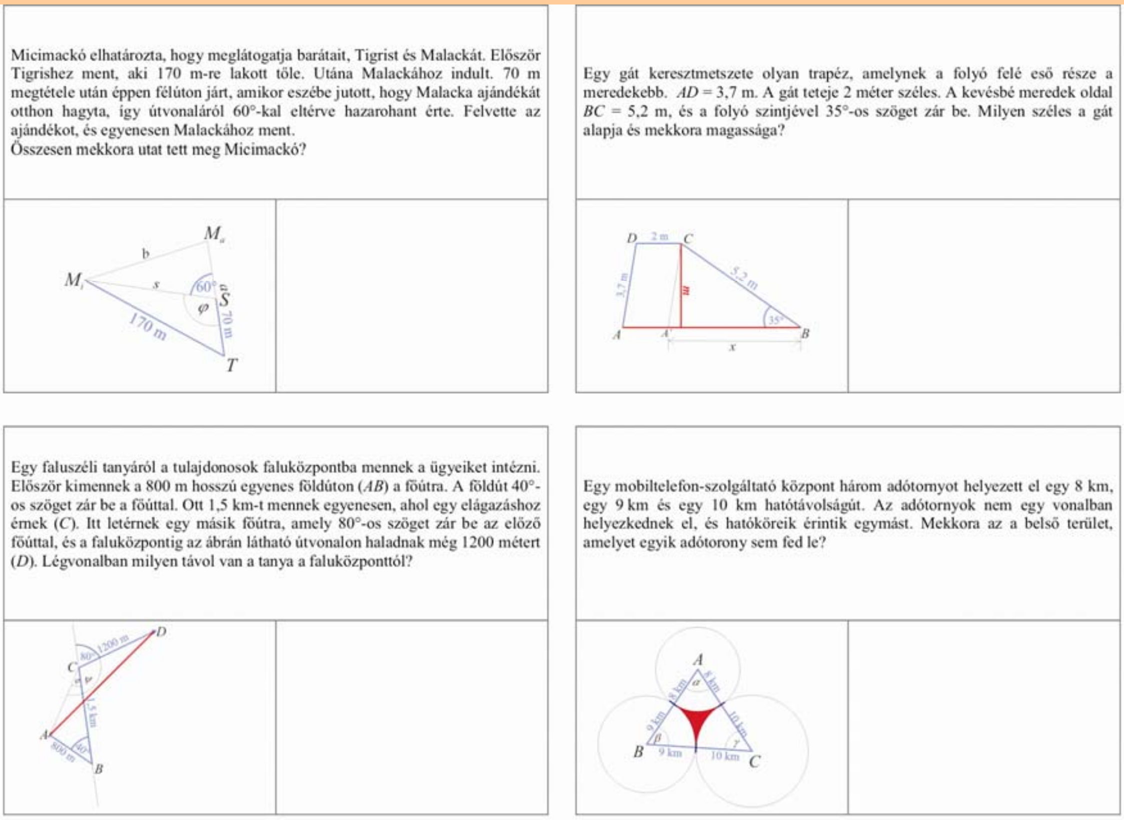
3. Az f átló a β szöget két részre osztja. Szinusztétellel kiszámítjuk az $ABD = \beta_1$ szö-

   get: $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin 112°} = \dfrac{32}{47{,}4} \quad\Rightarrow\quad \beta_1 \approx 38{,}8°;\ \beta_2 \approx 61{,}2°$.

4. $c^2 = 47{,}4^2 + 9^2 - 2\cdot9\cdot47{,}4\cdot\cos 61{,}2° \quad\Rightarrow\quad c \approx 43{,}8$ egység.

A négyszög oldalai 9,0 egység és 43,8 egység hosszúak, a másik átlója pedig 47,4 egység.

9.2. kártyakészlet alkalmazása



Micimackó elhatározta, hogy meglátogatja barátait, Tigrist és Malackát. Először Tigrishez ment, aki 170 m-re lakott tőle. Utána Malackához indult. 70 m megtétele után éppen félúton járt, amikor eszébe jutott, hogy Malacka ajándékát otthon hagyta, így útvonaláról 60°-kal eltérve hazarohant érte. Felvette az ajándékot, és egyenesen Malackához ment.
Összesen mekkora utat tett meg Micimackó?

Egy gát keresztmetszete olyan trapéz, amelynek a folyó felé eső része a meredekebb. $AD = 3{,}7$ m. A gát teteje 2 méter széles. A kevésbé meredek oldal $BC = 5{,}2$ m, és a folyó szintjével 35°-os szöget zár be. Milyen széles a gát alapja és mekkora magassága?

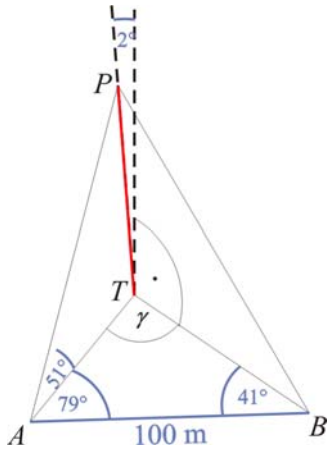
Egy faluszéli tanyáról a tulajdonosok faluközpontba mennek a ügyeiket intézni. Először kimennek a 800 m hosszú egyenes földúton (AB) a főútra. A földút 40°-os szöget zár be a főúttal. Ott 1,5 km-t mennek egyenesen, ahol egy elágazáshoz érnek (C). Itt letérnek egy másik főútra, amely 80°-os szöget zár be az előző főúttal, és a faluközpontig az ábrán látható útvonalon haladnak még 1200 métert (D). Légvonalban milyen távol van a tanya a faluközponttól?

Egy mobiltelefon-szolgáltató központ három adótornyot helyezett el egy 8 km, egy 9 km és egy 10 km hatótávolságút. Az adótornyok nem egy vonalban helyezkednek el, és hatóköreik érintik egymást. Mekkora az a belső terület, amelyet egyik adótorony sem fed le?

Módszertani megjegyzés: A tanulók legfeljebb négy fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak odaadja az 9.2. kártyakészletet, melyben 8 kártya található. Négy kártyán

szöveg, négy kártyán ábra szerepel. (28, 29, 30, 32 feladatok) Feladatuk a szövegek és az ábrák (a szövegnek megfelelő matematikai modellek) párosítása. Mindenki kiválaszt magának egy ilyen párost. Akik ugyanazt a feladatot választották, csoportjukból kiválva közösen öszszeülnek, és megoldják a feladatot. Majd visszamennek eredeti csoportjukhoz, és elmagyarázzák a többieknek a megoldást. Végül a tanár kihív 4 tanulót a táblához, akik felírják a megoldást.
Ezek után a hasonló képességű tanulók párokban gyakorolnak tovább.

27. Egy bontásra váró gyárkémény „magasságát” szeretnénk lemérni, de sajnos építési területen van, így nem férünk a közelébe. A gyárkémény 2°-kal megdőlt. Két, egymástól 100 méterre lévő *A* és *B* pontból végzünk méréseket. Jelöljük *T*-vel a kémény alját jelző pontot, és *P*-vel a kémény tetejét. Az *A* pontból a kémény látószöge (*TAP* szög) 51°. Megmérjük még az *A* pontból a *BT* szakasz látószögét (*TAB* szög) 79°, valamint a *B* pontból az *AT* szakasz látószögét (*ABT* szög) 41°. Milyen magas a kémény?



Megoldás:

Terv:

1. Az *ATB* háromszögben kiszámítjuk a *T* csúcsnál levő szöget
2. Szinusztétellel meghatározzuk az *AT* oldalt
3. Kiszámoljuk az *ATP* háromszögben a *P* csúcsnál lévő szöget
4. Szinusztétellel meghatározzuk a *PT* távolságot

Számítás:

1. $\gamma = 180° - 79° - 41° = 60°$

2. $\dfrac{AT}{100} = \dfrac{\sin 41°}{\sin 60°} \quad \Rightarrow \quad AT \approx 75{,}8$

3. *ATP* szög 88°. A *TPA* szög 180° – 88° – 51° = 41°.

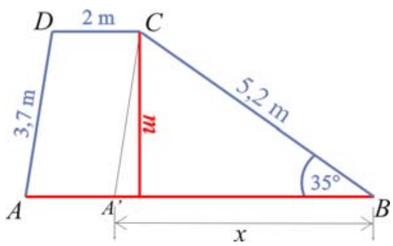
4. $\dfrac{TP}{75{,}8} = \dfrac{\sin 51°}{\sin 41°} \quad \Rightarrow \quad TP \approx 89{,}8$

A kémény kb. 90 méter magas.

28. Egy gát keresztmetszete olyan trapéz, amelynek a folyó felé eső része a meredekebb. *AD* = 3,7 m. A gát teteje 2 méter széles. A kevésbé meredek oldal *BC* = 5,2 m, és a folyó szintjével 35°-os szöget zár be. Milyen széles a gát alapja és mekkora magassága?

Első megoldás:

Terv:



1. Párhuzamost húzunk a *C* csúcson keresztül az *AD* oldallal. (*A'* pont)
2. Az *A'BC* háromszögben koszinusztétellel kiszámítjuk az *A'B* oldalt
3. *AB* = *CD* + *A'B*
4. Az *A'BC* háromszög magasságának a kiszámítása szinusz szögfüggvénnyel

Számítás:

2. $3{,}7^2 = x^2 + 5{,}2^2 - 2 \cdot x \cdot 5{,}2 \cdot \cos 35° \Rightarrow 0 = x^2 - 8{,}52x + 13{,}35 \Rightarrow x_1 = 6{,}4;\ x_2 = 2{,}1$
3. I. $AB = 2 + 6{,}4 = 8{,}4$; II. $AB = 2 + 2{,}1 = 4{,}1$

   Itt két oldal és a kisebbikkel szemközti szög adott, de *C*-ből csak egy párhuzamos húzható *AD*-vel és *CA'B* hegyesszög kell, hogy legyen. II. ezért nem jó.
4. $m = 5{,}2 \sin 35° \approx 2{,}98$

A magassága kb. 3 m, alapjának szélessége kb. 8,4 m.

Második megoldás:

Terv:

1. Magasság meghatározása szinusz szögfüggvénnyel
2. Mivel *DAB* szög hegyesszög és *DA* || *CA'*, így *CA'B* szög is hegyesszög, tehát *T* az *A'B* szakaszon van.
3. *A'T* kiszámítása Pitagorasz-tétellel
4. *TB* kiszámítása Pitagorasz-tétellel
5. *A'B* = *A'T* + *TB*
6. *AB* = 2 + *A'B*

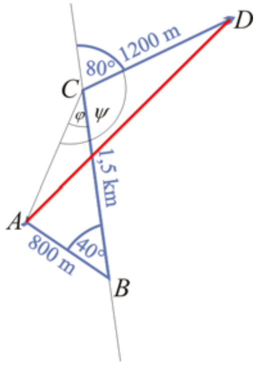
Számítás:

1. $m = 5{,}2 \cdot \sin 35° \approx 2{,}98$
3. $A'T \approx \sqrt{3{,}7^2 - 2{,}98^2} \approx 2{,}19$
4. $TB \approx \sqrt{5{,}2^2 - 2{,}98^2} \approx 4{,}26$
5. $A'B \approx 6{,}45$

6. $AB \approx 8{,}45$

A magassága kb. 3 m, alapjának szélessége kb. 8,4 m.

29. Egy faluszéli tanyáról a tulajdonosok faluközpontba mennek a ügyeiket intézni. Először kimennek a 800 m hosszú egyenes földúton (AB) a főútra. A földút 40°-os szöget zár be a főúttal. Ott 1,5 km-t mennek egyenesen, ahol egy elágazáshoz érnek (C). Itt letérnek egy másik főútra, amely 80°-os szöget zár be az előző főúttal, és a faluközpontig az ábrán látható útvonalon haladnak még 1200 métert (D). Légvonalban milyen távol van a tanya a faluközponttól?



Megoldás:

A: tanya; B: földút és főút találkozása; C-ben elágazik; D faluközpont

Terv:

1. Koszinusztétellel AC kiszámítása az ABC háromszögből
2. Szinusztétellel BCA szög kiszámítása az ABC háromszögből
3. DCA szög meghatározása ($\varphi + \psi$)
4. Koszinusztétellel AD kiszámítása az ACD háromszögből

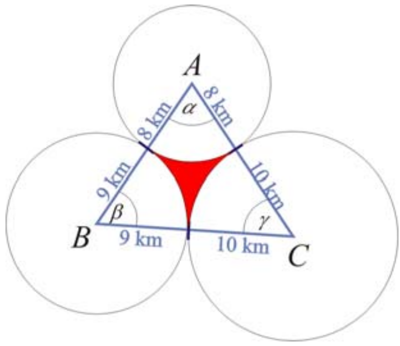
Számítás:

1. $AC^2 = 800^2 + 1500^2 - 2\cdot 800\cdot 1500\cdot \cos 40° \quad \Rightarrow \quad AC \approx 1025$
2. $\dfrac{\sin\varphi}{\sin 40°} = \dfrac{800}{1025} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 20{,}0°$ A másik szög (tompaszög) nem megoldás, mivel a legnagyobb oldallal szemben van a legnagyobb szög.
3. DCA szög $\psi = 20{,}0° + (180° - 80°) \approx 120{,}0°$
4. $AD^2 = 1025^2 + 1200^2 - 2\cdot 1025\cdot 1200\cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad AD \approx 1123$

A tanya a faluközponttól kb. 1120 méterre van.

30. Egy mobiltelefon-szolgáltató központ három adótornyot helyezett el egy 8 km, egy 9 km és egy 10 km hatótávolságút. Az adótornyok nem egy vonalban helyezkednek el, és hatóköreik érintik egymást. Mekkora az a belső terület, amelyet egyik adótorony sem fed le?

Megoldás:



Az adótornyok helyeit rendre az A, B és C pontok jelölik.

$AB = 8 + 9 = 17$; $BC = 9 + 10 = 19$; $CA = 10 + 8 = 18$

Terv:

1. Kiszámítjuk a háromszög szögeit koszinusz- majd szinusztétellel
2. Kiszámítjuk az egyes körcikkek területét
3. Kiszámítjuk a háromszög területét
4. A háromszög területéből kivonjuk a körcikkek területösszegét

Számítás:

1. Koszinusztétellel a legnagyobb szög meghatározása:

$19^2 = 18^2 + 17^2 - 2\cdot 18\cdot 17\cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65{,}68°.$

Szinusztétellel egy másik szög meghatározása: $\dfrac{\sin\beta}{\sin 65{,}68°} = \dfrac{18}{19} \quad \Rightarrow \quad \beta = 59{,}69°,$

$\gamma = 180° - 59{,}69° - 65{,}68° = 54{,}63°.$

2. A körcikkek területei:

Az α középponti szögű körcikk területe: $t_\alpha = \dfrac{8^2\pi\cdot 65{,}68°}{360°} \approx 36{,}68\ (\text{km}^2).$

Az β középponti szögű körcikk területe: $t_\beta = \dfrac{9^2\pi\cdot 59{,}69°}{360°} \approx 42{,}19\ (\text{km}^2).$

Az γ középponti szögű körcikk területe: $t_\gamma = \dfrac{10^2\pi\cdot 54{,}63°}{360°} \approx 47{,}67\ (\text{km}^2).$

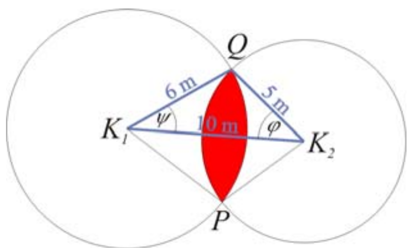
3. A háromszög területe: $T = \dfrac{18\cdot 17\cdot \sin 65{,}69°}{2} \approx 139{,}43\ (\text{km}^2).$

4. A keresett terület: $139{,}43 - (47{,}67 + 42{,}19 + 36{,}68) = 12{,}89$.

Kb. 13 km^2 nagyságú területet nem fed le egyetlen adótorony sem.

31. Két öntözőberendezés egymástól mért távolsága 10 m. Hatósugaruk 6 és 5 m. Mekkora annak a területnek a nagysága, amelyet mindkét berendezés meg tud locsolni?

Megoldás:



K_1 a 6 m sugarú kör középpontja, K_2 az 5 m sugarú köré.

A két kör közös pontjai P és Q .

A mindkét locsoló által lefedett terület a K_1PQ és a K_2PQ körcikkek területének közös része, ami két körszelet területének az összege.

Terv:

1. Koszinusztétellel kiszámítjuk a K_1K_2Q és K_2K_1Q szögeket
2. Kiszámítjuk az PK_1Q és PK_2Q középponti szögeket szinusztétellel
3. Meghatározzuk a körcikkek területét
4. Meghatározzuk K_2PQ és a K_1PQ háromszögek területét
5. A körszelet területét megkapjuk, ha a körcikk területéből kivonjuk a háromszög területét
6. Kiszámítjuk a körszeletek területösszegét

Számítás:

1. $6^2 = 5^2 + 10^2 - 2\cdot5\cdot10\cdot\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 27{,}1°$

   $5^2 = 6^2 + 10^2 - 2\cdot6\cdot10\cdot\cos\psi \quad\Rightarrow\quad \psi \approx 22{,}3°$

2. A PK_1Q középponti szög: $2\psi \approx 44{,}6°$.

   A PK_2Q középponti szög: $2\varphi \approx 54{,}2°$.

3. A K_1PQ körcikk területe: $\dfrac{6^2\pi\cdot 44{,}6}{360} \approx 14{,}0$.

   A K_2PQ körcikk területe: $\dfrac{5^2\pi\cdot 54{,}2}{360} \approx 11{,}8$.

4. $T(K_1PQ\Delta) \approx \dfrac{6^2\cdot\sin 44{,}6°}{2} \approx 12{,}6; \qquad T(K_2PQ\Delta) \approx \dfrac{5^2\cdot\sin 54{,}2°}{2} \approx 10{,}1$

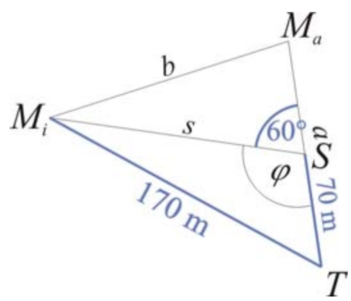
5. A két körszelet területe: $\approx 1{,}4\ \mathrm{m}^2$, illetve $1{,}7\mathrm{m}^2$.

6. Mindkét berendezés egyidejűleg $3{,}1\ \mathrm{m}^2$ területet tud meglocsolni.

32. Micimackó elhatározta, hogy meglátogatja barátait, Tigrist és Malackát. Először Tigrishez ment, aki 170 m-re lakott tőle. Utána Malackához indult. 70 m megtétele után éppen félúton járt, amikor eszébe jutott, hogy Malacka ajándékát otthon hagyta, így útvonaláról 60°-kal eltérve hazarohant érte. Felvette az ajándékot, és egyenesen Malackához ment. Összesen mekkora utat tett meg Micimackó?

Első megoldás:

Micimackó, Tigris és Malacka lakóhelyét jelöljük rendre M_i-val, T-vel és M_a-vel. A letérés pontját pedig jelezze S.



Terv:

1. Meghatározzuk az TSM_i szöget, majd koszinusztétellel kiszámoljuk az M_iTS háromszög M_iS oldalát
2. Újabb koszinusztétellel kiszámítjuk az SM_aM_i háromszög M_aM_i oldalát
3. Összegezzük a megtett négy utat

Számítás:

1. TSM_i szög $\varphi = 180° - 60° = 120°$. $M_iT = c = 170$ m; $TS = SM_a = a/2 = 70$

   $170^2 = 70^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot 70 \cdot \cos 120° \Rightarrow 0 = s^2 + 70s - 24000 \Rightarrow s \approx 124$
2. $b^2 = 124^2 + 70^2 - 2 \cdot 124 \cdot 70 \cdot \cos 60° \Rightarrow b \approx 108$
3. 170 m + 70 m + 124 m + 108 m = 472

Micimackó összesen 472 m-t gyalogolt.

Második megoldás:

Terv:

1. φ kiszámítása
2. $\delta = SM_iT$ szög meghatározása szinusztétellel
3. $\varepsilon = M_iTM_a$ szög kiszámítása
4. s kiszámítása szinusztétellel
5. b kiszámítása koszinusztétellel
6. Összegezzük a megtett négy utat.

Számítás:

1. $\varphi = 180° - 60° = 120°$
2. $\delta = SM_iT$ szög hegyesszög, mert φ tompaszög.

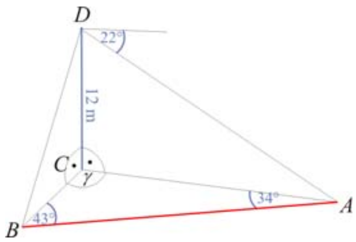
   $$\frac{\sin\delta}{\sin 120°} = \frac{70}{170} \Rightarrow \delta \approx 20{,}9°$$
3. $\varepsilon = M_iTM_a$ szög $\approx 180° - 20{,}9° - 120° \Rightarrow \varepsilon \approx 39{,}1°$
4. $\frac{s}{170} = \frac{\sin 39{,}1°}{\sin 120°} \Rightarrow s \approx 124$ m
5. $b^2 = 124^2 + 70^2 - 2 \cdot 124 \cdot 70 \cdot \cos 60° \Rightarrow b \approx 108$ m
6. Micimackó összesen (170 + 70 + 124 + 108 =) 472 métert gyalogolt.

33. Egy mocsaras területen két kis sziget egy-egy kiemelt pontja A és B található. AB távolság közvetlenül nem mérhető, viszont tudjuk, hogy a mocsár szélén lévő 12 méter magas CD kilátó tetejéből (D pontból) a sziget A pontja 22°-os depressziószögben látszik. Továbbá mérhetők a CAB és a CBA szögek: 34°és 43°. Milyen távol van egymástól a két sziget kiemelt pontja?

Megoldás:

Terv:

1. Az ACD háromszögből AC meghatározása tangens szögfüggvénnyel
2. Az ABC háromszög harmadik szögének meghatározása
3. Szinusztétellel az AB oldal kiszámítása



Számítás:

1. ADC szög: $90° - 22° = 68°$, $\text{tg}68° = \dfrac{AC}{12} \quad \Rightarrow \quad AC \approx 29{,}7$

2. Az ABC háromszög harmadik szöge: $\gamma = 180° - 34° - 43° = 103°$.

3. $\dfrac{\sin 103°}{\sin 43°} = \dfrac{AB}{29{,}7} \quad \Rightarrow \quad AB \approx 42{,}4$

A két sziget kiemelt pontja közötti távolság kb. 42 m.

34. Egy nyugat felé induló motorcsónakról két, egymástól 5 km távolságra lévő viharjelző északra irányuló egyenesben látszik. Fél óra múlva az egyik északkeleti, a másik kelet-északkeleti irányban látszik. Mekkora sebességgel halad a csónak?

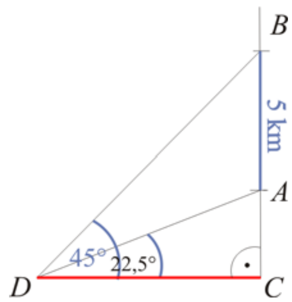
Megoldás:

A két világító torony helyét az A és a B pontok jelölik. A csónak az első pillanatban C, fél órával később a D pontban volt.

Északkeleti irány = CDB szög = 45°,

Kelet-északkeleti irány = CDA szög = 22,5°.

Keressük a DC távolságot, és a csónak sebességét.



Terv:

1. DAB szög kiszámítása
2. Az ADB háromszögben szinusztétellel kiszámítjuk a BD oldalt.
3. A CDB egyenlő szárú derékszögű háromszögben DB ismeretében kiszámítjuk a CD oldalt.
4. Meghatározzuk a csónak sebességét.

Számítás:

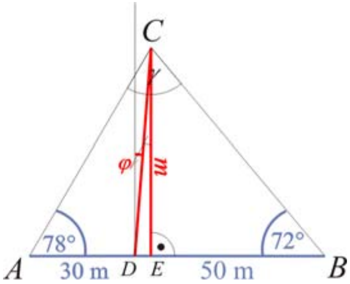
1. BAD szög az ABC háromszög külső szöge. BAD szög = 90° + 22,5° = 112,5°.

2. $\dfrac{\sin 112{,}5°}{\sin 22{,}5°} = \dfrac{DB}{5} \quad \Rightarrow \quad DB \approx 12\,(\text{km})$

3. $12 \approx CD \cdot \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad CD \approx 8{,}5\ \ (\text{km})$

4. $v = \dfrac{8{,}5}{0{,}5} \approx 17$

A csónak kb. 17 km/h sebességgel halad.



35. Egy ferde torony csúcsa a torony hajlásának irányában az aljától 50 méterre 72°-os emelkedési szögben látszik, az ellenkező irányba 30 métert haladva pedig 78°-os szögben látszik.

a) Milyen magasan volt eredetileg a torony csúcsa a földtől?

b) Milyen magasan van a torony csúcsa a földtől, miután az megdőlt? Hány fokos a dőlési szöge?

Megoldás:

Az ABC háromszög AB oldala 80 m, a rajta fekvő két szög $\alpha = 78°$ és $\beta = 72°$.

Az a oldalhoz tartozó magasság talppontja E, a torony talppontja D.

$AD = 30$ m; $DB = 50$ m.

A harmadik szög: $\gamma = 30°$.

a) **Terv**:

1. Szinusztétellel kiszámoljuk a háromszög AC oldalát
2. Koszinusztétellel meghatározzuk a DC szakasz hosszát a DAC háromszögből

Számítás:

1. $\dfrac{AC}{80} = \dfrac{\sin 72°}{\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad AC \approx 152{,}2$

2. $DC^2 = 152{,}2^2 + 30^2 - 2 \cdot 152{,}2 \cdot 30 \cdot \cos 78° \quad \Rightarrow \quad DC \approx 148{,}9$

A torony csúcsa kb. 148,9 méterre volt a földtől, mielőtt az megdőlt.

b) **Terv**:

1. Az ABC háromszög magasságának kiszámítása területképletek segítségével. (függvénytáblázat!)

2. Az EDC derékszögű háromszögből DCE szög kiszámítása koszinuszfüggvénnyel. Ez a szög egyben a keresett dőlésszög is, mivel ez és φ váltószögek.

Számítás:

1. Magasság kiszámítása kétféle területképlet alkalmazásával (függvénytáblázat!):

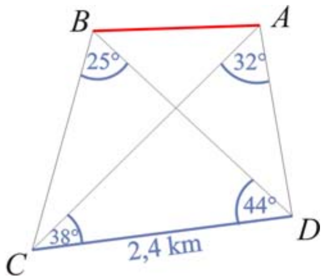
$$\frac{80^2 \cdot \sin 72° \cdot \sin 78°}{2 \cdot \sin 30°} = \frac{80 \cdot m}{2} \quad \Rightarrow \quad m \approx 148{,}8$$

2. $\cos\varphi = \dfrac{148{,}8}{148{,}9} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 2°$

A torony csúcsa a földtől kb. 148,8 méterre van. A torony kb. 2°-kal dőlt meg.

Megjegyzés: Nagyon közeli értékeknél a kerekítés erősen befolyásolja az eredményt. Ha $DC \approx 148{,}883$ m és $m \approx 148{,}844$ m értékekkel számolunk, akkor a torony dőlésszöge kb. 1,3°.

36. Két tereptárgy (A és B) légvonalbeli távolságát szeretnénk megmérni, de egyiket sem lehet látni a másik helyéről nézve. Ezért két olyan helyszínt választanak (C és D), amelyek 2,4 km távolságra vannak egymástól, és mindkét helyről jól látszanak az A és B tereptárgyak. Az A tereptárgytól a DC szakasz 32°-os szögben látszik, míg a B tereptárgytól 25°-os szögben. Továbbá le tudják mérni a CDB és a DCA szögeket is: CDB szög 44°; DCA pedig 38°. Mekkora az AB távolság?



Megoldás:

Terv:

1. Kiszámítjuk a CDA háromszög D csúcsnál lévő szögét
2. Szinusztétellel meghatározzuk a CA távolságot
3. A CDB háromszögben szinusztétellel meghatározzuk a CB távolságot
4. Kiszámítjuk a C csúcsnál lévő szöget, majd az ACB szöget is meghatározzuk
5. Koszinusztétellel kiszámítjuk az ABC háromszögben a BA oldalt

Számítás:

1. CDA szög: 180° – 32° – 38° = 110°.

2. $\dfrac{\sin 110°}{\sin 32°} = \dfrac{AC}{2{,}4} \quad \Rightarrow \quad AC \approx 4{,}3$

3. $\dfrac{\sin 44°}{\sin 25°} = \dfrac{BC}{2{,}4} \quad \Rightarrow \quad BC \approx 3{,}9$

4. DCB szög: 180° – 44° – 25° = 111°; ACB szög: 111° – 38° = 73°.

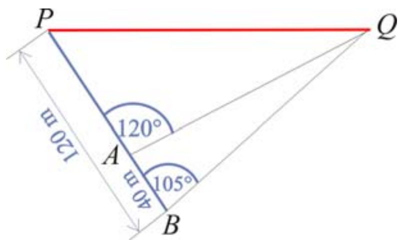
5. $AB^2 \approx 4{,}3^2 + 3{,}9^2 - 2\cdot 4{,}3\cdot 3{,}9\cdot \cos 73° \approx 23{,}9 \quad \Rightarrow \quad AB \approx 4{,}9$

A két tereptárgy távolsága kb. 4,9 km.

37. Egy parkban két pihenőhely közötti távolságot szeretnénk meghatározni. Amikor a közelebbi pihenőhely még 120 méterre van, akkor a két helyet 105°-os szögben látjuk. Ha 40 métert haladunk előre a közelebbi pihenőhely felé, akkor a két hely már 120°-os szögben látszik. Milyen távol van a két pihenőhely egymástól?

Megoldás:

Terv:



1. A BAQ háromszögben kiszámítjuk az A és a Q csúcsoknál lévő szögeket
2. Szinusztétellel kiszámítjuk a BQ oldalt
3. A PBQ háromszögben koszinusztétellel kiszámítjuk a keresett PQ oldalt

Számítás:

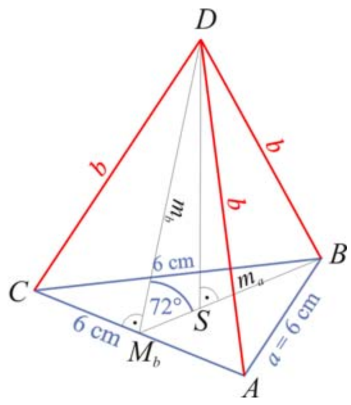
1. BAQ szög: 180° – 120° = 60°.
   AQB szög: 180° – 60° – 105° = 15°.
   $AB = 40$
2. $\dfrac{BQ}{40} = \dfrac{\sin 60°}{\sin 15°} \quad \Rightarrow \quad BQ \approx 133{,}8$
3. $PQ^2 = 120^2 + 133{,}8^2 - 2\cdot 120\cdot 133{,}8\cdot \cos 105° \quad \Rightarrow \quad PQ \approx 201{,}5$

A két pihenőhely távolsága kb. 202 m.

38. Egy szabályos háromszög alapú gúla alapéle 6 cm. Oldallapjai egyenlőszárú háromszögek, melyek az alaplappal 72° -os szöget zárnak be. Milyen hosszúak a gúla oldalélei?

Megoldás:

Az oldallap és az alaplap által bezárt szög a magasságvonalak hajlásszöge.



A BM_bD szög 72°. (Továbbiakban $\delta = 72°$.)

Terv:

1. Az alaplap magasságának kiszámítása
2. Pitagorasz-tétellel felírjuk az oldallap szára és magassága közötti összefüggést
3. Felírjuk a koszinusztételt a BDM_b háromszögre, és behelyettesítünk
4. A gúla oldalélének kiszámítása

Számítás:

1. Az ABC szabályos háromszög magassága: $m_a = 3\sqrt{3}$.
2. Az ACD egyenlőszárú háromszög alapja, az $AC = 6$ cm.

   Magassága az ADM_b derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétellel kiszámítható.

   $$m_b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad m_b^2 = b^2 - 9$$

3. D merőleges vetülete az ABC háromszög súlypontja. Írjuk fel a BDM_b háromszögre a koszinusztételt, majd helyettesítsünk be!

   $$b^2 = m_b^2 + m_a^2 - 2 \cdot m_b \cdot m_a \cdot \cos\delta = b^2 - 9 + 27 - 2 \cdot \sqrt{b^2 - 9} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 72°$$

4. Átrendezés és a kijelölt műveletek elvégzése után kapjuk:

   $$\sqrt{b^2 - 9} \approx 5{,}6 \quad \Rightarrow \quad b \approx 6{,}4 \,.$$

A gúla oldalélei kb 6,4 cm hosszúak.

39. Egy háromszög egyik szöge 56,4°. Ennek a szögnek a szögfelezője a szemközti oldalt 26 cm-es és 34 cm-es részekre osztja. Mekkora a háromszög kerülete és szögei?

Megoldás:

Terv:

1. a oldal kiszámítása
2. b és c közötti arány figyelembevétele (x-szel kifejezve)
3. x kiszámítása koszinusztétellel az eredeti háromszögben
4. Oldalak meghatározása
5. Háromszög kerületének kiszámítása
6. β szög meghatározása szinusztétellel
7. γ szög kiszámítása

Számítás:

1. $a = 34+26 = 60$
2. A háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a mellette lévő két oldal arányában metszi.
   $b = 26x$; $c = 34x$
3. $60^2 = (26x)^2 + (34x)^2 - 2\cdot 26x\cdot 34x\cdot \cos 56{,}4° \Rightarrow x^2 \approx 4{,}2174 \Rightarrow x \approx 2{,}054$
4. $b \approx 53{,}4$; $c \approx 69{,}8$
5. $K \approx 53{,}4 + 69{,}8 + 60 \approx 183{,}2$
6. $\dfrac{\sin\beta}{\sin 56{,}4°} \approx \dfrac{53{,}4}{60} \Rightarrow \sin\beta \approx 0{,}7413$, $\beta \approx 47{,}8°$. A másik megoldás nem lehetséges, mert nem a b oldal a legnagyobb oldal, így β nem lehet tompaszög.
7. $\gamma \approx 180° - 56{,}4° - 47{,}8° \approx 75{,}8°$.

A háromszög kerülete 183,2 cm, szögei 47,8° és 75,8°.

Módszertani megjegyzés **Feladatküldés**

A tanulók 3-4 fős csoportokat alkotnak. Vagy minden csoport kitalál magának egy nevet, vagy a tanár sorszámot oszt. A csoportok kitalálnak egy-egy feladatot, melynek megoldása közben a szinusz- és a koszinusztételt egyaránt használni kell, ezeken kívül alkalmazhatnak bármely eddig tanult összefüggést. Használhatják bármelyik függvénytáblázatot. Két papíron dolgoznak, mindkét papírra ráírják a csoportnevet vagy a sorszámukat. Egyik papírra a feladatukat írják fel, másikra a feladat szövegén kívül annak megoldását is. Ha készen vannak, a feladatot tartalmazó papírt összehajtva beteszik egy kalapba, a megoldást maguknál hagyják. A tanár összekeveri a kalap tartalmát. Ezek után minden csoportból kimegy egy képviselő, aki kihúz a kalapból egy feladatot, amit a csoportjával megold. Ha valamelyik csoport a saját feladatát húzza, akkor kicseréli másikra. Ha mindenki elkészült, visszaküldi a megoldást a feladatot kitaláló csoporthoz, amelyik kijavítja azt. Végül közösen megbeszélik a megoldásokat.

Megjegyzés: Feladatküldés helyett a tanár az összes eddigi, nem megoldott feladatok közül is kijelölhet annyit, ahány csoport van. Kis kártyákra nyomtatja, és szöveggel lefelé fordítva kiteszi az asztalra. A csoportokat képviselő tanulók ezek közül húznak egyet-egyet, amit közösen megoldanak. Végül minden csoport egy képviselője bemutatja a feladatot és a megoldást a táblánál.

Kislexikon

Szinusztétel: Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával:

$$\boldsymbol{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}$$

Koszinusztétel: Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldalának négyzetösszegéből kivonjuk a közbezárt szög koszinuszának és ezen oldalaknak a kétszeres szorzatát:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma}$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2\mathrm{ca}\cdot\cos\beta}$$