
SZORZATOK SZÁMÍTÁSA

19. modul

KÉSZÍTETTE: C. NEMÉNYI ESZTER

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Az ezres számkörben való tájékozottság mélyítése. A kerek százásokkal végzett műveletekhez (összeadás, kivonás, egyjegyű számmal való szorzás) felhasznált analógiák alapjának megértetése. A becslés, közelítés jogosultságának elfogadtatása. Becslőképesség alapozása.
Időkeret	2 óra
Ajánlott korosztály	8–9 évesek; 3. osztály; 17. hét
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: keresttantervi NAT szerint: Környezeti nevelés, énkép, önismeret, tanulás Kompetenciaterület szerint: szociális és környezeti. Szűkebb környezetben: saját programcsomagunkon belül: 9–12., 15–17. modul Ajánlott megelőző tevékenységek: az ezres számkör számaival való ismerkedés; a számrendszeres, helyiértékes alak értelmezése, gyakorlása; a műveletek értelmezése és számolási eljárások a százás számkörben, összeadás, kivonás pontosan 0-ra végződő háromjegyűek körében és közelítéssel százás és tízes kerekítés szerint.
A képességfejlesztés fókuszai	Számlálás, számolás Analógiás gondolkodás Mennyiségi következtetés Valószínűségi szemlélet Tudatos és akaratlagos emlékezés Összefüggés-felismerés.

AJÁNLÁS

A megelőző időszakban a 00-ra, illetve 0-ra végződő háromjegyű számok összeadására, kivonására alakítottunk számolási eljárásokat, valamint a rájuk támaszkodó becslés – közelítés módszerét kezdtük kiépíteni. Ezek gyakorlására a továbbiakban is gondot kell fordítani.

A kisegyszeregynek és osztótábláknak megfelelő esetek: a kerek tízesek, kerek százaskok egyjegyűvel való szorzása, osztása. Ez ugyanolyan analógias gondolkodásra támaszkodik, mint amit az összeadásban követtünk. Azt kell átlátniuk a gyerekeknek, hogy amikor pl. 7 egyes helyett 7 tízest háromszorozunk, akkor 21 egyes helyett 21 tízest kapunk. A 21 tízes pedig 210. Amikor 3 százast kétszerezünk, akkor 6 százast kapunk: 600-at. Amikor a $45/9$ helyett a 45 tízest osztjuk 9 felé, akkor 5 egyes helyett 5 tízes, 50 jut egy részbe. Az analógia megértéséhez újabb tapasztalatok mellett a számrendszeres gondolkodás megfelelő fejlettségére van szükség. Arra, hogy a számjegyek már valóban az egyesek, tízesek, százaskok darabszámát fejezzék ki, s könnyedén váltsanak tízeseket, százaskokat egyesekké, és fordítva.

Más megközelítést jelent ezeknek az eseteknek a számításában a szorzás és osztás monotonítására való építés. Annak megértése, hogy mi módon függ a tényezők nagyságától a szorzat nagysága, hogyan függ az osztandótól a hányados. Ha gyakorlati módon¹ tisztában vannak a gyerekek azzal, hogy a kétszer, háromszor, négyszer... tízszer, százszor... nagyobb számnak az adott számszorosa kétszer, háromszor, négyszer... tízszer, százszor... nagyobb, akkor a $6 \cdot 7$ és a $60 \cdot 7$ közti tízszeres kapcsolat nem szorul magyarázatra. Ha pontosan tudják, hogy a kétszer nagyobb szám fele, harmada, negyede... is kétszer nagyobb, vagy ha háromszor, négyszer... tízszer... nagyobb számot osztunk ugyanannyi felé, akkor háromszor, négyszer... tízszer... nagyobb számot kapunk, akkor nem okoz gondot az $54/6$ -ról az $540/6$ -ra való következtetés. (Bár a szorzótáblák építése során nagy gonddal formáltuk az összefüggést, sőt felhasználtuk az esetek építéséhez és memorizálásához, további tapasztalatszerzésre és tudatosításra is szükség van ebben az évben.)

A szorzásban, osztásban azonban további típusú feladatok kiszámítására is fel kell készítenünk a gyerekeket.

Természetes, hogy nem kell tudni fejben kiszámítani teljes háromjegyűek többszörösét, sőt általában teljes kétjegyűeket sem szorzunk egymással fejben. Annak azonban többféle szempontból is fontos szerepe van, hogy kétjegyű számokat fejben szorozzanak a gyerekek egyjegyű számokkal, illetve fordítva, és hogy egyszerű esetekben el tudják végezni nagyobb szám kétjegyűvel való szorzását is, ha e kétjegyű szám egyjegyűek szorzatára bontható. E területen nem kívánjuk, és nem is tudjuk nagy gyakorlottságig eljuttatni a harmadikosokat, de a megértést, segítséggel való alkalmazást célul tűzhetjük, hiszen az írásbeli szorzást kívánjuk majd erre a megértésre építeni.

A fentieknek megfelelően a két óra építésének gerincét a számrendszeres gondolkodás további fejlesztése, a szorzás a disztributivitás² és a tényezők további tényezők szorzatára való bontás³ alkalmazása képezi.

¹ Gyakorlati módon: ez azt jelenti, hogy nem a róla szóló mondatokat tudja elismételni (nem is ilyesmit kérünk számon), hanem számításaiban, becsléseiben, egy-egy számfeladat ellenőrzésében hozzá igazodik, épít rá – esetleg a nélkül, hogy tudatosítani tudná, hogy így működött az agya.

² Pl. egy szám 14-szeresét számíthatjuk úgy, hogy a 14-et két szám összegére bontjuk – mondjuk $10 + 4$ -re – és a szám 10-szeresét és 4-szeresét összeadjuk.

³ Pl. egy szám 14-szeresét számíthatjuk úgy is, hogy a 14-et két szám szorzatára bontjuk: $14 = 7 \cdot 2$, és a szám 7-szeresét kétszerezzük.

TÁMOGATÓRENDSZER

C. Neményi Eszter–Wéber Anikó: *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához*. Nemzeti Tankönyvkiadó – Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest, 103–113. old.

C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna: *A számolás tanítása; Tantárgypedagógiai füzetek*; ELTE TÓFK kiadványa Budapest
Kapcsos könyv a matematika differenciált tanításához – tanulásához, Budapest, Országos Közoktatási Intézet KOMP-csoport, 2001.

ÉRTÉKELÉS

A modulban figyeljük

- a műveletek értelmezésének kialakultságát;
- a szorzás és osztás tulajdonságainak, kapcsolatainak gyakorlati ismeretét, alkalmazását;
- a megismert számolási eljárások megértését, alkalmazásának fejlődését;
- az önellenőrzés igényének alakulását;
- a szövegértést;
- a véletlenről formálódó gondolkodás helyességét.

Értékeléseink során az előre megjelölt szempontokat célszerű kiemelni. Az ellenőrzés szempontjai közül nem mindegyik lehet az értékelés alapja, hiszen a még nem tudatosított, de már működni indult alkalmazásokért nem tehető felelőssé a gyerek. Értékeljük a feladatvállalást, a munkában való részvételt, az egymás segítségét, a már tudatosított ismeretek alkalmazását, az önellenőrzésre való törekvést, a szóbeli megnyilvánulások pontosságát, nyelvi helyességét, az írásbeli munka rendezettségét, szépségét, és értékeljük a tanult ismeretekben, készségekben való fejlődést, s a befektetett munkát.

A teljesítmények szummatív értékelésére még nem kerülhet sor.

MODULVÁZLAT

Időterv: 1. óra kb. I./1 és II./1–4.
2. óra kb. II./5–9.

	Lépések, tevékenységek (a mellékekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
I. Ráhangolódás, a feldolgozás előkészítése						
	1. Számok alkotása helyiértékek szerint váltással is	sámrendszeres gondolkodás, rendszerlátás	egész osztály	frontálisan irányított egyéni	alkotás, tevékenykedtetés, ellenőrzés	LAP, CSÍK, NÉGYZET készlet (Ak/20.)
II. Az új tartalom feldolgozása						
	1. Számsorozatok képzése: egyenletes lépegetés számtáblázatokon	analógiás gondolkodás, számlálás, számolás, számrendszeres gondolkodás	egész osztály	páros majd frontálisan irányított egyéni	kutatás, megbeszélés, vita; tanulói magyarázat	kettős számtáblázat (1. melléklet), 2–2 áttetsző lap, vagy celofán; filctoll, 2–2 gémpapír
	2. Kerek tízesek szorzása egyjegyűvel; 0-ra végződő háromjegyűek osztása egyjegyűvel; bennfoglaló osztás kerek kétjegyűvel	analógiás gondolkodás, számlálás, számolás, számrendszeres gondolkodás	egész osztály	egyéni	tevékenykedtetés; gyakorlás	a piros-kék korongkészlet 1. feladatlap

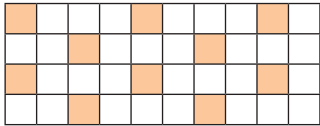
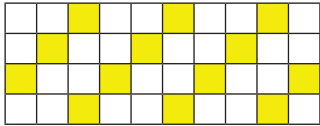
	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	3. Pénzösszeg többszörözése az érmék értékének többszörözésével (kétszerezés, ötszörözés, tízszerzés, százszorozás); Különbféle számrendszerekben az alapszámmal való szorzás az érmék értékének többszörözésével; a helyiérték-táblázatban való balra lépés.	számolás, számrendszeres gondolkodás, képértelmezés, induktív és deduktív lépések	egész osztály	egyéni	tevékenyked- tetés, tudato- sítás, bemutatás, ellenőrzés	gumiszalag, színes rúd (szemléltetés- re), játékpénz, táblázattal és pótlapokkal (2. melléklet) (Ak/19), 1. feladatlap,
	4. Egy gyakorlati probléma felvetése; többféle megoldásának keresése; házi feladat	összefüggéslátás, szöveg- és képértelmezés	egész osztály	frontális	megfigyelés, tanulói ma- gyarázat	konyhakő képe fólián (3. melléklet)
	5. A házi feladat megbeszélése	összefüggéslátás, szöveg- és képértelmezés, induktív és deduktív lépések	egész osztály	csoportos, frontálisan irányított egyéni	megbeszélés, vita	konyhakő képe fólián (3. melléklet)
	6. A disztributivitás tapasztalása és tudatosítása; az általánosítás kezdete	összefüggéslátás, számolás, induktív lépések	egész osztály	frontálisan irányított egyéni	tevékenyked- tetés; tudato- sítás	a piros-kék korongkészlet
	7. Többszörözés felbontása két többszörözés egymásutánjára; többszörözés szorzással és osztással ($\cdot 5$); két, több gép összekapcsolása	összefüggéslátás, ismertek alkalmazása, számolás	egész osztály	frontálisan irányított egyéni Egyéni	tevékenyked- tetés; megfigyelés	változtató kártya-készlet (t/18.) (4. mel- léklet), 3 fólia-kép (5. melléklet), 2. feladatlap

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	8. Különféle számrendszerekben az alapszámmal való szorzás az érmék értékének többszörözésével; a helyiérték-táblázatban való balra lépés.	számolás, számrendszeres gondolkodás, analógiás gondolkodás	egész osztály	páros, frontális, egyéni	tevékenykedtetés, tudatosítás, bemutató, közlés, ellenőrzés	játékpénz, Szám-országok játékpénze, táblázattal, (Ak/19.) (2. melléklet) 2-2 pótlappal tanulóként, és demonstrációs változat
	9. Házi feladat: szorzás kerek tízessel (előkészítés)	ismeretek alkalmazása	egész osztály	egyéni	alkalmazás	–

A FELDOLGOZÁS MENETE

Az alábbi, részletes leírás célja elsősorban egyféle minta bemutatása. Nem lehet és nem szabad kötelező jellegű előírásnak tekinteni. A pedagógus legjobb belátása szerint dönthet a részletek felhasználásáról, módosításáról vagy újabb variációk kidolgozásáról.

Számítások és becslések kerek százasokkal	
I. Ráhangolódás, a feldolgozás előkészítése	
Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>1. Számok alkotása helyiértékek szerint váltással is (adott számú tízes) <i>Szervezés:</i> 4-fős csoportokba ülteti a gyerekeket az egész órai munkához. Füzet, ceruza, és a LAP, CSÍK, NÉGYZET készlet (Ak/20.) előkészítése. „Találjátok ki, mely számokra gondoltam! Írjátok le egymás alá őket! – Az első szám 4 századból, 7 tízesből és 2 egyesből áll. – A második 47 tízes. – A harmadikat fel lehet építeni 3 tízesből, 26 egyesből és 5 századból. – A negyedik 28 egyes és 86 tízes. – Az ötödik álneve: 6 század, 13 tízes és 52 egyes. – A hatodik szám pedig 5 század, 47 tízes és 30 egyes. Ellenőrizzük, hogy mi a helyes megoldás! A LAP, CSÍK, NÉGYZET készlettel rakjátok ki ezeket a számokat!</p> <p>„Ki vállalkozik arra, hogy hasonló „álnéven” bemutat még egy számot?” (A 397-et megmutatja a vállalkozó gyerekeknek.)</p>	<p>A füzetbe írják egymás után a felépített számokat: 472 470 556 888 782 1000</p> <p>Egyenként megjelenítik sorra a számokat. A másodiktól kezdve szavakba is foglalja a felszólított tanuló a megjelenítésnél alkalmazott eljárást. Pl.: a harmadiknál: kivettem 3 CSÍKOT, a 26 NÉGYZETET 2 CSÍKKAL és 6 NÉGYZETTEL tudtam kirakni és 5 LAPOT tettem. Ez összesen 5 század, 5 tízes és 6 egyes: 556.</p> <p>Vállalkozó tanuló „elrejtí” a 397-et.</p> <p>Felépítik a közölt információk alapján.</p>

II. Az új tartalom feldolgozása	
Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>1. Számsorozatok képzése: egyenletes lépegetés számtáblázatokon <i>Szervezés:</i> előkészíteti a kettős számtáblázatot és a két áttetsző lapot, két gemkapoccsal, amivel a táblázathoz rögzítik az áttetsző lapot. Páros munkát kér. „A két táblázaton lépegetsetek párokban! Tűzzétek az első áttetsző lapot a táblázathoz! Egyikőtök a 0-tól négyesével növekvő számsorozat számait karikázza be, másiktok a 0-tól 40-esével növekvő sorozat számait a másik táblázaton! Ha elkészültetek, emeljétek le az áttetsző lapokat, és fektessétek egymásra! Beszéljétek meg a tapasztaltakat!”</p> <p>Közösen is meghallgatnak egy magyarázatot. (Fontos, hogy a szóbeli megfogalmazásokban úgy szerezzenek a gyerekek gyakorlatot, hogy kezdetben a maguk nyelvén próbálják formába önteni gondolataikat, s aztán ezeket a megfogalmazásokat tisztítgatjuk, pontosítjuk.)</p> <p>„Tegyétek most rá mindannyian az áttetsző lapot a jobb oldali táblázat számaira! Keresd meg a következő számokat (egyenként kéri): 3-szor 40; 5-ször 40; 7-szer 40! Hányszor 40 a 320? Hányszor 40 a 440? A160-ban hány 40-es van? Hányszor van meg a 240-ben a 40? A 360-nak hányadrésze a 40? Mit olvashatsz le a 120-ról?</p> <p>Keressetek a megjelölt számokon lépegetve más sorozatokat is!”</p> <p>„Mit figyelhetsz meg erről a sorozatról?”</p> <p>„Ki talált más érdekes sorozatot?”</p> <p>„Új feladat következik. Rögzítsétek rá a táblázatra a második áttetsző lapot! A szomszédok közül az egyik gyerek a 0-tól 3-asával növekvő sorozat számait karikázza be, a másik a 0-tól 30-asával növekvő sorozat számait! Ha elkészültök, illesszétek egymásra a két lapot, és beszéljétek meg párokban a tapasztaltakat!”</p>	<p>A szomszédok közös feladatot végeznek.</p> <p>A két táblázatban azonos helyen helyezkednek el a két sorozat számai. Mindkettő sorozat szép lóugrásszerű elrendezést mutat: jobbra (vagy balra) kettő, egy le. A párok azt beszélhetik meg egymással, hogy az elrendeződés egyformasága azal magyarázható, hogy ahány egyes van a bal oldali táblázat valamely helyén, ugyanannyi tízes van a jobb oldali táblázatnak ugyanazon a helyén; a bal oldalon ugyanannyi eggyessel lépegetnek, ahány tízessel a jobb oldalon.</p>  <p>Ceruzával mutatják a sorolt számokat, és segítségével megfogalmazzák a választ: 3-szor 40 az 120; 5-ször 40 az 200; 7-szer 40 az 280; a 320 az 8-szor 40, a 440 az 11-szer 40, a 240-ben a 40 6-szor van meg, a 360-nak a kilenced része a 40. A 120 az 3-szor 40; a 120-ban a 40 háromszor van meg, a 120-nak a 40 a harmadrésze. Lépegethetnek úgy, hogy minden második számot átugorják: 0, 80, 160, 240, 320, 400, 480, 560, 640, 720, 800, 880, 960. – Ebben a sorozatban a 80 többszörösei vannak. Megfigyelhetik, hogy ebben a sorozatban 1-gyel-1-gyel nő a százások száma és 2-vel-2-vel csökken a tízesek száma. Lépegethetnek bármely számtól lefelé: 40, 240, 440, 640, 840; vagy 80, 280, 480, 680, 880; 200, 400, 600, 800, 1000. – Ezek a sorozatok mind 200-asával nőnek, ami öt 40-es lépésnek felel meg. A második áttetsző lapot ráillesztik a kettős táblázatra. Színezik vagy karikázzák a sorozat számait:</p> 

<p>„Próbáljátok a következő kérdéseket átfogalmazni tízesekre!” 120 : 40 ? 5-ször 80? Mennyi a 420 hatodrésze? „Az 1. feladatlap első két feladatát oldjátok meg önállóan! Akinek szüksége, rakja ki korongokkal, arról olvasson.” – Szükség szerint segít, illetve a csoport tagjai segíthetik egymást a kérdés átfogalmazásával, a kirakás ellenőrzésével.</p>	<p>12 tízesben hányszor van meg a 4 tízes? – 3-szor. 5-ször 8 tízes az 40 tízes, azaz 400. Mennyi a 42 tízes hatodrésze? 7 tízes, azaz 70. Lehetőleg önálló munkát végeznek; szükség esetén segítik egymást.</p>
<p>3. Pénzösszeg többszörözése az érmék értékének többszörözésével (2-szerezés, 5-szörözés, 10-szerezés, 100-szorozás); Szervezés: a játékpénzek előkészítése. „Mit gondoltok, lehet-e valamit többszörözni úgy, hogy mégis ugyanannyi darab maradjon?” (Ha a gyerekeknek nincs ötletük, mutassunk egy gumiszalagot, amelynek a hosszát megnyújtjuk, vagy egy rózsaszín rudat, amelyet kicserélünk egy narancssárgára – megnevezve, hogy ezt a hosszúságot kétszerezettük, ötszöröztük így.) „Most pénzösszeget fogunk szorozni hasonlóan. Tegyetek ki magatok elé 3 db 1-forintost, 3 db 5-forintost és 2 tízest! Számoljátok össze, hány forint ez!” Tegyetek mellé kétszer ennyi pénzt: mindenből tegyetek kétszer annyit! Úgy is kétszerezétek, hogy mindegyik pénz helyett kétszer értékesebb érmét tegyetek!” A következő feladatot is kétféleképpen végezzétek: Tegyetek magatok elé 2 egyforintost, 3 kettést, 1 tízest és 2 húszast! Számoljátok meg, mennyi pénz van előttek. Rakjátok mellé ötször ennyit! (Előbb úgy, hogy minden darab helyett öt ugyanilyent tesznek, utána úgy, hogy minden érme helyett egy-egy ötször értékesebbet.) Tegyetek ki valahogyan 34 Ft-ot! Tegyétek ki ennek a tízszeresét kétféleképpen. Tegyetek minden érme helyett tízet, aztán váltsátok be, amit lehet! Tízszerezétek úgy is, hogy mindegyik érme helyett tízszer értékesebbet tesztek! 3 egyforintost és 1 kettést készíttetek ki! Tegyétek mellé az ötvenszeresét a leg-egyszerűbben!</p>	<p>Eszükbe juthat a gyerekeknek, hogy például egy gumi hosszúságát kétszerezhetik úgy, hogy kétszer olyan hosszúra nyújtják; az 1 kilós „súlyt” is ötszörözhetik úgy, ha nem 5 darab 1 kilóst tesznek a mérlegre, hanem helyette egy 5 kilóst. Kirakás után megszámlálják, hogy 38 forint van előtük. Kétszerezik úgy, hogy mindenből kétszer annyit tesznek: 6 db 1 forintost, 6 db 5 forintost és 4 tízest, összeszámlálás után megállapítják, hogy ez 76 Ft. Most 3 db 2-forintost, 3 db 10 forintost és 2 húszast tesznek ki; erről is megállapítják, hogy 76 Ft. Kirakás után megszámlálják: 58 Ft. A 2 egyforintos, 3 kettés, 1 tízes és 2 húszas ötszöröse 10 egyforintos, 15 kettés, 5 tízes és 10 húszas – ez összesen 290 Ft. Ha ötször értékesebbre cserélik az érméket, akkor a 2 egyforintosból lesz ötforintos, a 3 kettésből 3 tízes, az 1 tízesből 1 ötvenes és a 2 húszasból 2 százás. Ez szintén 290. Többféleképpen tehetik; jó, ha csoporton belül különféle kirakások keletkeznek. Aki pl. 2 tízest és 2 ötöst és 2 kétforintost tett, az 20 tízest 20 ötöst és 20 kétforintost tehet maga elé. A 20 tízes beváltható egy 200-forintosra, a 20 ötös 1 százásra, a 20 kétforintos 2 húszásra. A másik tízszerzés eredménye: 2 százás, 2 ötvenes és 2 húszas. A 3 egyforintos és 1 kettés ötvenszerese 3 ötvenes és 1 százás.</p>

Különféle számrendszerekben az alapszámmal való szorzás az érmék értékének többszörözésével; a helyiérték-táblázatban való balra lépés.






Szervezés: csoportonként kioszt egy-egy készletet a különféle számrendszerekhez tartozó pénzekből. (2. melléklet)

„Ellátogatunk most más szám-országokba.”

„Vegyétek elő először a Hármas szám-ország pénzeit! Párokban dolgozzatok együtt! Készítsen az egyik gyerek elő 14 Ft-ot, és kérje meg szomszédját, a „bankost”, hogy váltsa be nagyobb érmékre! Jegyezzétek fel a táblázatba, hogy beváltás után mely érmékből hány darab lett!”

Be is mutatjatja egy gyerekkel a váltást.

Mintát ad a táblázatba írásra:

					
		1	1	2	14

Felváltva legyetek bankárosok, és váltsátok be az egyeseket háromforintosokra, a hármasokat kilencesekre, a kilenceseket huszonhetesekre... Csúsztassatok egy pótlapot a táblázat sínébe! Folyamatosan töltsétek ki a csoportban a táblázatot; jobb oldalon írjátok, hogy hány forintot kell beváltani. Váltsátok be a 7, a 24 és a 35 Ft-ot!” – a táblán beírja a saját táblázata jobb oldali oszlopába a további három számot is a 14 alá. – „A beváltott összegek maradjanak az asztalon: minden csoportban mind a négy összeg legyen kirakva egyszer!”

Szükség szerint segít.

„Vegyétek ki a pótlapot a táblázatból, és csúsztassatok új lapot a sínbe!”

A kirakott összegeket fogjuk háromszorozni. Mennyi a 14 háromszorosa?

Tegyétek ki a 42-t a lehető legkevesebb érmével!

Ha 1 huszonhetest, 1 kilencset és 2 hármas tesznek, az lesz a legkevesebb érme. Aki másképpen tette ki, azt figyelmeztessük, hogy esetleg lehet még beváltani valamit nagyobb érmékre.

„Írjuk az új táblázat első sorába, hogy milyen érmékkal tettük ki a 14 háromszorosát! (Amilyen érmét nem használtunk, oda is írjuk be a 0-t!)”

A táblán az előző táblázat mellett a tanító is új táblázatot készít, amelybe a 14-gyel egyező sorba kerül a 42 érméinek száma:

A csoportok előkészítik a megfelelő készletet.

A tanító irányításával különféle pénzösszegeket jelenítenek meg, aztán amit lehet, beváltják.

3 db egyesért adok 1 hármas, ismét 3-ért 1 hármas, 3-ért 1 hármas, és újra 3-ért 1 hármas. A 2 egyest már nem lehet beváltani. A 4 hármas közül 3 hármas beváltok 1 kilencesre. Így lett 1 kilencforintos, 1 háromforintos és 2 egyes.

Feldiktálja a tanítónak és a csoport táblázatába: 14 Ft az 2 háromforintos és 1 egyes.

42.

Az új táblázat első sorába a 42 érméi kerülnek (beváltások után)

Ny	Hh	k	h	1	
		1	1	2	14

Ny	Hh	k	h	1	
	1	1	2	0	42

„Ellenőrizzük, milyen értékből áll a 7 Ft!”

„Tegyétek ki a 7 Ft háromszorosát minél kevesebb értékkel! Azt a táblázat második sorába írjátok be!”

Mit írtatok?

Ellenőrizzük a 24 és a 35 értékét!

A 24 és 35 forintot is háromszorozzátok úgyesen!

Először a háromszorozás jó módszerét beszéljük meg: úgy ügyes háromszorozni, ha mindegyik érme helyett háromszor értékesebbet teszünk.

Ez után beszéljük meg a táblázatok azonos soraiba került számok alakja közti kapcsolatot. Mindegyik számot és a háromszorosát ugyanúgy jegyeztük le, csak egy hellyel balra kerültek ugyanazok a számjegyek; az egyesek száma pedig 0.

„A Négyes-ország pénzeivel dolgozzunk tovább!

Vizsgáljátok meg ezeket az értéket: mit lehet elmondani róluk!”

„Vegyétek elő 11 forintot! Váltsa be a bankár!”

„Írjuk be a táblázat első sorába!”

hatvannégy	tizenhat	négy	1	
		2	3	11

A 7 az 2 hármából és 1 egyesből áll.

A háromszorosa 2 kilences, 1 hármas és 0 egyes.

Ezt is közösen ellenőrizzük: 2, 1, 0.

A 24-et 2 kilencessel, 2 hármással és 0 eggyessel tették ki. A 35-höz 1 huszonhetes, 0 kilences, 2 hármas és 2 egyes kellett.

Felismerhetik, hogy ha az értéket egyenként kicserélik háromszor értékesebb értékekre, akkor az egész összeg háromszorosa áll előttük. Akik ezt nem látják előre, azoknak a háromszoros pénzüsszeg beváltások utáni értékéről kitöltött táblázat keltheti fel a kíváncsiságát.

Előkészítik a pénzkészletet, táblázatot és pótlapokat.

4 egyforintos ér 1 négyest, 4 négyforintos beváltható 1 tizenhatosra, 4 tizenhatos ér 1 hatvannégyest.

Elkészítik a beváltást, és beszámolnak a munkájukról: 4 forintot 1 négyesért, újabb 4-et 1 négyesért, a többit nem lehet beváltani. 2 négyes és 3 egyes lett.

Beírják a táblázatba

„Rakjátok ki a négyszer 11-et is!”

„Mennyi a 11 négyszerese? Hogyan jegyzi ezt fel a Négyes-országban? Írjuk be ezt is a táblázatba!”

		2	3	11
	2	3	0	44

„Váltsatok be 25 forintot, és a négyszeresét is írjátok a táblázatba!”

Ellenőrzésként egyrészt összegzik az érmék értékét ($16 + 4 + 4 + 1 = 25$; $64 + 16 + 16 + 4 = 100$), másrészt megfigyelik a két szám érméinek lejegyzését, a két leltárt.

Az 1. feladatlap (2. melléklet) 3. feladatának megoldása; a megoldás után a „trükk” megfogalmaztatása, (hogy minden érme kétszer nagyobb számot írtak).

4. Egy gyakorlati probléma felvetése; többféle megoldásának keresése; házi feladat

„A konyhánkba új köveket tettek fel. Az a kérdés, hogy hányat.” – felmutatja a konyha alaprajzát (3. melléklet)

Rajzoljátok le a konyha alaprajzát: lehetnek a ti köveitek négyzet alakúak, egy kő egy kis négyzet a füzetben!

„Ígazan persze arra vagyok kíváncsi, milyen sokféleképpen tudjátok leírni számtannyelven, hogy hogyan lehet ezt megállapítani, milyen sokféleképpen tudjátok kiszámítani, mennyi a 15-nek a 8-szorosa. Azt a módszert már ne írjátok le, hogy egyenként megszámláljuk az összest!”

Szükség esetén meghallgat egy-két ötletet: szabad részekre is bontani!

Házi feladat: írjátok le sokféleképpen számtannyelven, hogyan lehet kiszámolni! Kíváncsi vagyok, hogy melyik csoportban gyűlik össze a legtöbbféle különböző felírás.

Kitehetnek most 8 négyest és 12 egyest, aztán beváltanak: 4-4 négyesért adnak 1-1 tizenhatost, és 4-4 egyesért 1-1 négyest. Aki azonban kezdi érteni a szorzásnak ezt az érték szerinti módját, az közvetlenül is kicserélhet minden négyest tizenhatosra, és minden egyest négyesre, így közvetlenül megkapja a beváltott alakot.

A 44-et 2 tizenhatossal 3 négyessel és 0 eggyessel lehet feljegyezni.

Szükség szerint segítséggel elvégzik a beváltást; (25 az 1 tizenhatos, 2 négyes és 1 egyes; a négyszerese, a 100 pedig 1 hatvannégyes, 2 tizenhatos 1 négyes és 0 egyes).

Megállapítják, hogy az érmék száma ugyanaz, csak minden érme négyszer értékesebbre változott.

A kép leolvasása: egy-egy sorban 15 kő van, és 8 ilyen sor van. Ez a 15-nek a 8-szorosa.

2. óra

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>5. A házi feladat megbeszélése A múlt órán felvetett probléma felelevenítése, a kép (3. melléklet) kivetítése. Csoportonként az összes különböző felírás összegyűjtése. A megoldások táblára íratása:</p> <p>Értelmezik a kép alapján a különféle leírásokat: megmutatva a megfelelő tagolást (pl. hurkapálcákat helyezve a megfelelő részletek határaihoz). Közösen értékelik a felírások érdekességét, gondolati szépségét és sokféleségét.</p>	<p>A csoportokban egyeztetik egymással a gyerekek a különféle felírásokat: összegyűjtik az összes különbözőt. A csoportok „jegyzője” felírja a táblára a talált megoldásokat. A legközvetlenebb leírások a $15 \cdot 8$, vagy $8 \cdot 15$ és ugyanezek összegalakja. Remélhetőleg azonban (főképpen, ha hozzászoktak a többféle megoldás kereséséhez) írhatnak olyan bontott alakokat is, mint $(10 \cdot 8) + (5 \cdot 8)$, $(8 \cdot 8) + (7 \cdot 8)$, $(15 \cdot 2) + (15 \cdot 6)$, $15 \cdot 10 - 30$, $(15 \cdot 4) + (15 \cdot 4)$, $(5 \cdot 8) + (5 \cdot 8) + (5 \cdot 8)$, $(15 \cdot 2) \cdot 4$, $(3 \cdot 8) + (3 \cdot 8) + (3 \cdot 8) + (3 \cdot 8) + (3 \cdot 8)$, illetve $(3 \cdot 8) \cdot 5$, vagy $8 \cdot 10 + 8 \cdot 5$..</p>
<p>6. A disztributivitás tapasztalása és tudatosítása; az általánosítás kezdete <i>Szervezés:</i> a korongok előkészítése. „Mindegyik korong most 20 forintos érme. Rakjátok magatok elé 7 korongot! Hány forintot ér, amit kiraktatok? Számtan-nyelven kérem!” „Válasszátok kétfelé a 7 korongot, és olvassátok le így is számtannyelven a 7-szer 20-at!”</p> <p>„Érjenek most a korongok 50 Ft-ot! Mennyit ér 14 korong? Rakjátok ki, és kétfelé választva többféleképpen olvassátok le a 14 korong értékét!”</p> <p>Ezt így írhatjuk:</p> $50 \cdot 14 = \overset{300}{(50 \cdot 6)} + \overset{400}{(50 \cdot 8)} = 700$ <p>Mini-számokkal a zárójelbe írt szorzat fölé írva, hogy az mennyi. „Érjen most mindegyik korong 60 Ft-ot! 15 darabot vegyetek elő, és különféleképpen két- vagy többfelé bontva olvassátok le az értékét! Jegyezzétek fel a füzetbe, amit kiraktatok!” Ellenőrzéskor felírja a táblára az elhangzottakat, hogy a lejegyzést gyakoroltassa.</p>	<p>20 Ft 7-szerese az 140 Ft.</p> <p>Pl. a 20 ötszöröse, meg a 20 kétszerese az $100 + 40 = 140$; vagy a 20 háromszorosa, meg a 20 négyszerese, az $60 + 80 = 140$</p> <p>Többféle bontásban számítják ki az 50 tizennégyszeresét. Pl.: az 50 négyszerese, meg az 50 10-szerese, $200 + 500 = 700$. Az 50 kétszerese, meg az 50 kétszerese, meg az 50 kétszerese, meg az 50 kétszerese, meg az 50 kétszerese, meg az 50 kétszerese, azaz $100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 700$. Az 50 6-szorosa, meg az 50 nyolcszorosa, azaz $300 + 400 = 700$..</p> <p>Önálló munkával írják le a 15-ször 60 különféle bontott alakjait. Utána közösen meghallgatják egymás gondolatait.</p>

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység			
<p>7. Többszörözés felbontása két többszörözés egymásutánjára; többszörözés szorzással és osztással ($\cdot 5$); két, több gép összekapcsolás</p> <p>Kiemeli a házi feladat egyik megoldását, amelyben az egyik tényezőt szorzatra bontották, és két (három) szorzást végeztek egymás után egy helyett. (Pl. a 8-at előbb 5-tel szorozták, s ezt a 40-et 3-szorozták, vagy a 15-öt előbb 2-szerezték, aztán a 30-at négyszerezték, esetleg a 15 kétszeresét kétszerezték, és újra kétszerezték).</p> <p>„Néha könnyebben tudunk így számolni, hogy „szétszorozzuk” valamelyik számot, és részletenként használjuk fel.”</p> <p>Felírja nagyobb méretben a táblára, és mellé felvázolja a megfelelően tagolt képet:</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; gap: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 8 \cdot 15 \\ \swarrow \searrow \\ 8 \cdot 5 \cdot 3 \end{array}$ </div> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$8 \cdot 5$</td> <td style="padding: 5px;">$8 \cdot 5$</td> <td style="padding: 5px;">$8 \cdot 5$</td> </tr> </table> </div> <p><i>Szervezés:</i> a szorzó-osztó-változtató kártyák előkészítése (4. melléklet), és az 5. melléklet fóliáinak kikészítése hurkapálcákkal.</p> <p>„Hogyan tudjuk kiszámítani a $7 \cdot 12$-t? A 7-et akarjuk 12-szerezni.”</p> <p>Felteszi a megfelelő 7×12-es fóliát, és a felezővonalra illeszti a hurkapálcát. Várja a leolvasást.</p> <p>„Rakjátok ki a $\cdot 12$-es változtató kártyát, és tegyétek alá azt a kettőt, amire ezt most kicseréltük!”</p> <p>„Számoljunk a kirakás szerint!”</p> <p>Felteszi a 15×24-es fóliát.</p> <p>„Szeretnénk megtudni, hogy ezen a területen hány kő van!”</p> <p>„Hogyan bonthatnánk fel, hogy könnyebben számoljunk?”</p> <p>Szükség szerint a hurkapálcákkal a tanító mutat egy-egy egyenlő részekre tagolást, hogy két vagy több tényező szorzatára bontsák a 24-et vagy a 15-öt.</p> <p>„Induljunk most a 15-ből, ezt változtassa a változtató kártya a 24-szeresére! Cseréljétek a $\cdot 24$-es változtató kártyát kettőre vagy háromra!”</p>	$8 \cdot 5$	$8 \cdot 5$	$8 \cdot 5$	<p>Megfigyelik a tanító megerősítő közlését és a felírást.</p> <p>Előkészítik a változtató kártyákat.</p> <p>Saját elgondolásait elmondják, pl.: összeadjuk 12-szer a 7-et, vagy a 12-t 7-szer; a 10-szer 7-hez hozzászámolunk még 7+7-et...</p> <p>A 7 hatszorosát kétszerezzük.</p> <p>A $\cdot 12$ alá teszik a $\cdot 6 \cdot 2$ kártyákat.</p> <p>$7 \cdot 12 = 7 \cdot 6 \cdot 2$; $7 \cdot 6 = 42$, és $42 \cdot 2 = 84$</p> <p>Egy-egy sorban 24 (megszámlálják), és 15 sor van. Ez 15-ször 24 kő.</p> <p>Úgy is mondhatjuk, hogy egy-egy oszlopban van 15, és 24 oszlop van, ez 24-szer 15.</p> <p>Többféle ötletet is elmondhatnak:</p> <p>Pl. ahogy a minták vannak, négyes szélességű darabok területét számoljuk, és azt szorozzuk 6-tal. $15 \cdot 4 \cdot 6$</p> <p>Vagy lehet három hosszú folyosót kijelölni – meg is mutatja a hurkapálcákkal –, és a 24 ötszörösét szorozzuk 3-mal.</p> <p>Lehet 2 oszlopot összefogni, mert abban kétszer 15, azaz 30 kő van, ilyen szélesebb részekből 3-at összefogva, az 90, és ilyen 6 kő szélességűből 4 van: négyszer 90, az 360.</p>
$8 \cdot 5$	$8 \cdot 5$	$8 \cdot 5$		

„Induljunk a 24-ből, ezt változtassátok a 15-szörösére két lépésben!”

„Hogyan számoltad ki a 24 vagy a 72 ötszörösét?”

„Fele ilyen hosszú sorokból hány sorban van ugyanannyi kő, mint öt 24-es hosszú sorban?” – mutatja a megfelelezt, 12-es sorokat.

„72 ötszörösét is számolhatjuk úgy, hogy a felét 10-szerezzük.” – mutatja az öt 3-szor 24-es tömböt, illetve ennek az ötszörösét megfeleleztve hurkapálcával.

A harmadik téglalapot teszi a fóliára.

„Hány kő van ezen a folyosódarabon?”

„Tegyétek ki változtató kártyákkal a szorzást, ahogyan elvégeznétek!”

A 2. feladatlap két feladatának megoldását önálló munkára hagyja; szükség szerint segítve az értelmezésben.

A megoldások ellenőrzése a két gép szabályának megfogalmazására, az összekapcsolt gép táblázatának kitöltésére, és az összetett szabály megfogalmazására tér ki; a második feladatban pedig a két nyíl jelentésének kimondása mellett további összefüggések leolvasatása történik.

Pl.: „Keressetek olyan számpárokat, amelyek közül az elsőnek tízszerese a második! Milyen úton járhatok köztük? (A kétszerezés és ötszörözés összekapcsolása.) Keresd a számok 20-szorosát! Milyen úton jutsz el a szám húszszorosáig? Keresd a számok felét! Negyedét! Tizedét! Huszonötödét...”

8. Különféle számrendszerekben az alapszámmal való szorzás az érték értékének többszörözésével; a helyiérték-táblázatban való balra lépés.

Szervezés: az Ötös-ország játékpénzeit (Ak/19.) (2. melléklet) készítetteti elő a hozzátartozó táblázattal és pótlapokkal.

„Rakjatok magatok elé 14 Ft-ot, és váltsátok be nagyobb értékekre!”

„Írjátok a táblázatba a kapott érték számát! Ötös-országban így írják a tizenegyet:

$A \cdot 24$ alá teszik a $6 \cdot 4$ kártyákat, a $8 \cdot 3$ kártyákat vagy pl. a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ -at. A kirakásnak megfelelően elvégzik a szorzást két lépésben: $15 \cdot 6 = 90$ és $90 \cdot 4 = 360$, vagy $15 \cdot 8 = 120$ és $120 \cdot 3 = 360$, vagy $12 \cdot 2$ az 30, $30 \cdot 2$ az 60, $60 \cdot 2 = 120$ és $120 \cdot 3 = 360$.

$A \cdot 15$ alá kerül a $3 \cdot 5$; $24 \cdot 3 = 72$, és $72 \cdot 5 = 360$, vagy fordítva: $5 \cdot 3$; $24 \cdot 5 = 120$, és $120 \cdot 3 = 360$.

Megpróbálhatják tudatosítani a számítás módját.

A kép alapján leolvassák, hogy ha soronként csak 12 követ számolnak, akkor 10 sorban van ugyanennyi. $24/2 = 12$ és $12 \cdot 10 = 120$.

$72/2 = 36$, és $36 \cdot 10 = 360$.

Öt sor van, mindegyikben 32 kő. Ez a 32-nek az 5-szöröse. Vagy egy oszlopban van 5 kő, és 32 ugyanilyen oszlop. Ez az 5-nek a 32-szerese.

A 32-ből indulva az ötszörösét kirakhatják a felének a tízszereseként: az 5-öst cserélve a $2 \cdot 10$ -re. Az 5-ből indulva, ezt pl. négyszerezhetik, a négyszerest kétszerezik, s ezt újra négyszerezik vagy fordítva, vagy $\cdot 2$ -re és $\cdot 16$ -ra cserélik a $\cdot 32$ -t.

Kiteszik a 14 egyest, és elvégzik a váltást.

Egy vállalkozó gyerek elmondja a váltást: 5 egyesért adnak 1 ötöst, így 2 ötös és 4 egyes lesz beváltás után. Beírják az érték számát a táblázatba a 3. lépés mintája szerint.

24₅

„Tegyétek ki a tizennégy ötszörösét!”

Az eredményt beírja és beírja a táblázat következő sorába.

Elmondhatja az ötszörözés kétféle útját: darabszám szerinti ötszörözés és beváltás, vagy közvetlenül: érték szerinti ötszörözés.

Hasonlóan kirakhatja a 18 ötös számrendszerbeli alakját, (33) és az ötszörösét (330); (s ha az idő engedi: a 21-et (41) és ötszörösét (410)).

„Rakjatok ki 3 huszonötöst és 2 ötöst! – felírja a táblázatba a 3 2 0 számot. – Anélkül, hogy megállapítanátok, hogy mennyit ér ez együtt, meg tudjátok-e mondani, hogy hogyan írhatom ennek a számnak az ötödrészét?”

A játékpénz-készletből a százasokat, tízeseket és egyeseket veteti elő.

„Rakjatok ki a magyar pénzekkel 26 Ft-ot; lehet mindjárt használni a tízeseket és egyeseket!”

„Tízszerezd a 26-ot a lehető legegyszerűbben!”

Felírja a táblán rajzolt helyiérték-táblázatba:

Ezer	Száz	Tíz	1	
		2	6	26
	2	6	0	260

Közlés: „A mi országunk Tízország, mert 10 egyesből lesz 1 tízes, 10 tízes és 1 százast, 10 százast váltható be 1 ezresre. Tízszerezni ezért nagyon könnyű: minden érme helyett tízszer értékesebbet teszünk, a 2 tízes helyett tízszer értékesebb érméből lesz 2, a 6 egyes helyett tízszer értékesebb érméből lesz 6, és persze 0 egyes lesz.”

Kitehetnek 10 ötöst és 20 egyest, aztán ötönként egy-egy nagyobb értékűre váltják be. Az elmúlt órai tapasztalatok alapján azonban közvetlenül is tehetnek a 2 ötös helyett 2 huszonötöst, a 4 egyes helyett 4 ötöst.

Aki már jól érti az ötszörözést a hasonló, alapszámmal való szorzás alapján, kitálhatja, hogy a szám ötöde 3 2 alakú lesz.

Ha azonban kevesen értik még az érték szerinti szorzás lényegét, akkor ne magyarázza el, hogyan fejtette meg a találós kérdést; inkább rakják ki az érméket, és felváltás után darabszám szerint vegyék az ötödét, vagy értékük szerint mind-egyik érme helyett egy ötödakkora értékű érmét tegyenek.

Megfogalmazzák, hogy a 26, az 2 tízes és 6 egyes.

A tízesek helyett százasokat, az egyesek helyett tízeseket tesznek.

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>9. Házi feladat Készítetek helyiérték-táblázatot! Ebbe írjátok be a következő számokat: 32, 48, 51, 17, 29, és mindegyik alá a tízszeresét is! Számítsátok ki a következőket: $32 \cdot 30$; $48 \cdot 20$; $51 \cdot 20$; $17 \cdot 50$ és $29 \cdot 30$. Milyen tanácsot tudtok adni a szorzások elvégzéséhez? Szabad zsebszámológéppel ellenőrizni, hogy sikerült-e ezeket a nehéz számításokat hibátlanul elvégezni!</p>	<p>Feljegyzik a feladatokat. Például úgy lehet 30-cal szorozni a 32-t, hogy kiszámítom a 3-szorosát, és azt tízszereszem. Vagy úgy, hogy a 10-szeresét még háromszorozom.</p>