ALAKZATOK ÉS TULAJDONSÁGAIK

18. modul

KÉSZÍTETTE: ZSINKÓ ERZSÉBET
(A 7. ÓRA LEÍRÁSÁHOZ FELHASZNÁLTUK LÉNÁRT ISTVÁN ÖTLETEIT)

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A téglatest és a kocka felismertetése, szakszerű megnevezése és jellemzése a tudatosított tulajdonságok és viszonyok alapján (téglatest, kocka, gömb, téglalap, négyzet, kör). A valószínűségi szemlélet formálása játékok, kísérletek kapcsán végzett megfigyelésekkel. A relatív gyakoriság fogalmának alakítása. Az egyjegyű osztóval végzett írásbeli osztás ellenőrzési módszereinek bővítése.
Időkeret	6+1 (Geometria a gömbön) óra
Ajánlott korosztály	9–10 évesek; 4. osztály; 30–31. hét
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: kereszttantervi **NAT szerint**: Környezeti nevelés, Énkép, önismeret, Tanulás, **Kompetencia terület szerint:** szociális és környezeti. Szűkebb környezetben: saját programcsomagunkon belül: 8. modul: Nagyítás, kicsinyítés. Térfogatok összehasonlítása; mérés. 13. modul: Alkotások térben, síkban. 14. modul: A szorzás és osztás műveleti tulajdonságai. Tükrözés, eltolás síkban, Elforgatás. Parkettaminták tervezése; szimmetria-tulajdonságok. 17. modul: Írásbeli osztás egyjegyű osztóval. Ajánlott megelőző tevékenységek: 13. modul: Alkotások térben, síkban. 14. modul: A szorzás és osztás műveleti tulajdonságai. Tükrözés, eltolás síkban, Elforgatás. Parkettaminták tervezése; szimmetria-tulajdonságok. 17. modul: Írásbeli osztás egyjegyű osztóval. Ajánlott követő tevékenységek: 19. modul: Szöveges feladatok.
A képességfejlesztés fókuszai	Számlálás, számolás: Írásbeli osztás egyjegyű osztóval. Becslés, mérés, mennyiségi következtetés: Alakzatok méretes tulajdonságainak vizsgálata. A hányados becslése. Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás: Szöveges feladatok az írásbeli osztás gyakorlására. Rendszerezés, kombinativitás: Alakzatok legfontosabb tulajdonságainak összegyűjtése. Egy kísérlet lehetséges elemi eseményeinek kombinatorikus áttekintése. Induktív, deduktív lépések: Alakzatok néhány tulajdonságának tudatosítása a konkrét alakzatokon megfigyelt tulajdonságok alapján.

AJÁNLÁS

Geometriai alakzatokkal és tulajdonságaikkal már korábban is találkoztak a gyerekek. Ez a modul néhány geometriai tulajdonság és reláció tudatosítására és a geometriai ismeretek rendszerezésére, a rendszerezés lehetséges formájára tesz javaslatot. Ilyen tulajdonságok, illetve kapcsolatok: üreges, tömör, szögletes, konvex, lyukas, szimmetrikus, görbült, síkbeli, sokszög, oldalak, szögek egyenlősége, lapok, élek párhuzamossága, merőlegessége.
Figyelmet fordítunk a téglatest, kocka, téglalap, négyzet, gömb, kör tulajdonságainak vizsgálatára, tudatosítására és rendszerezésére.
Ezekhez alkalmas tevékenységek a testek, síkidomok szétválogatása, rendezése különféle tulajdonságaik szerint.

Önálló melléktémaként foglalkozunk az írásbeli osztással, amelynek gyakorlására, illetve ellenőrzésére további lehetőségeket kínálunk. A gyakorlást érdekes osztásokkal igyekszünk motiválni.

A valószínűségi játékok minden bizonnyal nagy érdeklődést keltenek majd a gyerekek körében. A játékok során további tapasztalatokat szerezhetnek események relatív gyakoriságáról.

TÁMOGATÓRENDSZER

C. Neményi Eszter–Káldi Éva: *Matematika tankönyv,* általános iskola 4. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
C. Neményi Eszter–Káldi Éva: *Matematika munkafüzet,* általános iskola 4. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
C. Neményi Eszter: *Geometria,* Tantárgypedagógiai füzetek; ELTE TÓFK

ÉRTÉKELÉS

A tanulók tevékenysége során megfigyeljük, hogy ki-ki
– milyen aktívan vesz részt a csoportos tevékenységekben;
– ismeri-e a téglatest, kocka, téglalap, négyzet legfontosabb tulajdonságait, a fogalmak egymáshoz való viszonyát;
– szétválogatásokkal képes-e kiemelni néhány geometriai tulajdonságot, relációt;
– képes-e kísérletekben gyűjtött adatok rendezésére;
– meg tudja-e ítélni összetett esemény bekövetkezését;
– képes-e sejtést megfogalmazni véletlen eseményekkel kapcsolatban; sejtését össze tudja-e vetni a megfigyelt események gyakoriságával;
– tud-e a megismert számkörben egyjegyű számmal osztani; az algoritmust helyesen alkalmazza-e, ha nem, akkor melyik lépésben követ el hibát, vannak-e számolási hibái;
– kialakult-e az igénye a művelet eredményének ellenőrzésére, milyen gyakran és módon végzi a műveletek ellenőrzését.

MODULVÁZLAT

Időterv:

1. óra: I/1–2., II/1–3.
2. óra: II/4–8.
3. óra: II/9–11.
4. óra: II/12–13.
5. óra: II/14–16.
6. óra: II/17–19.
7. óra: II/20.

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	**Kiemelt készségek, képességek**	**Célcsoport / A differenciálás lehetőségei**	**Tanulásszervezés**		**Eszköz** (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag-tartalmak)
				Munkaformák	**Módszerek**	
I. Ráhangolódás, a feldolgozás előkészítése						
	1. A házi feladat ellenőrzése	számolás	egész osztály	frontális	megbeszélés, érvelés	6. feladatlap, 2., 3., 4. feladat
	2. Számok oszthatóságának vizsgálata; tippelés esemény bekövetkezésére	sejtés	egész osztály	frontális	játék	számkártyák, kalap, korongok
II. Az új tartalom feldolgozása						
	1. Események gyakoriságának megfigyelése adott kísérlet során	megfigyelő-képesség	egész osztály	csoportmunka, majd frontális	játék	dobókockák, játéktábla, bábuk, események, (1., 2. melléklet), 1. feladatlap, 1. feladat
	2. A lehetséges elemi események kombinatorikus áttekintése; azok összegyűjtése, amelyek bekövetkezése esetén egy-egy állítás igaz (azaz egy összetett esemény bekövetkezik).	összehasonlítás	egész osztály (differenciálhatunk a feladatok mennyiségében és minőségében is)	önálló munka	feladatmegoldás	1. feladatlap, 2. feladat

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	**Kiemelt készségek, képességek**	**Célcsoport / A differenciálás lehetőségei**	**Tanulásszervezés**		**Eszköz** (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag-tartalmak)
				Munkaformák	**Módszerek**	
	Egyszerre több esemény bekövetkezésének vizsgálata	összehasonlítás	gyorsabb gondolkodású gyerekek	páros munka	Feladatmegoldás	1. feladatlap 2. feladat
	3. Az elméleti relatív gyakoriság megállapítása néhány esetre	összehasonlítás, rendszerezés, kombinativitás	egész osztály (differenciálhatunk az indoklások igénylésében illetve a segítségnyújtásban.)	frontálisan irányított önálló munka	kísérlet, beszélgetés, vita, szemléltetés	4. melléklet
	4. A házi feladat megbeszélése	egész és rész viszonya	egész osztály	frontális	beszélgetés	
	5. Síkidomok vizsgálata, a sokszögek kiemelése	azonosítás, megkülönböztetés	egész osztály	csoportmunka	tevékenykedtetés	5. melléklet
	6. A sokszögek tulajdonságai (oldalak száma, egyenlősége, párhuzamossága, az oldalegyenesek metszése; átlók száma; sokszögek szögeinek mérése)	azonosítás, megkülönböztetés, rendszerezés, rész és egész viszonya, (a rész kiegészítő halmaza)	egész osztály (a feladatok minőségében differenciálható)	csoportmunka, tárlatlátogatás	tevékenykedtetés	5., 6. melléklet, színes fonalkarikák, A/3-as lapok, 2. feladatlap, 1. feladat, hajtogatott derékszög, annak fele és harmada
	7. Síkidomok vizsgálata szimmetria-tulajdonságok szerint: **– tükrösség, a tükörtengelyek száma (hajtogatás és tükörhasználat; körülrajzolt forma átfordítása a túloldalára);** **– forgásszimmetriák, a forgásszimmetria rendje (másod-, harmad-, negyed-, ötöd-, hatodrendű forgásszimmetria),** **– körszimmetria (forgatások a megsejtett középpont körül).**	rendszerezés	egész osztály (a feladatok mennyiségében és minőségében differenciálható)	önálló munka	tevékenykedtetés	5. melléklet, zsebtükör, 2. feladatlap, 2., 3. feladat, 7., 8. melléklet

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	**Kiemelt készségek, képességek**	**Célcsoport / A differenciálás lehetőségei**	**Tanulásszervezés**		**Eszköz** (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag-tartalmak)
				Munkaformák	**Módszerek**	
	8. A téglalap és a négyzet vizsgálata; a legfontosabb tulajdonságok összegyűjtése (oldalszám, oldalak egyenlősége, kölcsönös helyzete; átlók egyenlősége; szögek, szimmetriák)	rendszerezés	egész osztály	önálló munka	feladat-megoldás	2. feladatlap, 4. feladat, 9. melléklet
	9. A házi feladat ellenőrzése	hibajavítás	egész osztály	frontális és önálló munka	ellenőrzés	2. feladatlap, 4. feladat, 9. melléklet
	10. Tapasztalatszerzés arról, hogy melyik esemény következik be leggyakrabban. A relatív gyakoriság fogalmának intuitív megközelítése	megfigyelő-képesség	egész osztály, a játékszabályok lehetőséget nyújtanak a differenciálásra	csoportmunka	játék	5., 1., 10., melléklet, 3. feladatlap, 1. feladat, színes golyók, bábuk, dobókockák
	11. Testek vizsgálata: lapok, csúcsok, élek száma; lapok alakja, egybevágósága; lapok kölcsönös helyzete	megfigyelő-képesség	egész osztály	csoportmunka	játék	0413. modul 12. melléklet, 2. feladatlap, 5., 6. feladat, szívószál, 11., 12. melléklet, szívószálból alkotott testek
	12. Testek vizsgálata: élek egyenlősége; párhuzamossága, merőlegessége; metsző, párhuzamos és kitérő élek; egy csúcsban találkozó élek száma	megfigyelő-képesség	egész osztály	csoportmunka, páros munka	tevékeny-kedtetés	szívószálból alkotott testek, hurkapálcák, 11., 12. melléklet

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag-tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	13. Testek vizsgálata: néhány szimmetria-tulajdonság (szimmetria vizsgálata tükör segítségével; forgási szimmetriák megsejtése egyenes hengereknél, hasáboknál, egyenes gúláknál, görbült felületű testeknél)	megfigyelő-képesség, térlátás	egész osztály	csoportmunka, páros munka	tevékenykedtetés	a 12. melléklet és a 0413. modul 12. mellékleteiből megépített testek, fogvájó, tükör, olló, pingpong labda (vagy narancs, tojás, sárgarépa), 14. melléklet
	Házi feladat: 3. feladatlap 1. feladat	képzelet	egész osztály	frontális	bemutatás, megbeszélés	3. feladatlap, 1. feladat
	14. A házi feladat ellenőrzése	megfigyelő-képesség, térlátás	egész osztály	frontális	bemutatás, megbeszélés	3. feladatlap, 1. feladat, 13. melléklet
	15. Szöveges feladatok az írásbeli osztás gyakorlására; ellenőrzés visszaszorzással, zsebszámológép használatával	becslés, számolás	egész osztály	frontális, egyéni	feladatmegoldás	4. feladatlap, 1., 2. feladat, számológép
	16. Téglatestek vizsgálata (lapok, csúcsok, élek száma; lapok egybevágósága; lapok kölcsönös helyzete – merőlegesség, párhuzamosság; élek egyenlősége, párhuzamossága, merőlegessége); téglatestek alak szerinti sokfélesége; a kockák alak-azonossága; a téglatestek szimmetria-tulajdonságai, a kocka szimmetriái	rendszerezés	egész osztály	csoport, páros, majd önálló munka	tevékenykedtetés, feladatmegoldás	testmodellek, Dienes készletek, korongok, olló, 4. feladatlap, 3., 4., 5., 6. feladat, 15. melléklet, színes rudak készlete, tükör
	17. A házi feladat ellenőrzése	hibajavítás	egész osztály	önálló	ellenőrzés	4. feladatlap, 5., 6. feladat, 15. melléklet

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	**Kiemelt készségek, képességek**	**Célcsoport / A differenciálás lehetőségei**	**Tanulásszervezés**		**Eszköz** (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag-tartalmak)
				Munkaformák	**Módszerek**	
	18. Érdekes osztások; osztás több lépésben; visszaszorzással való ellenőrzés	becslés, számolás, következtetés	minőségileg és mennyiségileg is differenciálható	csoport, frontális, önálló	feladatmegoldás	színesrúd-készlet, számológép, 5. feladatlap, 1–4. feladat, 16. melléklet
	19. Valószínűségi játék és kísérlet; gyakoriságok alakulása; relatív gyakoriságok alakulása a kísérletek számának növekedése közben. Ábrázolás	megfigyelés, következtetés	egész osztály	csoportmunka	játék	17. melléklet
	20. Szimmetria vizsgálata körön és gömbön	megfigyelő-képesség, térlátás, kombinativitás	egész osztály, a gömbi tevékenységeknél differenciált	egyéni és csoportmunka	tevékenykedtetés	6. feladatlap, gömbi eszközök, tükör, celofán, pingpong-labda, 18. melléklet

A FELDOLGOZÁS MENETE

Az alábbi részletes leírás célja elsősorban egyféle minta bemutatása. Nem lehet és nem szabad kötelező jellegű előírásnak tekinteni. A pedagógus legjobb belátása szerint dönthet a részletek felhasználásáról, módosításáról vagy újabb variációk kidolgozásáról.

<table>
<tr><td colspan="2">Alakzatok és tulajdonságaik</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. Ráhangolódás, a feldolgozás előkészítése</td></tr>
<tr><th>Tanítói tevékenység</th><th>Tanulói tevékenység</th></tr>
<tr><td>1. A házi feladat ellenőrzése
A 6. feladatlap 2. feladatának ellenőrzésénél mondják el a gyerekek azt is, hogy milyen sorrendben végezték el a műveleteket, és mi lett a részfeladatok eredménye.

A 3. feladat megbeszélésénél igényeljük a gondolkodás módjának az elmondását is.

A 4. feladatban, ha különböző számhármasokat mondanak a gyerekek, beszéljük meg, hogy melyik számhármasban mi a hiba, és miért jó a (2843, 2844, 2845) számhármas.
Ellenőrzéskor helyezzük a táblára a négyjegyű számokat olyan számkártyával, amelyeken a számjegyek gyurmaragasztóval vannak rögzítve. $\boxed{2843}$, $\boxed{2844}$, $\boxed{2845}$</td><td>720 : 3 + 240 = 240 + 240 = 480
342 + 240 / 3 = 342 + 80 = 422
(342 + 240) / 3 = 582/3 = 194

Várható megoldás:
1. A középső szám 5-szöröse egyezik meg az 5 szám összegével, hiszen a legnagyobból 2-t elveszünk, és hozzáadjuk a legkisebbhez, az utolsó előttiből egyet elveszünk, és hozzáadjuk a másodikhoz, akkor a középső számhoz jutunk.
2. A számok összegének az ötödrésze a középső számot eredményezi.

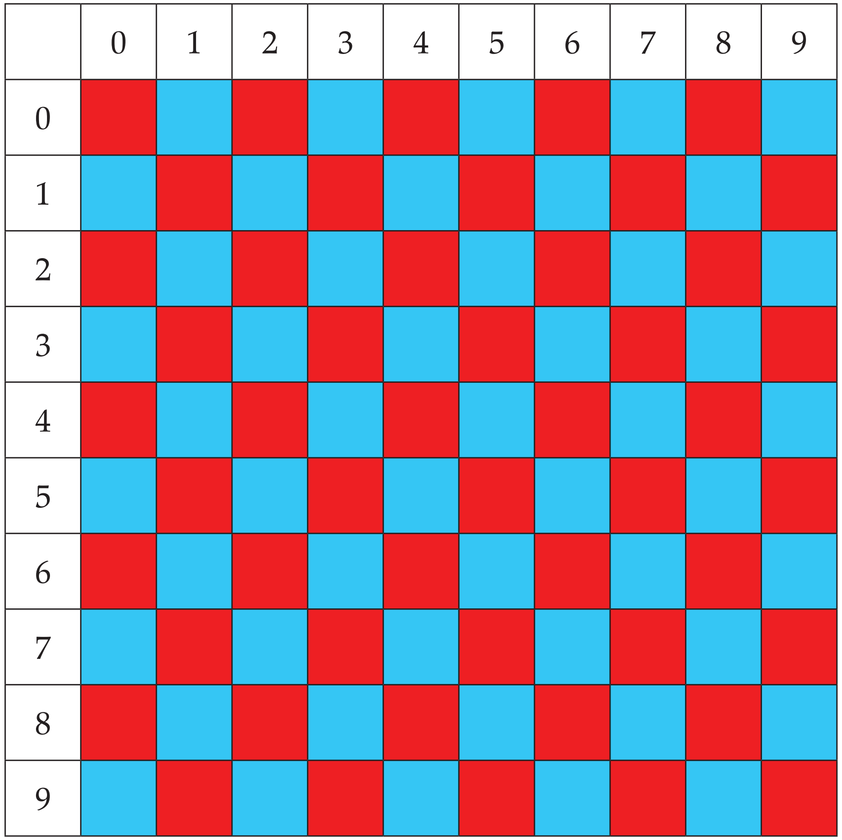
Elképzelhető, hogy a három szám összege 8532, de a számok nem egymást követő számok.
Az is elképzelhető, hogy a számok egymást követő számok, de összegük nem 8532.
A (2843, 2844, 2845) számhármas mindkét feltételnek megfelel.</td></tr>
<tr><td>2. Számok oszthatóságának vizsgálata; tippelés esemény bekövetkezésére
„Most ezeknek a számoknak a számjegyeiből fogunk újabb feladatokat alkotni. Beleteszem a számjegyeket egy kalapba (közben csinálja is), összekeverem, és kihúzok közülük négyet. Ezeket a húzás sorrendjében egymás mellé helyezem (elhelyezi a táblán úgy, hogy a számokat még ne lehessen látni), így egy négyjegyű számhoz jutunk. Tegyetek magatok elé egy piros korongot, ha úgy tippelitek, hogy a szám páros, és fordítsátok a korongot a kék oldalára, ha a számot páratlannak tippelitek. (Megmutatja a négyjegyű számot.)
Aki jól tippelt, az hagyja maga előtt a korongot, aki nem, az tegye vissza a dobozba. Öt játék után összeszámoljuk, kinek hány korongja lett, és kihirdetjük, ki lett a nyertes.”</td><td>Néhány tanuló kaphat olyan jutalmat vagy előnyt, hogy ő húz egy számkártyát, és ezt láthatja is.
Közben rájönnek, hogy a szám párosságát nem befolyásolja az első három kártya, de a párosság esélyét bizony befolyásolja. Ha az első három húzásban benne volt mind a két páratlan számjegy, akkor már biztos, hogy páros lesz a szám.</td></tr>
</table>

„Folytassuk a játékot öt kártya húzásával. Az első négyből ismét négyjegyű számot rakunk ki, ez lesz az osztandó (ezt a számot láthatjátok), az ötödik szám pedig az osztó, ezt eltakarom, de emlékezzetek rá, hogy milyen számjegyeket tettünk a kalapba! Most azt kell megtippelnetek, hogy 0 lesz az osztási maradék, vagy nem. Aki azt tippeli, hogy 0 lesz a maradék, azaz az utoljára húzott szám osztója lesz a kirakott négyjegyű számnak, az pirosra fordítsa a korongját, a többiek kékre. Ismét öt játékot játszunk." Mielőtt elkeserednének azok, akik nem nyertek, és büszkék lennének a nyertesek, beszéljük meg, hogy ezekben a játékokban sok múlott a szerencsén. Ha lesznek gyerekek, akik megfogalmazzák, hogy az első játékban bizony nagyobb volt annak az esélye, hogy páros számot rakunk ki, hiszen több volt a páros számjegy, mint a páratlan, akkor őket dicsérjük meg a megfigyelésükért.	Az oszthatóság esélyét nem túl könnyű megítélni. Az osztó helyére kerülhet a 2, 3, 4, 5, 8 bármelyike. A 2-nek, 4-nek és a 8-nak nagyobb esélye van erre, mint a 3-nak és az 5-nek, de azért ez is előfordulhat. Ha 2 az osztó, akkor nagy esély van arra, hogy 0 lesz az osztási maradék, de ha 5 az osztó, akkor nem lehet 0 a maradék. Ha 4 az osztó, kicsit nagyobb annak az esélye, hogy 4-gyel osztható számot rakunk ki, de ha 3 vagy 8 az osztó, nem könnyű megtippelni, hogy 0 lesz-e a maradék.
II. Az új tartalom feldolgozása	
1. Események gyakoriságának megfigyelése adott kísérlet során *Szervezés:* 4-6 fős csoportok kialakítása, csoportonként egy játéktábla (1. melléklet), az eseményeket tartalmazó kártyák (2. melléklet), 2 dobókocka és minden játékosnak egy bábu kiosztása. „Játszani fogunk. Jelöljétek ki a csoportban, ki melyik pályán fog lépni a bábujával! Minden játékos válasszon egy kártyát, ez lesz az ő játékszabálya. Akkor léphet a játéktáblán a bábujával, ha a kártyán lévő állítás igaz a két kockával kidobott számra. Az nyeri a játékot, aki először célba ér." „A következő játékokban a csoportok versenyeznek egymással, ezért az egész osztályban egyetlen kártyakészletet használunk. Két kártyát kell választaniuk a csoportoknak. Először dugjátok össze a fejeteket, és beszéljétek meg, melyik két állítást szeretnétek választani. Persze az is lehet, hogy addigra, mire ti választhattok, már nem lesznek meg ezek az állítások. Ezért jó, ha többféle „nyerő" párt is kigondoltok. Az első játékban akkor léphettek, ha mindkét állítás igaz lesz a dobott számokra."	A gyerekek játék során szereznek tapasztalatot az események bekövetkezési gyakoriságáról. A gyerekek csoportban megvitatják, melyik két esemény együttes bekövetkezésének van nagyobb esélye. Megfigyelhetik, hogy ha pl. bekövetkezik az az esemény, hogy ‚Mindkét szám páros', akkor az is igaz lesz, hogy ‚A számok összege páros., Ha igaz az, hogy ‚A számok összege páros' akkor még nem biztos, hogy ‚Mindkét szám páros'.

„A 2. játékban akkor léphettek, ha az egyik kártya állítása igaz, a másik viszont nem igaz.” A játék során a tanító dob a dobókockákkal, vagy egymás után dobnak a csoportok. „Az 1. feladatlap 1. feladatában előre meg kell tippelnetek, hogy melyik esemény hányszor fog bekövetkezni 30 dobás során. Mindenki önállóan tippeljen, aztán beszéljétek meg, ki melyik esemény bekövetkezését figyeli a csoportban. A dobást követően mindenki mondja meg, hogy az általa megfigyelt esemény bekövetkezett-e a kísérlet során. A táblázat második sorában húzzatok egy strigulát ahhoz az eseményhez, amelyik bekövetkezett a kísérletnél. 30 dobás után számoljátok össze, melyik esemény tippelésénél hányat tévedtetek. Melyik eseménynél tévedtetek kicsit, melyiknél többet? Ki tévedett a csoportban a legkevesebbet?” (Szükség esetén példa mutatásával értelmezzük az eseményeket!)	Felismerhetik, hogy pl. az ‚Összegük kisebb 7-nél és az „Összegük nem kisebb 7-nél” közül az egyik, de csak az egyik bármely dobásnál igaz lesz, így mindig léphetnek. Jó választás pl. a ‚A két szám egyenlő’ és a ‚A két szám összege 7’, hiszen ezek nem lehetnek egyszerre igazak. A gyerekek tippelése jól jelzi, hogy érzik-e az események bekövetkezési esélye közti különbséget. Megfigyelik, hogy melyik esemény hányszor következik be a kísérletek során.
2. A lehetséges elemi események kombinatorikus áttekintése; azok összegyűjtése, amelyek bekövetkezése esetén egy-egy állítás igaz (azaz egy összetett esemény bekövetkezik). Problémafelvetés: „Figyeljétek meg, melyik esemény következett be gyakrabban az, hogy ‚A számok szorzata páros’ vagy az, hogy ‚Mindkét szám páros’?” „Mi lehet az oka annak, hogy az egyik esemény gyakrabban következik be a kísérletek során, mint egy másik esemény?” Hallgassuk meg a gyerekek véleményét, saját szavaikkal megfogalmazott indoklásaikat! Csak ezután gyűjtsük össze, mely dobások esetén lesznek igazak az állítások. (1. feladatlap, 2. feladat). Kezdjük el közösen a táblázatok kitöltését, aztán folytassák a gyerekek önállóan! Az ellenőrzést a 3. melléklet fóliáival végezhetjük. „Mit mutatnak ezek a táblázatok?” Beszélgessünk ezekről a táblázatokról, hiszen ekkor tudatosodhat a gyerekekben, hogy miért van nagyobb esély ez egyik esemény bekövetkezésére, mint egy másikéra.	 A gyerekek megfigyelik a kísérletek eredményét, és magyarázatot keresnek a tapasztalataikra. Megfogalmazzák az elképzeléseiket, amely indokolja, hogy az egyik esemény miért következik be gyakrabban, mint egy másik. Táblázatok kitöltésével szemléletessé teszik a kísérlet lehetséges kimeneteleit, és kigyűjtik azokat az elemi eseményeket, amelyek bekövetkezésekor az adott állítás igazzá válik. Például, az első táblázat megmutatja, hogy az az esemény, hogy ‚Mindkét szám páros’, bekövetkezik akkor is, ha mindkét dobás 2-es, vagy az egyik 2-es, a másik 4-es… Azt láthatjuk erről a táblázatról, hogy 9-féle dobás esetén húzhatunk strigulát. A 2. esemény pedig 18-féle dobás esetén bekövetkezik, így ennek nagyobb az esélye, mint az elsőnek…

Egyszerre több esemény bekövetkezésének vizsgálata Páros munkában vizsgálhatják a gyerekek összetett események bekövetkezését. Válasszanak ki a gyerekek egyszerre két eseményt, és jelöljék az előző táblázathoz hasonlóan, mely dobásoknál következik be egyszerre a két kiválasztott esemény. Segíthet a fóliára készített táblázatok egymásra helyezése.	Összetett események egyszerre való bekövetkezését vizsgálják. Megfigyelik és táblázatban jelölik, hogy mely dobások esetén következik be mindkét esemény.
3. Az elméleti relatív gyakoriság megállapítása néhány esetre „Készítsétek elő a számkártyákat 0-tól 9-ig! (4. melléklet) Keverjétek össze a kártyákat, és véletlenszerűen húzzatok ki közülük egy lapot! – Emeljétek fel a páros feliratú kártyát, ha úgy gondoljátok, hogy az osztályban több tanulónál lesz a kihúzott szám páros, és a páratlan kártyát emeljétek fel, ha úgy gondoljátok, hogy több tanulónál lesz a szám páratlan!” Néhány kísérlet után: „Írjátok fel az egyik sárga kártyára, szerintetek hány tanulónál lesz a szám páros, és hány tanulónál lesz a szám páratlan!” Ha a gyerekek közül elég sokan írják az osztálylétszám feléhez közeli számot, már érzik, hogy a páros és a páratlan szám húzásának ugyanakkora az esélye. „Emelje magasra a kártyáját, aki páros számot húzott!” „Hányan húztak páratlan számot?” Végezzük el még néhányszor ezt a kísérletet, és ha a tippelések és a kísérletek közelednek egymáshoz, vessük fel a kérdést: „Mi lehet annak az oka, hogy közel ugyanannyi tanulónál volt páros, illetve páratlan szám?” „Ezután két lapot húzunk a kártyák közül úgy, hogy először kihúztok egy kártyát, azt leírjátok a füzetbe, aztán visszateszitek a kihúzott kártyát a többi közé, összekeveritek a lapokat és húztok egy másik számot.” – „Emeljétek fel a páros feliratú kártyát, ha úgy gondoljátok, hogy az osztályban több tanulónál lesz a számok összege páros, mint páratlan, és a páratlan kártyát emeljétek fel, ha úgy gondoljátok, hogy a páratlan összegből lesz több!” A kísérletet többször is érdemes elvégeztetni (közben a tanító jegyezze a táblára, hány tanulónál volt páros, hánynál páratlan az összeg, és a játék kedvéért azt is, hányan tippeltek jól). Néhány kísérlet után: „Mit gondoltok, a következő húzásnál hány tanulónál lesz páros az összeg? Írjátok fel egy sárga kártyára!”	A gyerekek néhány kísérlet alapján, a bekövetkezések számának megfigyeléséből megsejtik, hogy ugyanakkora eséllyel húznak páros, illetve páratlan számot. Magyarázatot keresnek a tapasztalataikra: a 10 szám közül 5 páros és 5 páratlan, tehát a számok fele páros, a másik fele páratlan. Most is azt tapasztalják, mint az előző kísérletekben, pedig itt nem 10 a lehetséges esetek száma, hanem 100. Azt, hogy a tapasztalatukat jól hasznosítják, kifejezik azáltal, hogy az osztálylétszám felére (vagy a feléhez közeli számra) tippelnek.

Ha sokan írják az osztálylétszám felét (vagy a feléhez közeli számot), kérdezzük meg a gyerekeket, miért gondolják úgy! *Engedjük, hogy véleményt cseréljenek, és védjék a vitában az álláspontjukat, de mi ne foglaljunk állást!*	Várhatóan sokan megfogalmazzák a tapasztalat valódi okát: ugyanannyi páros szám van a számok között, mint páratlan, egyiknek sincs nagyobb esélye, mert az összeg páros, ha mind a két kihúzott szám páros ($5\cdot5=25$-féle esetben), vagy mindkét szám páratlan ($5\cdot5=25$-féle esetben).
– „Ezután a kihúzott számokat nem összeadni kell, hanem össze kell szorozni. Emeljétek fel a páros feliratú kártyát, ha úgy gondoljátok, hogy az osztályban több tanulónál lesz a számok szorzata páros, mint ahány tanulónál páratlan, és a „páratlan” kártyát emeljétek fel, ha úgy gondoljátok, hogy több lesz a páratlan szorzat!”	Elképzelhető, hogy az előző kísérletek alapján most is úgy gondolják, hogy ugyanakkora eséllyel húznak olyan számokat, amelyek szorzata páros, és amelyek szorzata páratlan.
Néhány kísérlet után: „Mit gondoltok, a következő húzásnál hány tanulónál lesz páros az összeg? Írjátok fel egy sárga kártyára!” *Figyeljük meg, hány tanulót befolyásolt az eddigi tapasztalata. Ha sokan írják az osztálylétszám felét (vagy a feléhez közeli számot), folytassuk a kísérletet, és kérjünk előtte mindig tippet a szorzat párosságára.* *Ha elegendő időt szánunk erre a tevékenységre, megfigyelhetjük, hogyan értékelik át a gyerekek a véleményüket a tapasztalatok alapján.* Csak ezután vessük fel a kérdést:	A kísérletek tapasztalatai alapján azonban megsejthetik, hogy várhatóan több tanuló fog olyan számokat húzni, amelyek szorzata páros.
„Mi lehet annak az oka, hogy közel egyenlő számú tanulónál várható páros és páratlan összeg? És mi lehet annak az oka, hogy több páros szorzatot várunk, mint páratlant?”	Megfogalmazzák sejtésüket, és azt próbálják indokolni. Például, ilyen indoklást adhatnak: Ahhoz, hogy a szorzat páros legyen, elegendő, hogy az egyik húzott szám páros legyen, és mindegy, hogy milyen lesz a másik.
„Hogyan tudnánk meggyőződni arról, hogy valóban többféleképpen lehet a szorzat páros, mint páratlan, és arról, hogy ugyanannyiféleképpen lehet az összeg páros, mint páratlan?”	Az előző feladatok alapján javasolhatják az összes lehetséges eset előállítását, és azok közül a páros, illetve páratlan összegek, illetve szorzatok szétválasztását.
Várjuk meg a gyerekek javaslatait, majd az előző feladat mintájára készítsük el közösen (a gyerekek a füzetükben) a táblázatokat. Az első oszlopba írjuk az elsőnek húzott számkártyát, az első sorba pedig a másodiknak húzott számkártyát. Válasszunk ki a táblázatban egy mezőt! Az ő sorában és az oszlopában szereplő számot összeadjuk, és ha az összeg páros, akkor a mezőt pirosra színezzük, ha páratlan, akkor kékre.	A füzetükben elkészítik a szemléletes táblázatot, amelyről jól leolvasható, hogy egyenlő a páros és a páratlan összegek száma. Ezzel indokolják, hogy egyenlő eséllyel fordulnak elő ezek az események.



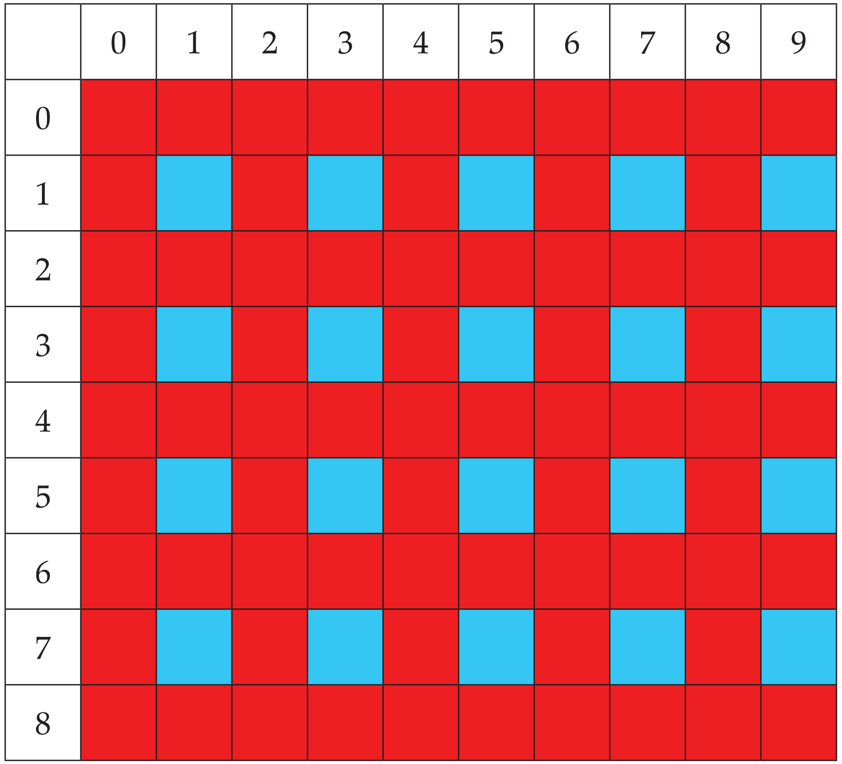
„Mit olvashatunk le ábráról? Hányféle eredménye (kimenetele) lehet a kísérletnek?
Hányféleképpen lehet az összeg páros, és hányféleképpen lehet az összeg páratlan?”
Az osztály képességei alapján dönthetünk úgy is, hogy az előző kérdéssor helyett csak azt vetjük fel, hogy: „mit mutat ez a táblázat?”
„Az összes lehetséges eseménynek mekkora részében páros a számok összege? És mekkora részében páratlan az összeg?”

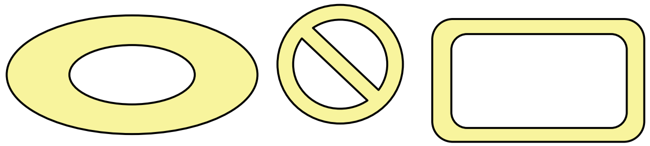
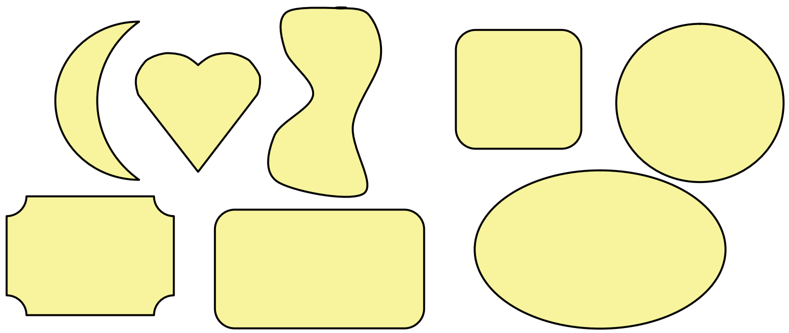
Házi feladat:
„Az előzőhöz hasonlóan végezzétek a színezést egy új táblázaton, de most a számok szorzatát figyeljétek!”
Kérjen meg néhány tanulót, hogy ők fóliára (vagy celofánra) készítsék el a táblázatot!

A kísérletnek 100-féle kimenetele lehet.

50-féleképpen lehet az összeg páros, és ugyancsak 50-féleképpen lehet az összeg páratlan.
A táblázat alapján azt is megfogalmazhatják, hogy a lehetséges esetek felében páros az összeg, ezért várható, hogy egyenlő eséllyel lesz az összeg páros, illetve páratlan.
A kis négyzetek fele, vagy másként kifejezve $\frac{50}{100}$-a piros (50 századában piros).

2. óra

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
4. A házi feladat megbeszélése „Néhányan fóliára készítették el a táblázatot, kérem, hogy mutassák be, milyen lett a táblázat színezése! Hány mezőben színeztetek pirossal, és hányban kékkel?”	A gyerekek közül néhányan elhelyezik az írásvetítőn a színezett táblázatot, és elmondják, hogy 75 mezőben színeztek pirossal és 25 mezőben kékkel. 
„Mit mutat a táblázat?”	Megfogalmazzák, hogy nagyobb esély van olyan számokat húzni, amelyek szorzata páros.
„Az összes lehetséges eseménynek mekkora részében páros a számok szorzata? És mekkora részében páratlan a szorzat?”	Megfigyelik a páros szorzat viszonyát az összes lehetőséghez, és kifejezik törttel: a kis négyzetek $\frac{75}{100}$-a piros (75 századában piros), $\frac{25}{100}$-a kék (25 századában kék).

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
5. Síkidomok vizsgálata, a sokszögek kiemelése Szervezési feladatok: 5 csoport kialakítása; a szerepek kiosztása: szóvivő, eszközfelelős, munkaszervező, íródeák. Az 5. melléklet kiosztása csoportonként, kiegészítve a készletet a 0413. modul 11. mellékletének egy-egy alakzatával. „Válogassátok külön azokat a lapokat, amelyekre igazak a tulajdonságok:	
– Csak egy vonal határolja. (Megvárja, amíg a gyerekek elvégzik a válogatást, és utána mondja a következő tulajdonságot.) Néhány alakzat esetében érzékeltessük a határoló vonalat azzal, hogy végighúzzák a gyerekek az ujjukat rajta!	A halmazszűkítés során az első tulajdonság alapján kimaradó elemek:  A második tulajdonság ezeket az elemeket zárja ki (nem csak egyenes vonalak határolják):
– A határoló vonala csak egyenes vonalakból, szakaszokból áll. (Megvárja, amíg a gyerekek elvégzik a válogatást.) Mi igaz azokra az alakzatokra, amelyeket kivettetek?	
– Hogy nevezzük azokat az alakzatokat, amelyeknek egyetlen határvonala csak egyenes vonalakból, azaz szakaszokból áll? Mindenki vegyen a kezébe egy síkidomot, amelyik nem sokszög. Mondjátok el egymásnak, miért nem mondhatjuk a kezetekben lévő alakzatra, hogy sokszög!”	Sokszögek. A gyerekek halmazszűkítéssel kiválogatják a sokszögeket.

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
6. A sokszögek tulajdonságai (oldalak száma, egyenlősége, párhuzamossága, az oldalegyenesek metszése; átlók száma; sokszögek szögeinek mérése) „Az óra további részében a sokszögek tulajdonságait fogjuk vizsgálni. Csak a sokszögeket hagyjátok magatok előtt! Minden csoport más válogatási szempontot kap.” Kiosztja a zöld, a rózsaszín és a narancssárga kártyákat a csoportoknak, mindegyik csoport mindegyik színű kártyából egyet kap (6. melléklet). Megkéri az eszközfelelősöket, hogy egy A/3-as lapot és egy fonalkarikát (kb. 70 cm hosszú fonalból készített) vegyen el a tanári asztalról. „Helyezzétek a lap szélére a sokszög feliratot, mert a lapra válogatjuk az összes sokszöget. A lapon helyezzétek el a fonalkarikát, és tegyétek bele a zöld lapra írt tulajdonságot. Válogassátok a karikán belülre az összes sokszöget, amelyre igaz a tulajdonság, és helyezzétek a lapra, de a karikán kívül azokat, amelyekre nem igaz a zöld lapra írt tulajdonság! Írjátok a narancs színű lapra azt a tulajdonságot, ami igaz a karikán kívüli sokszögek mindegyikére! Ha készen vagytok a munkával, fordítsátok meg a zöld és a narancssárga lapot.” Megvárja, amíg a gyerekek befejezik a válogatást, szükség esetén segíti a munkát. „Most forgószínpadszerűen járjátok végig, és figyeljétek meg a csoportok válogatásait. Próbáljátok megállapítani, mi igaz a karikán belüli lapok mindegyikére! A csoportból egy valaki mindig maradjon az asztalnál, hogy ellenőrizni tudja a ‚vendégeket’. Először a szóvivő, aztán a munkaszervező, utána az íródeák, és végül az eszközfelelős ellenőrizzen!”	Kétirányú tevékenységet végeznek: – Kétfelé válogatnak adott tulajdonság alapján úgy, hogy mindegyik alakzatról eldöntik, rendelkezik-e az adott tulajdonsággal. (*A zöld lapra írt tulajdonság alapján kiválogatott elemek összessége részhalmaza a sokszögek halmazának; a fogalmak között alárendelt viszony van* – ezt mutatja a kialakult kép.) *A tulajdonság alapján létrehozott részhalmazzal együtt létrejött annak a kiegészítő halmaza.* E halmazt meghatározó tulajdonságot fogalmazzák meg a narancs színű lapon az eredeti állítás tagadásával. – Felismerik, hogy az együvé válogatott alakzatoknak mi a közös tulajdonsága, és miben térnek el a többitől.
„A következő válogatást az alakzatok összehasonlításával kell létrehoznotok (kiosztja a szürke lapokat). Azok a sokszögek kerüljenek ugyanabba a karikába, amelyekre igaz a szürke kártyán található állítás! Beszéljétek meg, hányfelé kell majd válogatni, és az eszközfelelős annyi fonalkarikát vegyen magához, hogy mindegyik alakzatot el tudjátok helyezni!”	Adott kétváltozós reláció alapján szétválogatják a sokszögeket annyifelé, ahány értéke van az adott tulajdonságnak. – Ugyanannyi oldaluk van: 6-felé válogatják (háromszög, négyszög, ötszög, hatszög, nyolcszög, tizenkétszög) – Ugyanannyi csúcsuk van: 6-felé válogatják (háromszög, négyszög, ötszög, hatszög, nyolcszög, tizenkétszög) – Ugyanannyi átlójuk van: 6-felé válogatják (háromszög, négyszög, ötszög, hatszög, nyolcszög, tizenkétszög) – Ugyanannyi tükörtengelyük van: 8-felé válogatnak (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 8 tükörtengelyük van az alakzatoknak) – Ugyanannyi derékszögük van: 4-felé válogatnak (0, 1, 4 vagy 8 derékszögük van az alakzatoknak).

„Ha készen vagytok, rejtsétek el a szürke kártyát, az íródeák vegyen magához egy üres papírlapot és egy ceruzát, és induljatok el ‚tárlatlátogatásra'. Mindegyik csoport asztalánál álljatok meg, fogalmazzátok meg, és az íródeák jegyezze le, hogy mi a kapcsolat azok között az alakzatok között, amelyek ugyanabba a karikába kerültek! Felhívom a figyelmeteket arra, hogy minden csoport más kapcsolat alapján válogatott! (Ezzel jelzi a gyerekeknek, hogy egy válogatás többféle kapcsolat alapján is létrejöhet.)”
Ha a gyerekek nem ismerik fel valamelyik relációt, a tanító irányítsa rá a figyelmet az átlókra, a tükörtengelyekre és az alakzatok szögeire, és mindegyik alakzatot vizsgálják meg a gyerekek, hogy felismerjék az együvé válogatott sokszögek közös tulajdonságát.

Fordított irányú tevékenységet végeznek: az egy halmazba tartozó elemek azonos tulajdonsága, és a többitől eltérő tulajdonság alapján felismerik azt a relációt, amely létrehozta a válogatást.
Az első három esetben bár a reláció más, mégis ugyanazt a válogatást hozza létre. Ennek alapján tudatosodhat a gyerekekben, hogy a sokszögek oldalainak és csúcsainak száma egyenlő, és ezek meghatározzák az átlók számát.

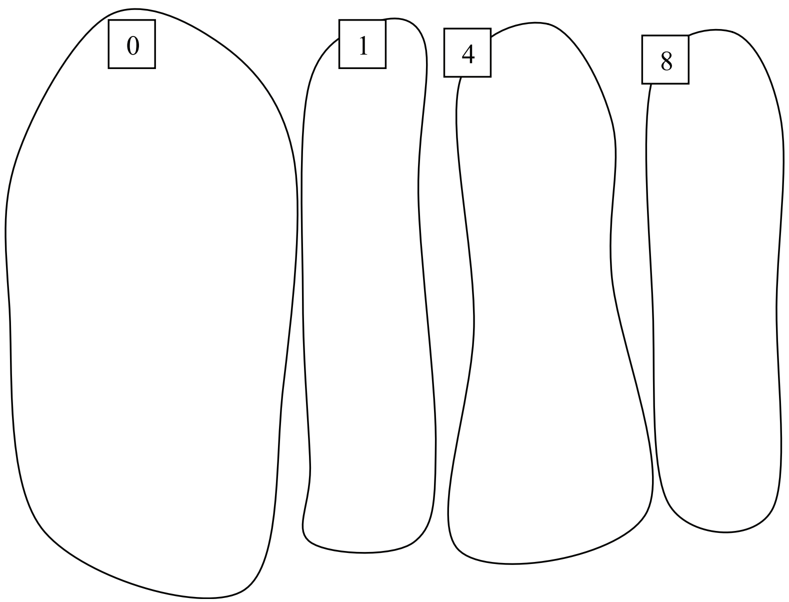
Az átlók száma szerinti szétválogatással dolgozzunk tovább! Az egyik csoport a négyszögeket, egy másik az ötszögeket, a harmadik a hatszögeket, a negyedik a nyolc, és a legügyesebb a tizenkétszögeket vizsgálja. „Állapítsátok meg, hány átlójuk van ezeknek az alakzatoknak, és írjátok be a 2. feladatlap 1. feladatának a táblázatába. Ha marad időtök, és tudjátok folytatni a táblázat kitöltését, akkor ceruzával a többi adatot is beírhatjátok!
Olvassatok a táblázatból! Hány átló húzható a négyszög 1 csúcsából? És a 4 csúcsból összesen hány átló húzható?”
„Ha valaki észreveszi a csúcsok száma és az átlók száma közti kapcsolatot, és le tudja jegyezni azt nyitott mondat formájában, azt is megteheti. Ellenőrizzétek a felismert kapcsolatot a tízszög segítségével!”

Rendszerezik a sokszögek átlóiról szerzett tapasztalataikat. A konkrét, számlálással gyűjtött, táblázatba rendezett adatokból általánosítanak, majd a megalkotott összefüggést konkretizálják a tízszög átlóinak számításánál.
A helyes táblázat:

Sokszög:	háromszög	négyszög	ötszög	hatszög	nyolcszög	tizenkétszög	tízszög
Csúcsok száma (cs):	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**12**	**10**
Egy csúcsból húzható átlók száma:	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**	**9**	**7**
A sokszög átlóinak száma (á):	**0**	**2**	**5**	**9**	**20**	**54**	**35**

– ha 4 csúcs van, akkor egy csúcsból 1 átló, 4 csúcsból 4-szer annyi, de így minden átlót 2-szer számolnánk, ezért ennek a fele, azaz 2 átlója van egy négyszögnek.
– ha 5 csúcs van, akkor egy csúcsból 2 átló, 5 csúcsból 5-ször annyi, de így minden átlót 2-szer számolnánk, ezért ennek a fele, azaz 5 átlója van egy ötszögnek.
– ha 6 csúcs van, akkor egy csúcsból 3 átló, 6 csúcsból 6-szor annyi, de így minden átlót 2-szer számolnánk, ezért ennek a fele, azaz 9 átlója van egy hatszögnek…
A csúcsok és az átlók száma közti kapcsolat:
$á = c \cdot (c - 3) / 2$, ahol á: az átlók számát, c: a csúcsok számát jelöli.

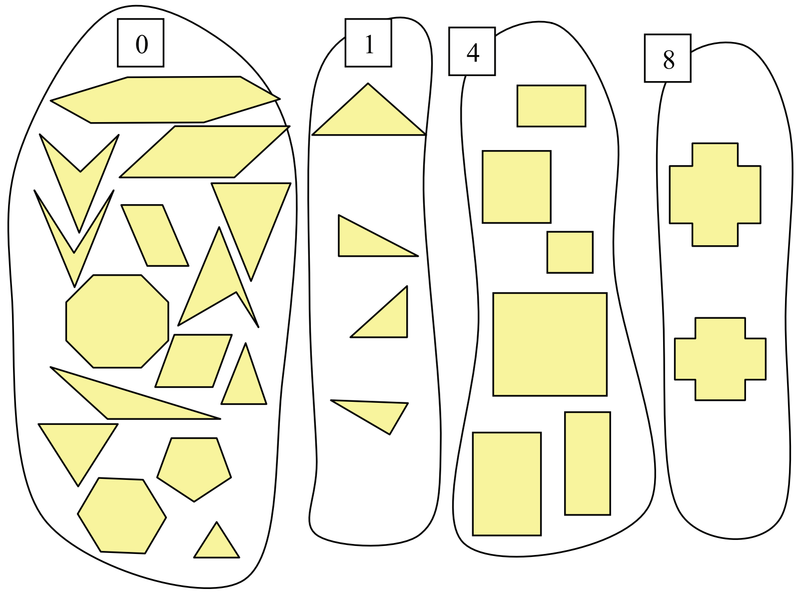
„Vizsgáljuk meg a derékszögek száma szerinti válogatást! Hajtogassatok a tépett papírlapból derékszöget (eszközfelelősök elvesznek az asztalra előkészített papírlapokból a csoport számának megfelelő lapot), és ellenőrizzétek, hogy helyes a csoport által létrehozott válogatás. Osszátok meg a csoportban a munkát!” Közben felrajzolja a táblára a négy halmazkarikát, és egyesével szólítja a gyerekeket egy-egy alakzat elhelyezésére.
A derékszögek száma:



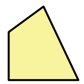
Ha a válogatásba hiba csúszik, ellenőrizzük közösen!
„Mit tudtok leolvasni a kialakult képről?”
Minden hamis állítást követően kérdezzük meg a gyerekeket: „meg tudná-e ezt valaki cáfolni, egy újabb alakzat készítésével?”
A jelentkezőknek adjunk papírlapot és ollót, és engedjük, hogy megalkossák az ellenpéldát!

A gyerekek tépett papírlapból derékszöget hajtogatnak, ellenőrzik a derékszögek számát, és ennek alapján elvégzik a válogatást.

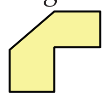
A derékszögek száma:



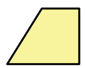
Lehet, hogy olyan állításokat is leolvasnak a képről, ami nem általános érvényű, pl.:
Csak háromszögnek lehet egyetlen derékszöge. Az állítást megcáfolhatják például egy négyszöggel:



Amelyik alakzatnak 4 derékszöge van, az téglalap. Az állítást megcáfolhatják például egy ilyen alakzattal:

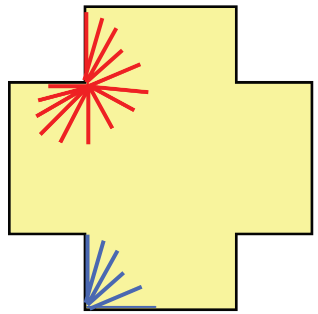


Nincs olyan alakzat, amelyiknek két derékszöge van. Ez az állítás is cáfolható, például:



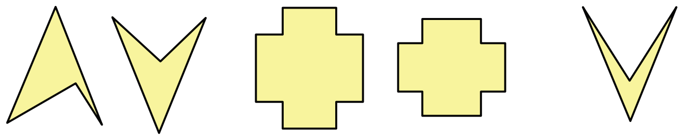
„Páronként tegyétek magatok elé az egyik tizenkétszöget! Képzeljétek azt, hogy ilyen alakú annak a harangtoronynak az alapja, amelybe most beléptetek. Minden saroknál videofilmet akartok készíteni, faltól falig fordítjátok a kamerát szemmagasságban. Mérjétek meg, hány derékszögnyit fordíthatjátok a kamerát a sarkoknál!"
Ha a gyerekek nehezen tudják elképzelni a szituációt, próbálja ki néhány gyerek az osztályterem valamelyik sarkához állva, vagy szereztessünk tapasztalatot más tevékenységgel. Például, egy nagy lapra rajzolt ilyen sokszög egyik sarkába (csúcsába) áll valaki úgy, hogy a cipő orra a szomszédos csúcs felé mutat, azután a sarkán fordul addig, hogy a másik szomszédos csúcs felé nézzen a cipőorra (akár nyomot is hagy a befestett talp elfordulás közben).

A gyerekek elképzelik a szituációt. Miközben a pirossal megjelölt saroknál állnak, kamerájukat elforgatva 3 derékszögnyi területet be tudnak ‚pásztázni', míg a kék sarokban csak egy derékszögnyit.



„Találtok-e az alakzatok között olyat, amelyben szintén elfordulhat a sarokban 3 derékszögnyit a kamera?"
„Találtok-e az alakzatok között olyat, amelyben 3 derékszögnél nagyobb szöggel is elfordulhat a kamera?"

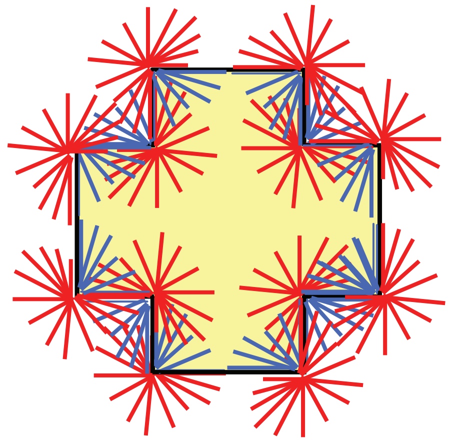
Kiválogatják azokat az alakzatokat, amelyeknek van 3 derékszögnyi szöge, vagy annál nagyobb:



„Jelöljétek a tizenkétszögön pirossal azokat a csúcsokat, amelyeknél 3 derékszögnyi a szög nagysága, és kékkel azokat, amelyeknél csak egy derékszögnyi!"

„Most járjátok körbe kívül is a tornyot! Ott is jelöljétek a sarkokban a szögeket ehhez hasonló módon!"

Elvégzik a belső és a külső szögek jelölését, színekkel megkülönböztetve a nagyságukat.

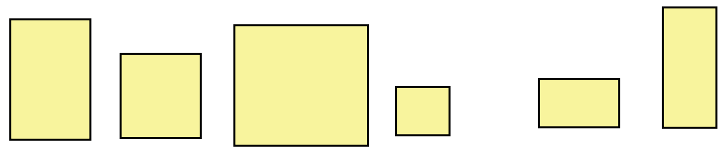


„Mit figyelhettek meg a csúcsoknál?"

A gyerekek megfigyelik, és megfogalmazzák, hogy mindegyik csúcsnál egy derékszögnyi és 3 derékszögnyi szög található, azaz a két szög éppen 4 derékszög, egy teljes körülfordulás.

„Válasszátok ki azokat a sokszögeket, amelyeknek mindegyik sarkában egyforma szöggel tud elfordulni a kamera. Mérjétek meg ezt a szöget mértékegységként a derékszöget, annak felét vagy a harmadát használva!”

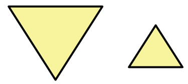
Kiválogatják azokat a sokszögeket, amelyeknek mindegyik szöge egyenlő, és a hajtogatott derékszöggel ellenőrzik, hogy ezeknek a négyszögeknek négy derékszögük van:



Megállapítják, hogy azok a négyszögek, amelyeknek négy derékszögük van, azok téglalapok.

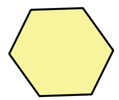
„Figyeljétek meg ezeket a háromszögeket, mit tudtok még elmondani róluk!”

Megvizsgálják a háromszögeket, és megállapítják, hogy azoknak a háromszögeknek, amelyeknek mindegyik szögük egyenlő, a szögeik a derékszög harmadának a kétszeresével mérhető:



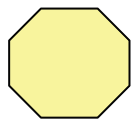
Felismerhetik, hogy oldalaik egyenlő hosszúak, és azt is, hogy három tükörtengelyük van.

Az egyenlő szögű hatszög szögei egy derékszöggel és a derékszög harmadával, vagy másként: a derékszög harmadának a négyszeresével egyenlő.



Megállapíthatják erről a hatszögről is az oldalak egyenlőségét és a tükörtengelyek számát (6).

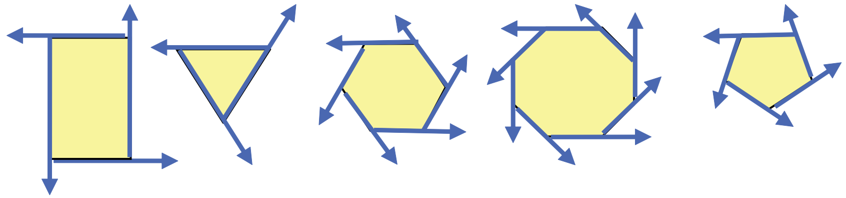
Az egyenlő szögű nyolcszög szögeit is kétféleképpen fejezhetik ki:
1 derékszög + a derékszög fele, vagy a derékszög felének a háromszorosa:



Nem tudják viszont pontosan megmérni az ötszög szögeit, csak azt tudják megállapítani, hogy a derékszögnél nagyobb. Közelíti a szög nagyságát például a derékszög felének és a 2 harmad derékszögnek az összege.

„Járjuk körbe ezeket az alakzatokat is kívülről, előre tartott karral. Figyeljük meg, mekkora szöggel fordult el a karunk, míg visszaérünk a kiinduló pontba!” Szükség esetén rajzoljunk a padlóra egy elég nagy sokszöget, és valóban végezzék el a gyerekek az alakzat körbejárását!

Az alakzatokat körbejárva a gyerekek megfigyelik, hogy a karjuk egyszer fordult körbe. Így tapasztalatot szereznek arról, hogy bármely konvex alakzat külső szögeinek összege a teljes szöggel egyenlő. (Ezt persze még nem fogalmazzák meg, de megszerzik az első tapasztalatot arról, hogy e tekintetben a konvex sokszögek nem különböznek egymástól.)
Néhány példa:



7. Síkidomok vizsgálata szimmetria-tulajdonságok szerint

– tükrösség, a tükörtengelyek száma (hajtogatás és tükörhasználat; körülrajzolt forma átfordítása a túloldalára);
– forgásszimmetriák, a forgásszimmetria rendje (másod-, harmad-, negyed-, ötöd-, hatodrendű forgásszimmetria),
– körszimmetria (forgatások a megsejtett középpont körül).

„Ezekről az alakzatokról azt is megállapította az egyik csoport, hogy van tükörtengelyük. Hogyan bizonyíthatnák igazukat? Vegyetek a kezetekbe egy alakzatot közülük, és készítsétek elő a zsebtükröt! Mutassátok be társaitoknak a csoportban, hány tükörtengelye van az általatok választott alakzatnak!”

Először tükörrel ellenőrzik az alakzatok tükrösségét.

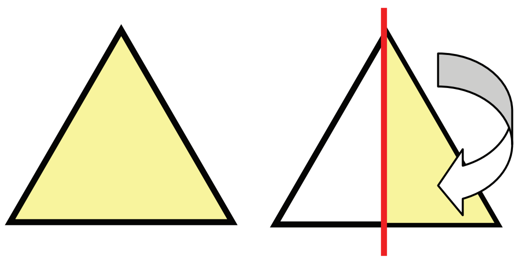
„Válasszátok ki a többi sokszög közül azokat, amelyekről még úgy gondoljátok, hogy tükrösek! Ellenőrizzétek először tükörrel, aztán félbehajtással, hogy tükrösek!”

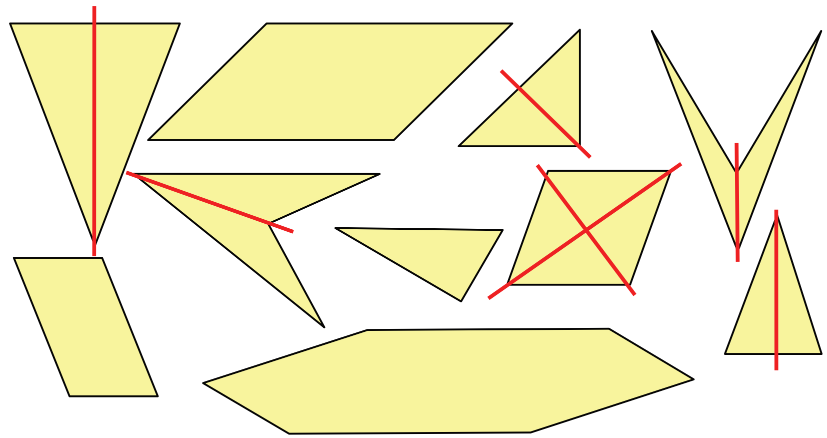
Félbehajtással, majd átfordítással keresik alakzatok tükörtengelyét.

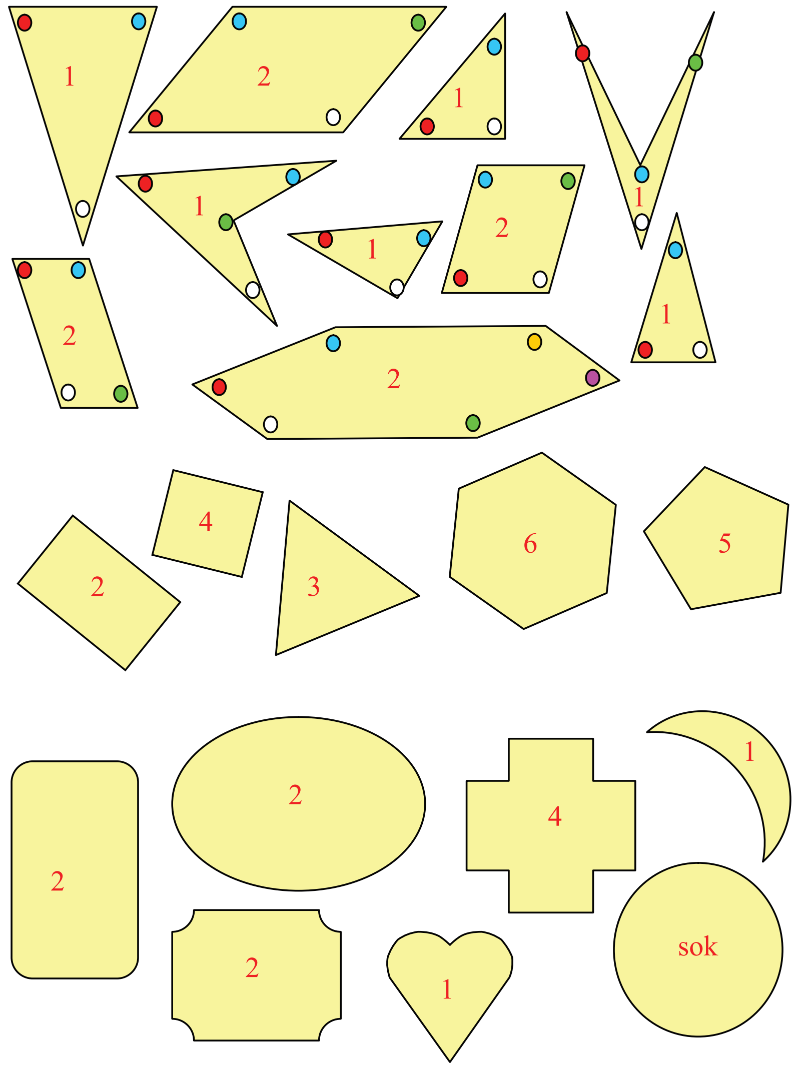
„Helyezzétek a füzet lapjára az egyik tükrös alakzatot, és rajzoljátok körbe. Rajzoljátok meg a tükörtengelyét is, majd fordítsátok át az alakzatot, és ellenőrizzétek, hogy így is ráillik a rajzára.”

Tapasztalataikat alkalmazzák, sejtésüket átfordítással igazolják.

Például (mutatja a táblánál):

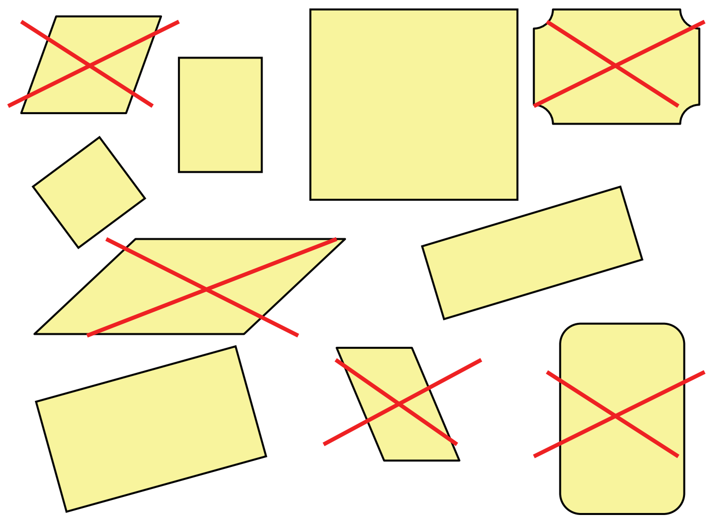




„Készítsétek elő a 2. feladatlap 2. feladatát (7. melléklet)! Rajzoljátok rá a vizsgált alakzatra, hol lehetett félbehajtani! Figyeljétek meg azt is, átfordítással ráhelyezhető-e az alakzat a rajzolt alakzatra!”	
„Fogj a kezedbe egy kivágott sokszöget, jelöld meg színessel az egyik csúcsát! Helyezd az alakzatot a 2. feladatlap 3. feladatában lerajzolt mására (8. melléklet)! Vizsgáld meg, hányféle helyzetben helyezheted rá a kezedben tartott alakzatot a rajzolt alakzatra úgy, hogy közben egyszer sem fordítod át, és az a rajzolt sokszöget pontosan fedi!”	Sejtésüket ellenőrzik az alakzatok forgatásával: Megállapítják, hogy az alakzat hányadrendben forgásszimmetrikus: 

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
8. A téglalap és a négyzet vizsgálata; a legfontosabb tulajdonságok összegyűjtése (oldalszám, oldalak egyenlősége, kölcsönös helyzete; átlók egyenlősége; szögek, szimmetriák) **Házi feladat:** Oldd meg a 2. feladatlap 4. feladatát! Gyűjtsd össze a téglalap tulajdonságait! Állapítsd meg az állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!	

3. óra

9. A házi feladat ellenőrzése Az alakzatok mindegyikéről mondják el a gyerekek, hogy az miért téglalap vagy miért nem téglalap. Az ellenőrzést és a hibajavítást segíti a feladatlap írásvetítővel való kivetítése (9. melléklet).	A gyerekek ellenőrzik és javítják a munkájukat. Az indoklások tudatosítják a téglalap tulajdonságait. Vita esetén az alakzatok szögeit hajtogatott derékszöggel mérik. A feladat helyes megoldása: Húzd át azokat az alakzatokat, amelyek nem téglalapok!  Állapítsd meg, melyik állítás igaz, melyik hamis! a) A téglalap minden szöge derékszög. …i… b) A négyzet téglalap is. …i…

A megbeszélést zárjuk le két fogalom meghatározásának leíratásával: „A téglalap olyan négyszög, amelynek minden szöge derékszög. A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő hosszú.”	c) Minden téglalapnak vannak különböző hosszúságú oldalai. …h. d) Van téglalap, amelyik nem négyzet. …i… e) Van téglalap, amelyiknek 4 tükörtengelye is van. …i… f) A téglalapnak vannak párhuzamos oldalai. …i…. g) Nincs olyan téglalap, amelyiknek minden oldala egyenlő. …h… h) Van téglalap, amelynek átlói nem egyenlő hosszúak. …h…
10. Tapasztalatszerzés arról, hogy melyik esemény következik be leggyakrabban. A relatív gyakoriság fogalmának intuitív megközelítése A gyerekek szeme előtt tegyük be a házi feladatban szereplő alakzatok kivágott példányait egy zacskóba, és kérjünk meg egy-egy gyereket, hogy húzzon ki közülük egy alakzatot a feltételnek megfelelően! „Húzz ki egy olyan alakzatot, amelyik – nem sokszög; – nem téglalap; – négyzet; – téglalap, de nem négyzet.” „Fogj egy alakzatot a kezedbe, de ne mutasd meg! Mondd el néhány tulajdonságát, hogy mi is ki tudjuk választani, ami a kezedben van!”	A gyerekek tapintás alapján hiba nélkül, teljes biztonsággal megoldhatják a feladatot, mert a megfogalmazott feltételek tapintható tulajdonságok alapján teljesíthetőek.
Helyezzünk 4 piros, 2 kék és 1 sárga golyót egy zacskóba, és kérjünk meg egy-egy gyereket, hogy húzzon ki közülük becsukott szemmel 3 golyót a feltételnek megfelelően! „Húzz ki 3 golyót, amelyek – mindegyike piros; – között nincs piros; – különböző színűek; – között van ugyanolyan színű.” „Fogj a markodba 3 golyót, és mondj róluk igazat!”	Egy-egy tanuló húz a golyók közül, és megfigyelik, sikerült-e teljesíteni a feltételt.
„Beszélgessünk arról, miért sikerültek jobban az alakzatok közüli húzások, mint a golyók közüli húzások! A golyóhúzások között is volt (?) olyan, amit sikerült eltalálni. Vajon miért?”	A színek nem tapintható tulajdonságok, így a szerencsén múlik, hogy sikerül-e valamelyik feltételt teljesíteni. Vannak azonban nagyobb eséllyel előforduló események, és vannak, amelyeknek kisebb az esélyük.

„Most ezt a játékot folytassátok csoportban!” Kiosztja a 10. melléklet kártyáit és az 1. melléklet játéktábláját, valamint mindegyik csoportnak egy zacskóban 4 piros, 2 kék és 1 sárga golyót (a Babylon készlet golyói alkalmasak erre).
„Minden játékosnál legyen egy kártya. A játékosok akkor léphetnek egyet a bábujukkal, ha a sorra kerülő játékos által kihúzott 3 golyóra igaz a saját kártyájukon lévő állítás.
– Először véletlenszerűen osszátok ki a kártyákat!

A játék végén szánjunk néhány percet arra, hogy elmondják a gyerekek egymásnak a játék tapasztalatait.
Ilyen kérdésekkel segíthetjük az elbeszélést:
– A bábuk állásáról megtudhatjuk-e, hogy hányszor húztatok golyókat?

Az első játékban tapasztalatot szereznek arról, melyik esemény következik be gyakrabban. A bábuk állásáról leolvashatják, hányszor fordultak elő a megfigyelt események.

– Volt-e csoportban két játékos, akik mindig egyszerre léptek?

– A gyerekek észrevehetik, hogy van két-két esemény, amelyek közül az egyik és csak az egyik bekövetkezik minden kísérlet során. (Van köztük piros – Nincs köztük piros; Mind a három más színű – Van köztük azonos színű; Mind piros – Nem mind egyező színű.)
– Feltűnhetett a gyerekeknek, hogy voltak, akik mindig egyszerre léptek, hiszen egyszerre következett be vagy nem következett be az általuk megfigyelt két esemény. (Nincs köztük piros – 2 kék, és 1 sárga)

– Melyik állítással játszott a nyertes? Hányszor sikerült neki lépnie? A húzások hányad részében tudott lépni?

– Nagy eséllyel nyer a ‚Van köztük piros’ eseménnyel játszó (*ennek valószínűsége* $\frac{34}{35}$), vagy a ‚Nem mind egyező színű’ eseménnyel játszó (*ennek valószínűsége* $\frac{31}{35}$).

– Ki gondolja úgy, hogy ő nagyon rosszul járt a húzott állításával? Miért?

– Többen is gondolhatják úgy, hogy ők rosszul jártak, hiszen vannak események, amelyek bekövetkezési esélye jóval kisebb, mint az előbbieké. *(A további események valószínűségét csak tájékoztatásul adjuk meg. ‚Nincs köztük piros’:* $\frac{1}{35}$*; ‚2 kék, és 1 sárga,:* $\frac{1}{35}$*; ‚Mind piros’:* $\frac{4}{35}$*; ‚Mind a három más színű’:* $\frac{8}{35}$*; ‚Nincs köztük sárga’:* $\frac{20}{35}$*; ‚Van köztük egyforma színű’:* $\frac{27}{35}$).

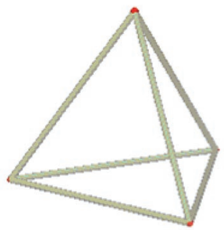
– A második játékban válasszatok magatoknak kártyát! Azt, hogy milyen sorrendben választotok, eldönthetitek pl. dobókockával való dobásokkal. Mindenki dob egyet, és az választ először, aki a legnagyobbat dobta, majd az, aki a többi közül a legnagyobbat, és így tovább, a dobott számok csökkenő sorrendje meghatározhatja a választási sorrendet. Természetesen új dobással döntsenek a sorrendről az egyenlő számot dobó játékosok!”	A második játékban már tudatosan alkalmazzák tapasztalataikat. Olyan eseményeket igyekeznek választani, amelyek várhatóan gyakrabban bekövetkeznek, így nagyobb esélyük van a győzelemre.
Ha időnk és az osztály képességei engedik, akkor újabb játékra biztathatjuk a gyerekeket. – Mindenki két kártyát válasszon! Az a játékos léphet a bábujával, akinek igaz valamelyik állítása a kihúzott golyókra. Az állítások választási sorrendjét ismét sorsoljátok ki! (Ha négynél többen vannak a csoportban, engedjük meg, hogy egy állítást két gyerek is választhasson, vagy kérjük meg a gyerekeket, hogy írjanak új eseményt az első körben kiválasztott kártyájuk mellé.)	A kártyaírás vagy választás során megfigyelhetjük, ráéreztek-e a gyerekek arra, hogy az először kiválasztott kártya komplementer eseményével (vagy olyannal, hogy a két esemény összege a biztos eseményt eredményezze) érdemes játszani. Persze, ha erre sokan rájönnek, akkor azt is felismerhetik, hogy nem lesz izgalmas a játék, hiszen mindenki tud lépni minden húzás után.
11. Testek vizsgálata: lapok, csúcsok, élek száma; lapok alakja, egybevágósága; lapok kölcsönös helyzete Használjuk a 0313. modul 12. mellékletéből összeállított testeket! Mindegyik csoportoknak adjunk egy testet (mindegyik csoportnak mást!) úgy, hogy a többiek ne lássák! Helyezzünk a melléklet elemeiből egy-egy testet egy dobozba, és készítsék elő a gyerekek is csoportonként a testeket! Mindegyik csoport válasszon ki egy képviselőt! „A képviselőnek az a feladata, hogy a dobozban lévő testek közül behunyt szemmel, tapintással kiemeli a csoportnál lévő testet. Ezután a csoport tagjai ellenőrzik, hogy jól választott-e. Ha igen, akkor a csoport tagjai elmondhatják a test tulajdonságait a többi csoportnak, akik ugyancsak kiválaszthatják a saját készletükből ezt a testet. Ha valamelyik csoport képviselője jól választott, a következőknek könnyebb lesz a behunyt szemmel való választást mert kevesebb közül kell választaniuk, hiszen a kitalált test már nem lesz a dobozban. Mivel az első csoportnak a legnehezebb a feladata, a vállalkozó csoport kezdi a játékot.” A tanító kiválaszt a saját készletéből egy testet úgy, hogy a gyerekek ne lássák. Legyen a test a szabályos tetraéder! „Találjátok ki, melyik test van a kezemben! Elmondom a test néhány tulajdonságát: – Csak háromszöglapjai vannak. (A tanító megvárja, amíg a gyerekek válogatnak.) – Lapjainak száma páros.	Ismét olyan kiválasztással találkoznak, amelynek eredménye nem véletlen, hanem a tapintható tulajdonságok alapján meghatározható. A gyerekek többirányú tevékenységet végeznek: – Összekapcsolnak kétféle érzékelést, a látást és a tapintást; – Megfogalmazzák a testek látható és tapintható tulajdonságait (pl. csúcsok, lapok száma; a lapok alakja, esetleg egybevágósága); – Elmondott tulajdonságok alapján halmazszűkítéssel kiválasztják a jellemzett testet. – A gyerekek félreteszik azokat a testeket, amelyeknek van négyzetlapjuk. – Rájönnek, hogy nincs mit félretenni, mert csak ilyenek vannak náluk.

– A lapok egybevágó háromszögek.
– Csúcsainak száma páros.
– Nincsenek párhuzamos lapjai.

– Élei egyenlő hosszúak.
Fontos, hogy most már csak ezt a testet vizsgálva ismét végignézzük a tulajdonságokat, hogy valóban igaz rá minden elhangzott tulajdonság.
„Mit tudnátok még elmondani erről a testről?”

Időtől függően játsszunk barkochba játékot ezekkel a testekkel, akár úgy is, hogy valamelyik jól dolgozó gyerek a játékvezető! Azt persze fontos tudnunk, hogy melyik az elrejtett test, hogy tudjuk ellenőrizni, és szükség esetén javítani a kérdésekre adott válaszokat.
„Készítsétek elő a 2. feladatlap 5. feladatát, és azokat a testeket, amelyeket a képeken láthattok, és már elkészítettük kartonból. Osszátok meg a munkát a csoportban, a csúcsok és az élek számlálását párban végezzétek!”
Az ellenőrzést felolvasással, hibák esetén újraszámlálással végezzük. A helyes megoldás a 11. mellékletben található.
„Mivel magyarázható a felismert összefüggés?”

Házi feladat:
A feladatlap 6. feladata, és két testmodell elkészítése.
„Az előző feladatban a szögletes testek éleinek számát vizsgáltuk. Az éleket jól kiemelhetjük, ha szívószálból építjük meg a testek élvázát. Mutatok néhány példát, figyeljétek meg, mekkora darabokra kellett vágnom a szóvószálat!”
A tanító bemutatja néhány szívószálból készített test élvázát, amit a gyerekek akár közelről, kézbe fogva is megvizsgálhatnak. Például:



„Mindenki vegyen magához egy testet és két szívószálat! Alkossátok meg szívószálból a kiválasztott test élvázát!”

Kioszt minden gyereknek a 12. mellékletből egy testhálót. (A hengert és a kúpot az ügyesebbek kapják!) „Nyírjátok ki és ragasszátok össze a testeket!”

– Csak egy testet tudnak félretenni (a lilát).
– Ismét félretehetnek egy testet, amelynek 5 csúcsa van.
– Félretehetik a 6 csúcsú testeket, mert ezeknek vannak párhuzamos lapjai.
– Ezzel kiválasztják a tanító által elrejtett testet.

A gyerekek további tulajdonságokat gyűjtenek erről a testről. Pl. Lapjai egyenlő oldalú háromszögek, 4 lapja van, tükrös, mindegyik csúcsából 3 él indul, 6 éle van, nincs ennél kevesebb csúcsú, lapú, élű test.

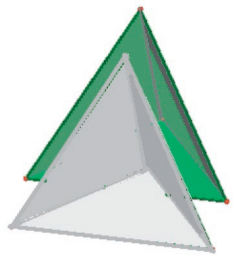
A gyerekek egymás munkáját segítve a konkrét testekről adatokat gyűjtenek, kitöltik a táblázatot, és összefüggést keresnek az adatok között.

Magyarázatot keresnek a felismert összefüggésre: Minden csúcsból ugyanannyi él indul ki, így pl. a kockának 8 csúcsa van, mindegyik csúcsból 3 él indul, az összesen $3 \cdot 8 = 24$ él, de így minden élt 2-szer számolunk, ezért az élek száma ennek a fele, azaz 12.

A gyerekek megfigyelik a testek élvázát. Megállapítják, hogy az ötcsúcsú testhez 8 szívószál darabra volt szükség, amelyek közül 4-4 ugyanolyan hosszú. A négycsúcsú testhez 6 szívószál darabra volt szükség, amelyek közül 3-3 ugyanolyan hosszú.

4. óra

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
12. Testek vizsgálata: élek egyenlősége; párhuzamossága, merőlegessége; metsző, párhuzamos és kitérő élek; egy csúcsban találkozó élek száma A feladatlap 6. feladatának ellenőrzése fóliáról történhet, hibák esetén a konkrét testmodellen végezzünk közösen újraszámlálást! A 2. házi feladat ellenőrzését a gyerekek csoportmunkában végezzék úgy, hogy összehasonlítják a lapokból összeragasztott és a szívószálból készült testet. Az ellenőrzést követően mindegyik csoport számoljon be arról, hogy milyen hibákat fedeztek fel!	
„Válasszátok ki az elkészített szögletes testek közül azt a testet, amelyiknek a legkevesebb éle van! Vajon létezik-e olyan test, amelynek ennél is kevesebb éle van?”	A gyerekek saját, néha kicsit pontatlan megfogalmazással elmondják véleményüket arról, hogy miért nem létezik olyan test, amelynek 6-nál kevesebb éle van. A várható indoklás: A testnek van egy alaplapja, annak legalább 3 csúcsa van, amit legalább 3 él köt össze, és ahhoz, hogy test legyen, kell, hogy legalább még egy csúcsa legyen, ami az alaplap „fölött” van (nem az alaplap síkjában van). Ezt a csúcsot az alaplap mindegyik csúcsával is él köti össze, így legalább 6 éle van a szögletes testeknek.
„Vizsgáljátok meg a testek élvázát! Állapítsátok meg, hány él fut össze egy csúcsban!”	Megszámlálják az egy csúcsban találkozó éleket, és megállapítják, hogy a megépített testeken egy csúcsban 3 vagy négy él találkozik.
„Ez azt jelenti, hogy a testek bármely csúcsában legalább három él fut össze. Válasszátok ki azokat a testeket, amelyeknek minden csúcsában 3 él fut össze!”	Három ilyen testet találnak.
Páronként fogjatok a kezetekbe egyet közülük, és három ujjatokat (mutató-, középső- és hüvelykujjatokat) húzzátok egyszerre végig valamelyik csúcsba futó éleken! Tegyétek meg ugyanezt a papírból készült testnél is, aztán az élek által határolt lapokkal is!” (Ha a gyerekektől hallunk elnevezéseket, és ezek pontatlanok, csak akkor mondjuk meg a használatos szakszót! Ezek a testek szögletei.) „Találtok-e olyan testeket, amelyeknél ezek egyenlő nagyok? Amelyik testen vannak különbözők, azon mutassátok meg a legnagyobbat!” Várja meg a vitát, aztán vesse fel a kérdést: „hogyan lehetne ezeket összemérni?”	A gyerekek tapintással megérzik a testszögletek nagysága közti különbséget.
A használható ötleteket próbáljuk ki!	Ötleteket gyűjtenek a szögletek összeméréséhez: Pl.: Vágjuk le a papírból készült test egyik lapját (meghagyva azt a szögletet, amit össze akarunk mérni más szögletekkel), és próbáljuk meg a másik szögletet ebben elhelyezni. Ha a szögletek nem egyenlőek, akkor az élek nem esnek egybe.

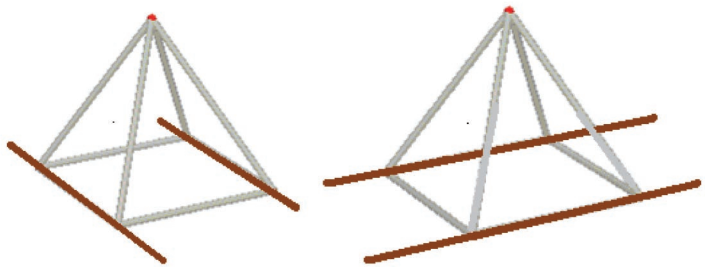


„Válasszátok ki azokat a testeket, amelyekhez egyféle méretű szívószál-darabokra volt szükségetek!
Van-e köztük olyan, amelyiknek vannak párhuzamos élei?”
„Hurkapálcával jelöljétek ki a párhuzamos élek egyeneseit!

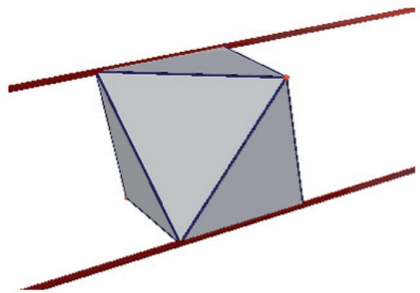
„Melyiken hány pár párhuzamos élt találtok?”

Három ilyen testet találnak.

A négyzet alapú gúlán és az oktaéderen (8 lapú test) találnak párhuzamos éleket.
A négyzet alapú gúlán 2 pár párhuzamos élt találnak.

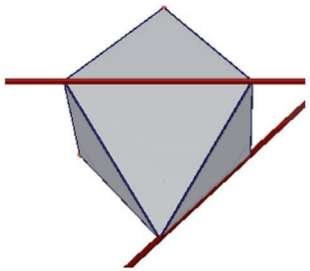


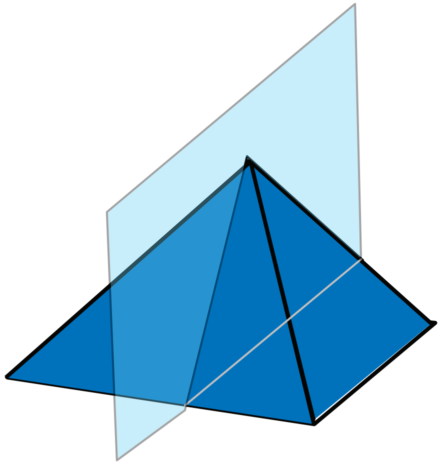
A 8 lapú testen 6 pár párhuzamos élt találnak, hiszen a 12 él mindegyikével szemben található párhuzamos él.



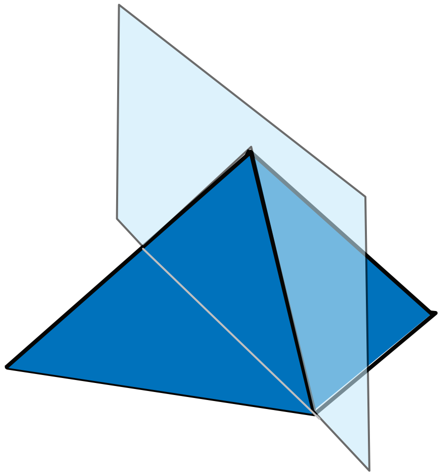
„Párokban vizsgáljátok meg a többi testet is, melyiknek vannak párhuzamos élei!”

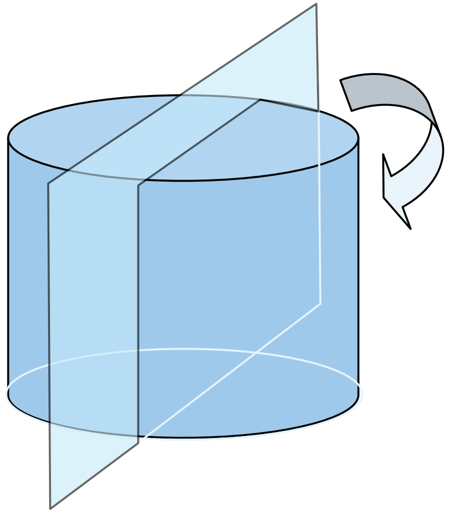
A gyerekek a többi testen talált párhuzamos éleket bemutatják társaiknak, akik véleményezik ezt a megállapítást.

„Az egy csúcsból induló élek egyenesei a csúcsokban metszik egymást.” „Tudnátok-e olyan éleket mutatni, amelyek derékszöget zárnak be?” „Figyeljétek meg ennek a két élnek az egyenesét!” Kiemel az egyik testen két kitérő helyzetű egyenest. Például:  „Ezek az egyenesek nem párhuzamosak és nem is metszik egymást.” „Ezeket az egyeneseket kitérő egyeneseknek nevezzük.” Adjunk időt a vizsgálódásra! „Párban dolgozzatok! Vegyetek a kezetekbe egy testet és egy-egy hurkapálcát! A pár egyik tagja helyezze az egyik élre a hurkapálcáját, a pár másik tagja a saját pálcáját helyezze olyan élre, amelynek egyenese ezzel kitérő helyzetű egyenes! Aztán cseréljetek szerepet! Közben megfigyelhetitek azt is, mikor állnak a hurkapálcáitok egymásra merőlegesen!”	Keresnek olyan éleket, amelyek derékszöget zárnak be. A gyerekek ismét ellenőrzik egymás munkáját. A gyerekek olyan éleket mutatnak a testeken, amelyek egyenesei kitérő egyenesek. Tapasztalják, hogy nincs olyan szögletes test, amelynek ne lennének kitérő élegyenesei. Közben találhatnak olyan helyzetű egyeneseket, amelyek merőlegesek egymásra. Kitérő élek esetén ez megmarad sejtés (érzés) szintjén, hiszen ezek még csak az első tapasztalatok ezen a területen.
13. Testek vizsgálata: néhány szimmetria-tulajdonság szerint (Síkszimmetria vizsgálata tükör segítségével; forgási szimmetriák megsejtése egyenes hengereknél, hasáboknál, egyenes gúláknál, görbült felületű testeknél) „Válasszátok ki azokat a testeket, amelyeknek van négyzet alakú lapjuk, és azokat, amelyeknek 4 lapjuk van. Tegyétek még közéjük az otthon megragasztott testeket (esetleg egy kis darab henger alakúra tisztított sárgarépát vagy retket), a ping-pong labdát (vagy narancsot), és a (lehetőleg kifújt vagy keményre főzött) tojást! Készítsétek elő a zsebtükröt és néhány fogvájót! Először vizsgáljátok meg a testeket, tükrösek-e! Ha egy testet tükrösnek találtok, rajzoljátok meg, hová tennétek a tükröt!” Szükség esetén vágjunk szét néhány alakzatot a tükörsík mentén, és helyezzük el a tükröt a két fél-alakzat közé. Például:	Megvizsgálják a testeket, hogy tükrösek-e. Mindegyik testnek megtalálják egy vagy több tükörsíkját, de nem feltétlenül az összest. Megállapítják, hogy a szögletes testeknek csak néhány (véges sok) tükörsíkjuk van, míg a hengernek, kúpnak, gömbnek, tojásnak (ideális esetben) nagyon sok (végtelen sok) tükörsíkjuk van. A hengernél és a kúpnál azt is megfogalmazhatják, hogy ezek a síkok merőlegesek az alapkörökre. Például:

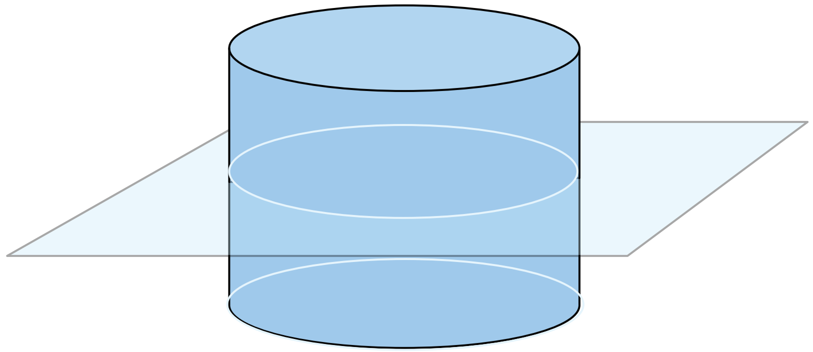


Vagy:





Ezeken kívül a hengereknél még egy tükörsík található, amely párhuzamos az alapkörökkel, és áthalad a magasság felezőpontján:



Ilyen tükörsíkjuk az egyenes hasáboknak is van.

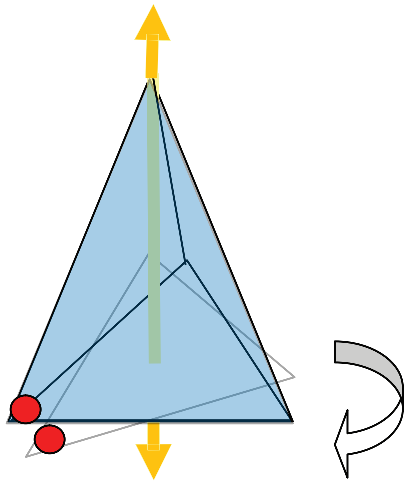
Egy keményre főzött tisztított tojás félbevágásával belátják, hogy nagyon sok helyen félbe lehet vágni a tojást.

Amennyiben lehetőség van rá, gömb alakú gyümölcs (pl. narancs) segítségével belátják, hogy a narancsot (gömböt) bárhol félbe lehet vágni, csak az a fontos, hogy a vágás síkja menjen át a gömb középpontján!

A forgásszimmetriák megsejtetését is ezeknek a testeknek a vizsgálatával végezzük. Szúrjunk át egy fogvájót az egyik gúla alaplapjának középpontján és a vele szemközti csúcson. Állítsuk a gúlát az írásvetítőre helyezett fóliára, és rajzoljuk körbe az alaplapját. Jelöljük meg az alaplaphoz tartozó egyik csúcsot a fólián is és a testen is jól látható színessel.

„Elforgatom ezt a testet a fogvájó egyenese körül úgy, hogy változatlanul ugyanúgy álljon, mint eredetileg. Figyeljük meg, hány ilyen forgatást kell végeznem, hogy minden csúcs az eredeti helyére kerüljön vissza!”

A gyerekek megfigyelik a szabályos háromszög-alapú gúla (harmadrendű) forgásszimmetriáját.



„Válasszátok ki ismét azokat a testeket, amelyeknek van négyzetlapjuk, és azokat, amelyeknek 4 csúcsuk van!

Végezzetek páros munkában ezeken a testeken is hasonló vizsgálódásokat! Tapasztalataitokat mondjátok el a csoport többi tagjának is!”

„Keressetek ilyen egyeneseket a többi testen is! Válasszatok ki egy testet, és bökjétek át rajta a fogvájót úgy, hogy a körül nem teljesen körülforgatva a testet, az a kiinduló helyzetével egyező helyzetbe kerülhessen!”

Ezek még kicsit pontatlan megfogalmazások, de elegendőek, és érthetőek a negyedik osztályos tanulók számára ahhoz, hogy a forgásszimmetriákról meg tudják szerezni az első tapasztalataikat.

Hasonló módon vizsgálva a henger vagy gömb alakú alakzatokat, illetve a tojást, megállapíthatják, hogy tetszőleges mértékben elforgatva, az alakzat az eredetivel egyező helyzetbe kerül. (Ezek a forgásszimmetrikus alakzatok.)

Kézbe vehető tárgyaknak vizsgálják a forgásszimmetriáját úgy, hogy a nézőpont rögzített és a tárgy forog.

Egy másik irányból is szereztethetünk a gyerekekkel tapasztalatot a forgásszimmetriáról. Azt vizsgáltassuk meg, hogy az alakzatot rögzítve egyféle helyzetben, azt körbejárva, hány olyan pont van, ahonnan ugyanúgy néz ki az alakzat, mint egy kiválasztott pontból.

Olyan vizsgálódásokat végeznek, amelyben a tárgy rögzített helyzetben van, és a megfigyelő mozog.

A tevékenység során valójában azt állapítják meg, hogy egy alakzat hányadrendben forgásszimmetrikus.

Kezdjük ezt a tapasztalatszerzést úgy, hogy egy állványra elhelyezünk egy nagyobb méretű forgásszimmetrikus testet (pl. egy gúlát, egy dobozt vagy egy vázát). A gyerekek körbeállják, és a szemükkel „lefényképezik” a látványt. Ez után körbesétálva az alakzatot, megfigyelik, a körséta hány pontján lesz részük a készült „fotóval” egyező látványban.

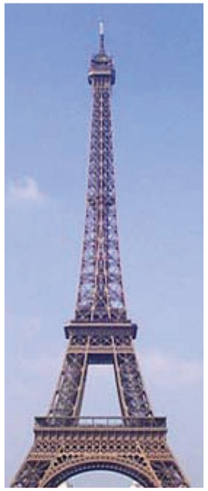
Ehhez kapcsolhatunk valóságtartalmú problémafelvetéseket is.

Vetítsük ki a 14. melléklet 1. fotóját!

„Ha ezt a lámpaoszlopot körbejárnánk, 3 helyről is tudnánk ugyanilyen fotót készíteni, hiszen a gömb alakú burák egyformák, és bármelyik bura lehetne velünk szemben.”

A fényképen látható tárgyak megfigyelése, a szituáció elképzelése fontossá teheti számukra a matematikai ismeretet. A problémafelvetés lehetőséget nyújt a képzelet fejlesztésére.

„Vizsgáljuk meg a második képet! Ha ezt a harangot járnánk körbe, a harangról magáról akárhonnan lehetne ilyen fotót készíteni, de ha a harang tetején található díszt is ugyanígy akarjuk látni, akkor csak 4 olyan hely van, ahonnan ugyanilyen képet tudnánk készíteni a harangról.”



„A 3. kép az Eiffel toronyról készült, melynek jellegzetes körvonalai világszerte ismertek.

Mit gondoltok, hány irányból lehet ezt a képet látni az Eiffel-toronyról?” Biztathatjuk a gyerekeket, hogy keressenek ők is képeket az Eiffel-toronyról, vagy gyűjtsenek érdekes adatokat róla. Az információgyűjtés egyik lehetséges formája az internet, ahol pl. a http://www.sulinet.hu/tart/fcikk/Kjc/0/23350/1 oldalon találnak sok érdekességet.

A bemutatott kép, illetve a meglévő ismereteik alapján elképzelik, hogy 4 irányból is ilyennek láthatjuk az Eiffel-tornyot.

Házi feladat: 3. feladatlap, 1. feladat.
„A feladatban párhuzamos helyzetű éleket kell keresnetek, de nem biztos, hogy mindegyik alakzaton találtok ilyeneket!”

5. óra

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
14. A házi feladat ellenőrzése Vetítsük ki a 3. feladatlap 1. feladatát (13. melléklet). Felszólításra helyezzenek el a gyerekek két fogvájót, amelyek kiemelik a párhuzamos éleket az ábrákon.	A gyerekek kiemelnek párhuzamos éleket a testek ábráin. Megállapítják, hogy nincsenek párhuzamos élek a 2. és a 3. testen. Az ellenőrzést a kézbe fogható testmodelleken is elvégzik úgy, hogy hurkapálcákat illesztenek a párhuzamos helyzetű élekre.
15. Szöveges feladatok az írásbeli osztás gyakorlására; ellenőrzés visszaszorzással, zsebszámológép használatával „Az elmúlt órán egy képet láttunk az Eiffel-toronyról. Megtudtatok-e valami érdekességet erről az építményről?”	A gyerekek beszámolnak néhány érdekességről, amit az Eiffel-toronyról gyűjtöttek. Például: 1889-ben épült, közel 330 m magas, 9700 tonna, 3 emeletre lehet feljutni lifttel vagy lépcsőkön. A torony csúcsára 1710 lépcsőfok megmászásával lehet feljutni…
Ha a gyerekek nem mondják a lépcsőfokok számát, egészítsük ki az általuk elmondottakat, és kapcsoljuk ehhez a következő feladatot! „Egy ismerősöm a családjával lépcsőn indult a torony tetejére. Felfelé menet persze gyakran megálltak pihenni és gyönyörködni a panorámában. Azt mondták, hogy 3 negyed óra alatt értek fel. Átlagosan hány lépcsőt haladtak percenként?”	
„Mit jelent az, hogy átlagosan?”	Felidézve az átlag jelentését, megfogalmazzák, hogy ha minden percben ugyanannyi lépcsőt haladtak volna, akkor is 3 negyed óra alatt jutottak volna föl.
„Mit tudunk, hány perc alatt járták be az 1710 lépcsőt?” „Hogyan következtethetünk arra, hogy átlagosan mennyit tettek meg 1 perc alatt?” „Becsüljetek! Ellenőrizzétek a becsléseteket!	45 perc alatt jutottak föl 1710 lépcsőn. Keressük azt a számot, amelynek a 45-szöröse 1710. Ez mutatja meg, hogy 1 perc alatt átlagosan hány lépcsőn jutottak fel. A 45 10-szerese 450, a 20-szorosa 900, a 30-szorosa 900+450=1350, a 40-szerese 1800, ami 90-nel, azaz a 45 2-szeresével több, mint 1710. Ezért átlagosan 38 lépcsőn jutott föl a család percenként. Szorzással ellenőrizve: 38 · 45 152 190 1710
„Melyik művelet segítségével tudtuk volna még kiszámolni, hogy hány lépcsőn jutott fel a család átlagosan 1 perc alatt?”	Osztással is kiszámolhattuk volna, hiszen arra voltunk kíváncsiak, hogy hányszor van meg az 1710-ben a 45.

„Kétjegyű számmal való osztás lenne a feladatunk, de ezt még nem tudjuk, hogyan kell elvégezni. Át tudnánk valahogyan hidalni ezt a problémát? Meg tudnánk-e oldani egyjegyű számokkal való osztással?”	Mivel a 45 = 5·9, osszuk el az 1710-et 5-tel, aztán a hányadost 9-cel! 1710 : 5 = 342 21 10 0 342 : 9 = 38 72 0 Írásbeli osztással is oda jutottunk, hogy 38 lépcsőt jártak be percenként.
„A 4. feladatlap 2. feladatában is találtok majd hasonló kérdést, de előbb az 1. feladatot oldjátok meg!” A feladathoz kapcsolódóan beszéljük meg, hogy vajon egyenletes-e a sportolók teljesítménye a mért idő alatt. Az ellenőrzést felolvasással végezzük, de ahol többen hibáztak, azt részletezzük!	Önálló munkában megoldják a feladatlap feladatait.

		táv	idő	
a)	Fedett pályás női futás	50 m	≈ 6 mp	50 : 6 = 8 2
		60 m	≈ 7 mp	60 : 7 = 8 4
b)	Úszás, férfi gyorsváltó	4×100 m	≈ 3 perc	400 : 3 = 133 10 10 1
		4×200 m	≈ 7 perc	800 : 7 = 114 10 30 2

c) 2004-ben

– a sprintvilágbajnokság női győztese közel 2 perc alatt tette meg az 1500 m-es távot.	1500 : 2 = 750
– a magyar kajak kétpárevezős versenyen az 1000 m-es távot a férfi győztesek közel 3 perc alatt tették meg.	1000 : 3 = 333
– a kerékpárosok nemzetközi csapat-üldöző versenyén a 4000 m-es távot a leggyorsabbak körülbelül 4 perc alatt tették meg.	4000 : 4=1000
– a magyar úszóbajnokságon a 800 m-es hosszt a győztes körülbelül 8 perc alatt úszta le.	800 : 8 = 100

„A 2. feladatban ismét visszatérünk a magasságokhoz. A feladat első része hegymászókról szól, akik néha oxigénpalack nélkül is eljutnak nagy magasságokba. A feladat megoldása során ne feledkezzetek meg a becslésről és az ellenőrzésről!”	A feladat első része összetett szöveges feladat. A megoldás menetét nyitott mondat formájában is kijelölhetik: (8848 – 6500) / 3 = 2348 : 3 = 782 24 08 2 Az olasz hegymászó átlagosan 782 métert tett meg naponta a Mount Everest meghódításakor.
„Kicsit nehéz lesz a feladat 2. része. A feladat szövege 9 és fél percről szól. Mi nem tudunk törttel számolni. Mit javasoltok, hogyan tudhatnánk meg mégis a választ?”	A törtet tartalmazó feladat megoldását két érték között tudják megadni. A bejárt lépcsők száma a 10-zel való osztás eredményénél több, a 9-cel való osztás eredményénél kevesebb. 1576 : 10 ≈ 158 1576 : 9 = 175 67 46 1 A két érték között, „félúton” található a 166, így körülbelül 166 lépcsőt tudott bejárni percenként a versenyző. Azt a javaslatot is tehetik, hogy ha a versenyző ugyanilyen sebességgel tudna kétszer ennyi ideig futni, akkor kétszer ennyi lépcsőt tenne meg. Így a teljesítményét (a percenként megtett útját) kétjegyű osztással lehetne kiszámolni: 3152 : 19 Ismét becsléssel, majd visszaszorzás után a becslés pontosításával állapítják meg a hányadost, ami körülbelül 166, mert 166 · 19 = 3154
16. Téglatestek vizsgálata (lapok, csúcsok, élek száma; lapok egybevágósága; lapok kölcsönös helyzete – merőlegesség, párhuzamosság; élek egyenlősége, párhuzamossága, merőlegessége**; téglatestek alak szerinti sokfélesége; a kockák alak-azonossága; a téglatestek szimmetria-tulajdonságai, a kocka szimmetriái** Készíttessük elő az eddig megépített testmodelleket, és még a 3-as és 4-es Dienes készletből egy-egy kockát, egy-egy réteget és hasábot! Tegyenek ki a csoportok egy doboz korongot is. „Válogassátok ki ezek közül a testek közül a téglatesteket!”	A csoportok kiválogatják a saját testmodelljeik közül a téglatesteket, a többi testet félreteszik.

„Milyen tulajdonságok alapján döntöttétek el, hogy egy test téglatest-e? Melyeket volt könnyű félretenni, és miért? Volt-e valamelyik test miatt vita a csoportban?” „Csoportonként mondjatok ezekről a testekről igaz állításokat! Amelyik csoport állítását a többiek elfogadják, az a csoport kap egy korongot. Akkor lesz vége az állítások sorolásának, ha már egyik csoport sem tud újabb állítást mondani.” Figyeljük meg, hogy a téglatestek mely tulajdonságai fontosak a gyerekeknek, és melyek azok, amelyek további megfigyelést igényelnek. Ennek megfelelően döntsünk a további feladatok megoldásáról!	Megfogalmazzák a téglatest legjellemzőbb tulajdonságait. Például: – 8 csúcsa, 6 lapja, 12 éle van; – lapjai télalapok; – 2-2 lapja párhuzamos; – szemközti lapjai egybevágók… A csoportverseny újabb és újabb tulajdonságok megfogalmazását hívja elő, amely szólhat a test tükrösségéről, forgásszimmetriájáról, az élek állásáról, hosszáról, a lap és testátlók számáról, esetleg hosszáról is. A gyerekek egymást ellenőrzik, és csak akkor szavazzák meg a jutalomkorongot, ha senki sem tudja cáfolni az állítást.
„Dolgozzatok párban! Tegyetek magatok elé egy téglatestet! Váltva adjatok egymásnak feladatot! Ilyenekre gondolok: – Mutass ezzel a lappal párhuzamos lapot! (Mutatja egy test egyik lapját.) – Mutass ezzel az éllel egyenlő hosszú élt! – Mutass ehhez az élhez képest kitérő helyzetű élt! – Mutass síkot, amelyre tükrös!...”	A tulajdonságok belátáson alapuló rögzítése történik meg páros munkában. Ha a tanító gondosan jelölte ki a nehézségekkel küzdő tanulók párját, a gyerekek csak a vitás kérdésekben igénylik a pedagógus döntését.
„Vastag filccel színezzétek a párhuzamos éleket azonos színűre, a nem párhuzamosakat különböző színűre! Rajzoljatok a párhuzamos lapokra egyforma jeleket, a nem párhuzamosokra különbözőket! Rajzoljátok meg a füzetetekben a test hálóját, és azon is színezzétek az éleket úgy, mint a testen, és jelöljétek a lapokat is úgy, ahogy a testen jelöltétek! Az ellenőrzést a test szétvágásával végezzétek!” (Ha a tanító úgy ítéli meg, hogy túl nehéz a gyerekeknek a feladat, cserélje meg a sorrendet, és a test szétvágása után készíttesse el a hálót és a színezést!)	Többféle tevékenységet végeznek: – Megnevezett tulajdonságok alapján végzik a színezést (párhuzamos helyzetű élek, párhuzamos helyzetű lapok); – Elképzelik, hogyan fordulnak le a test lapjai és élei a síkra; – Megkeresik azokat az éleket, amelyek mentén szétvágva a testet, a megrajzolt hálóhoz jutnak; – Összehasonlítják a tényleges és a rajzolt testhálókat, keresik és javítják a hibákat.
„Voltak-e, akik speciális téglatestet (kockát) vizsgáltak?” Ha nem, mindenki vizsgáljon kockát is! Gyűjtsék össze megint a tulajdonságokat, és derüljön így ki, hogy mindaz igaz, amit az előbb mondtak, leírtak, sőt…! „Melyek azok a tulajdonságok, amelyekkel rendelkezik minden kocka, de nem rendelkezik vele minden téglalap?” „Tudunk-e olyan tulajdonságot mondani, amivel rendelkezik minden téglatest, de nem rendelkezik vele minden kocka?” A tanító írja fel az összegyűjtött tulajdonságokat, és írják le a tanulók is!	Az összegyűjtött tulajdonságok alapján tudatosodik, hogy minden kocka téglatest, de nem minden téglatest kocka. Összegyűjtik, és a füzetükben rögzítik **a téglatest** tulajdonságait: Csúcsok: – 8 csúcsa van, mindegyik csúcsban 3 él és 3 lap találkozik Megfogalmazzák azokat a tulajdonságokat, amelyek a kockára igazak, de nem igazak minden téglatestre:

Lapok:
– 6 négyzet határolja
Élek:
– Minden éle egyenlő hosszú.

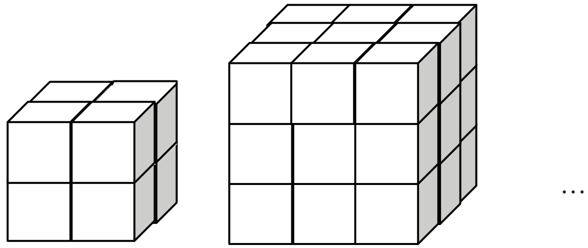
Önálló munkában oldassuk meg a 4. feladatlap, 3., 4. feladatát! Az 5., 6. feladatot adjuk **házi feladat**nak! Engedjük meg a gyerekeknek, hogy használjanak a megoldáshoz testmodelleket!
Az ellenőrzéshez használhatjuk a 15. mellékletet.

Az önálló feladatmegoldás során maguk is informálódnak a téglatestről gyűjtött ismereteik helyességéről. Jól fejlődik a képzeletük és a térlátásuk.

Tovább gazdagíthatjuk a gyerekeknek a kockáról gyűjtött ismereteit.
„Építsetek a színes rudak fehér kiskockáiból nagyobb kockákat!”

„Hány kockából sikerült újabb kockát építeni?”

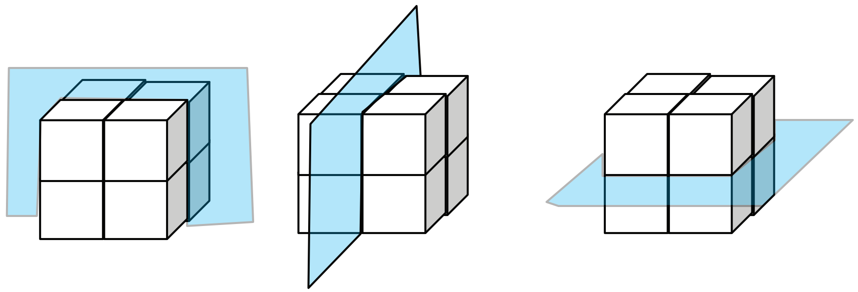
A színes rudak fehér kiskockáiból különböző méretű kockákat építenek:

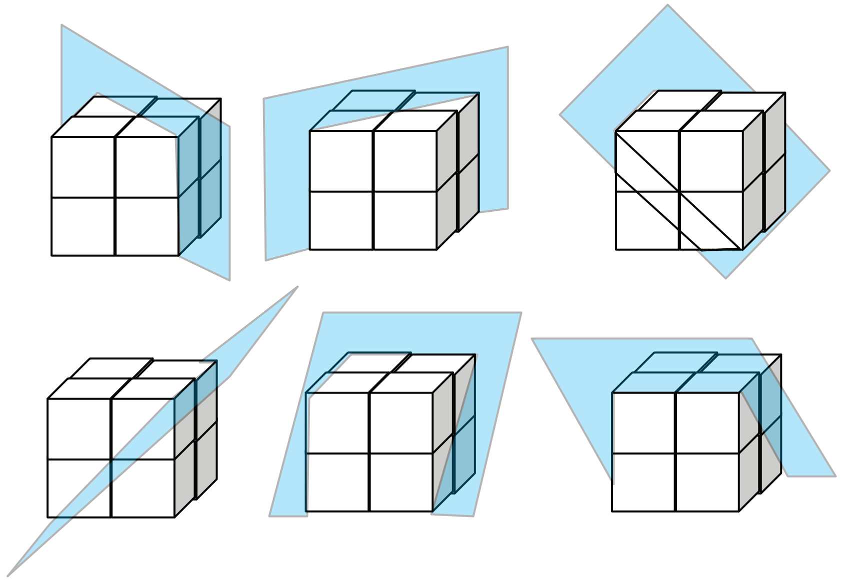


8 27 64 …

„Tedd oda a tükröt, ahol félbe lehetne vágni a kockákat!”
„Hány helyen lehetne félbe vágni a kockákat?”
Nem baj, ha nem találja meg minden tanuló az összes szimmetriasíkot!
Egy vágható, például gyurmából készült kockát valóban érdemes lenne kézbe adni.

Megkeresik a kockák szimmetriasíkjait. Megállapítják, hogy mindegyik kockának 9 szimmetriasíkja van.
A 2×2×2-es kockánál az ábrán látható 3 szimmetriasík helyére akár el is helyezhetik a tükröt. A többi síkot csak elképzelni tudják, illetve a testen kívül mutatják, hogyan helyeznék el a tükröt. Ha vágható anyagból is kézbe kapják a kockát, ellenőrizhetik elképzelésüket.



A kocka forgásszimmetriáinak vizsgálatát ezen a szinten még nem javasoljuk, legfeljebb a jobb képességű gyerekek végezhetnek önálló vizsgálódást.	

6. óra

17. A házi feladat ellenőrzése A tanító a feladatlapokat összeszedve minden tanuló megoldását egyénileg ellenőrizi. Ehhez használjuk a 15. mellékletet. A fóliát a feladatlapra helyezve könnyen meglátható és jelezhető a hiba. A tanulók a hibát a testmodell használatával javítsák ki otthon! A sok hibával készült házi feladatok javítását egy későbbi időpontban újra ellenőrizzük!	
18. Érdekes osztások; osztás több lépésben; visszaszorzással való ellenőrzés 1. „Az elmúlt órán kockákat építettetek fehér kiskockákból. Tudnátok-e számolással folytatni a kockák sorozatát? Hány kiskockából lehetne még építeni nagyobb kockát?" Ha segítségre van szükségük, emlékeztessük őket arra, hány kiskockát helyeztek egymás mellé, hány kockát helyeztek az alsó rétegbe, és hány rétegből építették fel a kockát.	Felidézik a kockák sorozatát: 8, 27, 64

„Hogyan lehet kiszámolni, hány kiskocka alkot egy nagy kockát?”

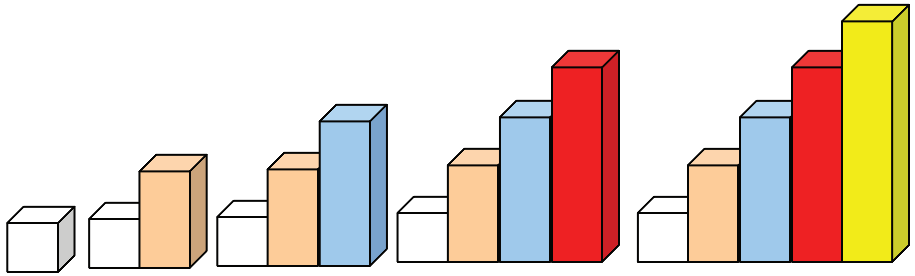
Szorzat alakban adják meg a kiskockák számát, felismerik a szabályosságot, és folytatják a sorozatot:
$2\cdot2\cdot2,\ \ 3\cdot3\cdot3,\ \ 4\cdot4\cdot4,\ \ 5\cdot5\cdot5,\ \ 6\cdot6\cdot6,\ \ 7\cdot7\cdot7\ldots$
Ennek alapján kiszámolják a kockák számát:
8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 …

2. „Mit gondoltok, hány centiméteres lehet annak a kockának az éle, amelyet 5000-nél több, de 6000-nél kevesebb kiskockából lehetne megépíteni?”

A gyerekek megbecsülik, melyik az a szám, amelyet háromszor véve szorzótényezőül, a szorzat 5000 és 6000 közé esik.
A szám biztosan kisebb 20-nál, hiszen $20\cdot20\cdot20=8000$, de nem lehet sokkal kisebb a 20-nál. Visszafelé lépegetéssel eljutnak a helyes megoldásig:
$19\cdot19\cdot19=6859$, $18\cdot18\cdot18=5832$, $17\cdot17\cdot17=4913$, így csak egy ilyen kocka van, amelynek élhossza 18 cm.

3. a) „Most színes rudakból építsetek lépcsőket, és számoljátok ki, hogy az egyre több fokú lépcsőket hány kiskockából tudnátok megépíteni!”

Néhány lépcső megépítése alapján felírják a sorozat néhány tagját:



A lépcsőfokok növelésével szerzett tapasztalatot, miszerint az utolsónak lehelyezett rúdnál mindig egy kiskockával hosszabb rudat helyezünk a már megépített lépcső mellé, felhasználják a számsorozat folytatásánál:
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36…, a különbségek a szomszédos tagok között mindig 1-gyel nőnek.

b) „Hány kiskocka lehet abban a lépcsőben, amelynek a legalsó lépcsőfokához 18 kiskocka szükséges?”

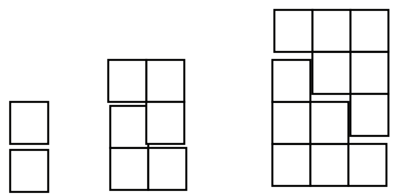
Felismerik, hogy a sorozat 18. tagját kell meghatározni. Többféleképpen számolhatnak:
Folytatják a sorozat képzését a 18. tagig a kirakás során megfigyelt szabályosság szerint. Segítségként felhasználják az egyesével növekvő különbségsorozatot:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153
\/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/ \/
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

A 18. tag a 171.

A következő problémafelvetéssel megpróbáljuk a gyerekeket rávenni, hogy olyan összefüggést keressenek, amely pl. a 31. tag meghatározásához nem igényli, hogy az összes megelőző 30 tagot meghatározzák.

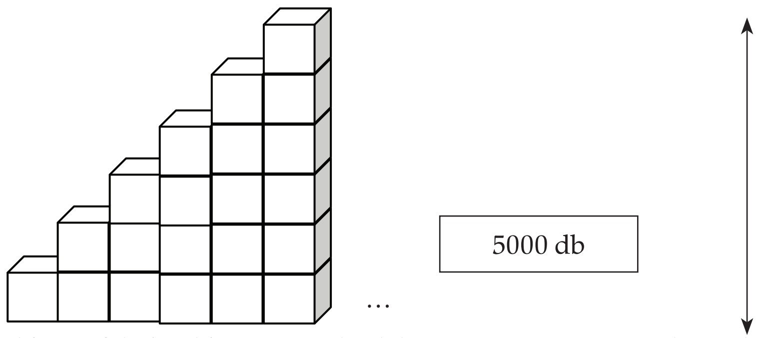
c) „Emlékeztek, néhány órával ezelőtt egy rekorderedményről olvashattunk, amely New York-ban az Empire State Building 1576 lépcsőjén született. Vajon egy ilyen sok lépcsőfokú építményt hány kiskockával tudnánk modellezni?”
Szükség esetén segítsük a felismerést:
„Figyeljétek meg a sorozat tagjainak 2-szeresét! Mutassa be kirakással is. Ha így hozzuk létre a 2-szerezést, téglalap alakú alakzathoz jutunk.



Hány kiskockából épülnek fel ezek az alakzatok?”

A szám ugyan 1 milliónál nagyobb, valószínűleg nem lesz probléma a szorzás elvégzése. Ha mégis, számoljanak a gyerekek számológéppel!
Ez túl nagy szám, el sem tudunk ennyi kiskockát képzelni.

d) „Ha lenne 5000 kiskockánk, abból milyen magas (hány lépcsőfokú) lépcsőt tudnánk megépíteni?”



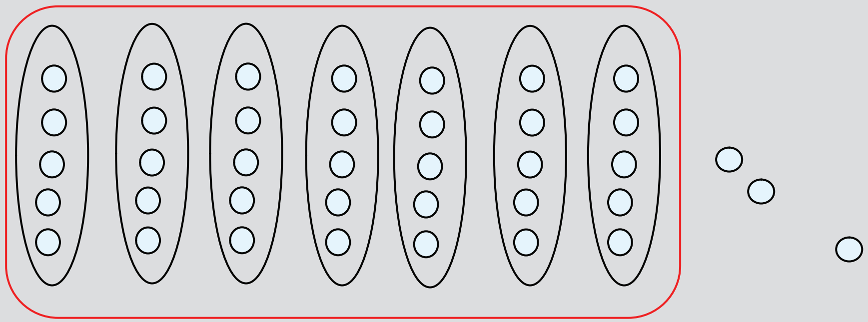
Ezekben a feladatokban megvolt a lehetőség az osztás műveletének elkerülésére. A következő feladatok igénylik az osztás alkalmazását.

A gyerekek elképzelik, hogy a kirakáshoz szükséges kiskockák számát az előző sorozat 1576. tagja adja meg.

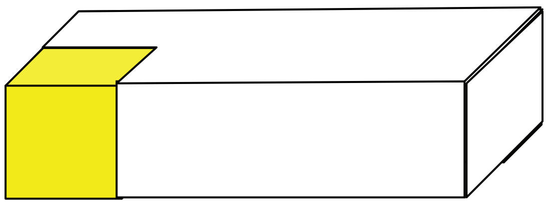
Önállóan vagy kevés segítséggel felismerik a sorozat képzési szabályát:
1·2, 2·3, 3·4, 4·5…
Ennek a sorozatnak az 1576. tagja 1576 · 1577, az eredeti sorozat ugyanennyiedik tagja pedig ennek a fele. (1576 · 1577) / 2 = 1 242 676

Az előbb felismert összefüggés alapján olyan számot keresnek, amelynek a nála eggyel nagyobb számmal való szorzata az 5000 kétszerese. Ezt megtehetik becsléssel, aztán becslésüket szorzással vagy osztással ellenőrzik.
A szorzással való számlálásnál felhasználhatják, hogy
100 · 100 = 10 000, és a 99 · 100 = 9900, a 100 · 101 = 10 100 már több, mint 10 000.
Így, 5000 kiskockából egy 99 lépcsőből álló lépcsősort lehet megépíteni.

Az osztással való ellenőrzéskor szembe találják magukat a 100-zal való osztás problémájával. Ezt a korábbi ismereteik (játékpénz, helyiérték-táblázat) alapján számítják, vagy felismerik, hogy 100 részre lehet úgy is osztani, hogy először 10 részre osztanak, majd a hányadost ismét 10 részre osztják.
10 000 : 10 = 1000 1000 : 10 = 100 Azt találják, hogy a hányados egyenlő az osztóval, de mi nála 1-gyel kisebb számot keresünk, azaz 5000 kockából 99 lépcsőből álló lépcsősort lehet megépíteni.

4. „Az óra elején különböző méretű kockákat építettetek a kis fehér kockákból. Ilyen kockákból újabb testeket hoztunk létre. Csak kiskockákat és a 2-szeres nagyítottjukat használtuk, mindegyikből ugyanannyit. Ha a megalkotott testet csupa kiskockából építenénk, 729 db kellene hozzá. Hány nagy és hány kiskockából építhettük az új testet?”	A gyerekek előkészítenek egy 2×2×2-es kockát (pl. színes rudakból megépítve vagy a 2-es Dienes készletből) és egy 1×1×1-es kockát. Elképzelik, hogy mindig ennyivel növeltük a már felhasznált kockák számát. Így alkottuk meg 729 db kockából a testet. Mivel ugyanannyi 2×2×2-es kockát használtunk, mint 1×1×1-est, ezért (8+1)=9 db kockát vettünk valahányszor, és így jutottunk a 729-hez. Mivel 729:9=81, ezért mindkétféle kockából 81 db-ot használtunk fel.
„Lehet-e, hogy kockát építettünk?” Ha össze tudunk gyűjteni ennyi darab kockát, néhányan megpróbálhatják megépíteni.	A feladat nehézségét éppen az okozza, hogy a 729=9×9×9, ezért azt hihetnénk, felépíthető ezekből a kockákból egy 9×9×9-es kocka. Viszont 2×2×2-es kockából legfeljebb 4×4×4=64 darabot használhatunk fel, hiszen ha valamelyik irányban 5 db kockát helyeznénk, annak már 10 cm lenne az élhossza. A test építéséhez viszont 81 darab 2×2×2-es kockát használtak fel.
Az érdeklődő tanulók számára megfogalmazhatunk egy újabb, még nehezebb problémát: Csak 2x2x2-es és 3x3x3-as kockákat használtunk, mindegyikből ugyanannyit. A megalkotott test 4375 db kiskockából készült. Hány testből építettük az új testet?”	A feladat megoldható lenne az előző mintájára: Egyszerre mindig 8+27=35-tel növeltük a már beépített kiskockák számát 4375-re. Azt kell megvizsgálnunk, ezt hányszor tettük, azaz hányszor van meg a 4375-ben a 35. Negyedik osztályban azonban nem tanultunk kétjegyűvel osztani, ezért új probléma merült fel. 35-ösével úgy is lehet csoportosítani, hogy először 5-ösével csoportosítunk, és az ötös csoportokat csoportosítjuk hetesével:  Így, tudunk 35-tel osztani, ha először 5-tel osztunk, aztán a hányadost 7-tel: 4375 : 5 = 875, 875 : 7 = 125. Tehát a kétféle kocka mindegyikéből 125 db-ot használtak fel.

5. „Kis fehér kockákból téglatestet építettünk. A téglatest három különböző élhossza (a kis fehér élhosszával mérve) közül a legrövidebb a középső fele, és a leghosszabb a középső 2-szerese. Milyen hosszúak a téglatest élei, ha a téglatest 1728 kiskockából épült?”
Keressünk vagy készítsünk egy dobozt, amelynek az élei 6 cm, 12 cm, 24 cm hosszúak (16. melléklet), és adjunk egy-egy példányt a csoportoknak!
„Ilyen alakú testről szól a feladat. Jelöljétek be a testen, hogyan lehetne kirakni a lehető legnagyobb kockákból!”
Szükség esetén segítsük a felismerést: „A lehető legnagyobb kocka élhossza egyenlő a téglatest legrövidebb élhosszával.”



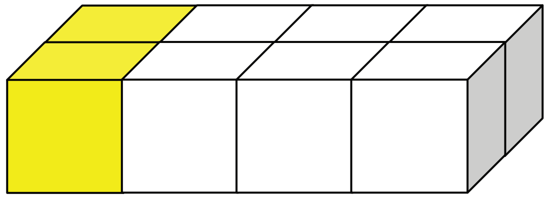
„Hány ilyen kocka fér a középső él mellé?”

„És a leghosszabb él mellé?”

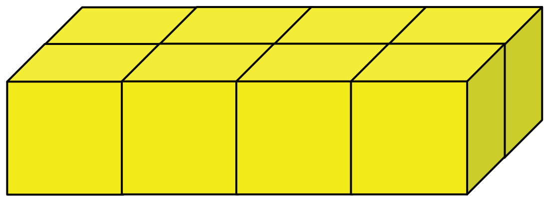
„Hány kiskocka kell legyen egy nagy kockában?”

A gyerekek a modellen felbontják a testet kockákra.

A középső él hossza 2-szerese a legrövidebb élhossznak, ezért 2 sort lehet a középső él mellé kirakni:



A leghosszabb a középső 2-szerese, ezért 4 kockát lehet a leghosszabb él mellé rakni:



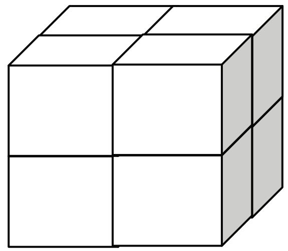
Az ábráról jól leolvasható, hogy 8 ilyen kockából épült fel a test, azaz egy alkotóelembe az összes kiskocka nyolcadrésze fért. 1728 : 8 = 216.
216 kiskockából épült fel egy nagyobb kocka.

„Mekkora lehet az élhossza ennek a nagy kockának?

Ezt a feladatot korábban már megoldottuk: 6×6×6 = 216, így ennek a kockának 6 cm-esek az élei. Ebből a téglatest élei számíthatók: 6 cm, 12 cm, 24 cm.

6. Átalakítható-e ez a téglatest kockává?

Jól mutatja az ábra, hogy igen, a kocka 12×12×12-es méretű lesz.



Továbbfűzhetjük a feladatot, szép számelméleti és kombinatorikai problémát alkothatunk belőle, és adhatjuk a tehetséges tanulóknak kutatási feladatnak. Milyen alakú téglatestek rakhatók ki ennyi darab (1728 db) kiskockából?

A feladat megoldása az 1728 háromtényezős szorzatra bontásait igényli. Az ellenőrzés számológéppel történhet. Ha a három szám szorzata 1728, akkor jó a megoldás.

7. Amennyiben szükségét érezzük az írásbeli osztás további gyakorlásának, válogassunk az 5. feladatlap feladataiból. Ezek a numerikus feladatok a hányadosokban megfigyelhető szépséggel vagy az ötletes megoldás egyszerűségével keltheti fel a gyerekek érdeklődését. A feladatok azért találhatók meg a feladatlapon, hogy a gyerekek akár különböző időpontokban olvashassák, és töprenghessenek a megoldáson. A megoldásokat itt közöljük.
(5. feladatlap, 1–4. feladat)

„Kőnig Dénes Mathematikai mulatságok, 1. füzetében (Typotex, Kft, 1991.) sok érdekességet találhatunk a számokról. Megismerhetsz ezek közül néhányat (1–3. feladat), ha elvégzed ezeket az osztásokat. Számolj a füzetedben!”

1. Írj egy háromjegyű számot, amelynek egyenlők a számjegyei. Oszd el ezt a számot a számjegyeinek összegével! Én előre borítékolom az eredményt. Mit gondolsz, honnan tudom?

Néhány szám kipróbálása után rájönnek, hogy a hányados mindig 37, bármelyik számból is indultak.
Közben elvégzik az alábbi osztásokat:
111 : 3 = 37; 222 : 6 = 37; 333 : 9 = 37

Lehet, hogy néhányan megijednek a további osztásoktól, de többféle módon segíthetnek magukon:
– Szorzással ellenőrzik, hogy a 444 : 12 = 37 valóban igaz.
– Rájönnek, hogy 12-vel úgy is lehet osztani, hogy osztanak 4-gyel, aztán 3-mal. Ez a felismerés jól jöhet a titok nyitjának a megfejtéséhez. Észreveszik, hogy bármelyik számból is indulnak, ha a számot a szereplő számjeggyel elosztják, a hányados mindig 111.

2. A 6-nak 3 olyan osztója van, amely kisebb a 6-nál (magánál a számnál): 1, 2, 3. Ezeknek a számoknak az összege is 6. Vizsgáld meg, az alábbi számok közül melyek osztói rendelkeznek még ilyen tulajdonsággal, hogy a számnál kisebb osztók összege magát a számot adja: 12, 28, 220, 248, 284, 496, 8928!

Ezt a feladatot az osztók megkeresésével és összeadásával tudják csak megoldani.

A feltételt igazzá tevő számok: 28, 496.
Érdekesség: a 220-nak a nála kisebb osztóinak összege
1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284, és fordítva, a 284 nála kisebb osztóinak összege
1+2+4+71+142=220.

3. a) Írj csupa 1-es számjegyből álló számokat, és oszd el mindegyiket 9-cel! Ha ‚rendben’ végzed az osztásokat, a hányadosok és a maradékok körében is megfigyelhetsz szabályosságot.

1:9=0	m: 1
11:9=1	m: 2
111:9=12	m: 3
1111:9=123	m: 4
11111:9=1234	m: 5
111111:9=12345	m: 6
1111111:9=123456	m: 7
11111111:9=1234567	m: 8
111111111:9=12345678	m: 9
1111111111:9=123456789	m: 10

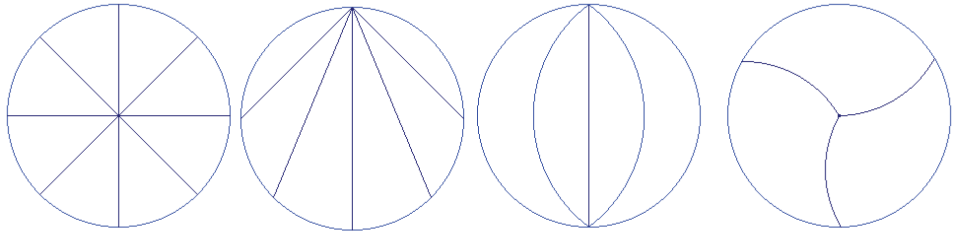
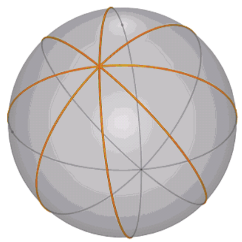
b) Megfigyelhetsz érdekességet akkor is, ha a csupa 8-as számjegyből álló számokat osztod el 9-cel!

8:9=0	m: 8
88:9=9	m: 7
888:9=98	m: 6
8888:9=987	m: 5
88888:9=9876	m: 4
888888:9=98765	m: 3
8888888:9=987654	m: 2
88888888:9=9876543	m: 1
888888888:9=98765432	m: 0

c) Oszd el a 9-et 8-cal. Azután olyan számokat írj, amelyeknek az első számjegye 9, és a többi az előzőnél 1-gyel kisebb! Ezeket a számokat is 8-cal oszd! A következő feladatot is megoldhatod írásbeli osztással. 4. Mi lehet a hiányzó számjegy, ha a szám osztható 9-cel? 834☐, 34☐5, 7☐35	9:8=1 m: 1 98:8=12 m: 2 987:8=123 m: 3 9876:8=1234 m: 4 98765:8=12345 m: 5 987654:8=123456 m: 6 9876543:8=1234567 m: 7 98765432:8=12345678 m: 8 987654321:8=123456789 m: 9 Ha nincs jobb ötletük, sorba beírva 0-tól 9-ig a számjegyeket, elvégezhetik az írásbeli osztást. Gondolhatnak arra is, hogy 9-cel osztható számok összegeként állítják elő a számot: 8100+180+ 63; 2700+720+45; 7200+90+45 A keresett számok: 8343, 3465, 7335.
19. Valószínűségi játék és kísérlet; gyakoriságok alakulása; relatív gyakoriságok alakulása a kísérletek számának növekedése közben. Ábrázolás Szervezzünk 4-6 fős csoportokat, osszuk ki a 17. melléklet táblázatát minden gyereknek, a számkártyákból és a tulajdonság-kártyákból minden csoport egy sorozatot kapjon! „Miféle kártyákat kaptatok?” „Húzzatok a tulajdonság-kártyákból egyet-egyet! A számkártyákat keverjétek össze, és helyezzétek egymás mellé. Így egy négyjegyű számhoz juttok. Írásbeli osztással állapítsátok meg, hogy erre a számra igaz-e a kártyátokon olvasható tulajdonság! Ha igen, akkor annyi mezőt színezzetek a saját táblátokon, ahányszor a játék során bekövetkezett ez az esemény. Például, tegyük fel, hogy az általam húzott kártyára az van írva, hogy páratlan!” Elhelyezi a 17. melléklet fóliáját az írásvetítőn, összekeveri a kártyákat, és egymás után a táblára helyezi őket. Ha az első kirakásnál a szám tényleg páratlan lesz, akkor beszínezi a fólián az első mezőt. Ha a második szám is páratlan lesz, akkor a 2-es fölött mindkét mezőt beszínezi, mert a 2 kísérletből kettőben is bekövetkezett az esemény. Ha viszont a 2. szám nem páratlan, akkor csak 1 mezőt színez be, mert a 2 kísérletből 1 esetben volt páratlan a szám.	Kétfélét; vannak számkártyák, és vannak olyanok, amelyiken szöveg van. Számok lehetséges tulajdonságai olvashatók rajtuk.

Ha a gyerekek megértették a szabályt, kezdődhet a tevékenység. Az ellenőrzést segíti, ha a gyerekek le is jegyzik a kirakott négyjegyű számokat.	A gyerekek 4-jegyű számokat képeznek, írásbeli osztást végeznek, gyakoriságokat ábrázolnak, és közben megfigyelhetik a relatív gyakoriságok alakulását is az egyes események során.
Ha a játék közepére értek, kérjük meg őket, húzzanak egy vonalat a 24. oszlopban oda, ameddig várják majd a mezők színezését. Ha a játék végére értek, kérjük meg az egyforma eseményekkel játszó gyerekeket, hogy hasonlítsák össze a táblájukat.	12 kísérlet alapján megsejtik, hogy 2-szer annyi kísérlet során hányszor fog bekövetkezni a megfigyelt esemény. Várhatóan megfigyelik, hogy az azonos eseménnyel játszó gyerekek táblája között nincs nagyon nagy különbség.
Ez után térjenek vissza a saját csoportjukhoz, és hasonlítsák össze a csoporton belül a táblákat. „Keressetek magyarázatot a tapasztalatra! Vajon miért van nagy különbség néhány tábla között, és miért van kicsi eltérés más táblák között?”	A különböző események más eséllyel következnek be. Jól járt, aki azt az eseményt húzta, hogy a szám osztható 3-mal, mert ezekből a számjegyekből képezhető 4-jegyű számok mindegyike osztható 3-mal. Ezeknél a tanulóknál az összes mező színes lett. (Ha nem, ellenőrizzék az osztást!)
	Jól látható, hogy egyforma lett azok táblája, akik a 2-vel oszthatóságot és a 6-tal oszthatóságot figyelték, hiszen minden kirakott szám 3-mal osztható, és ezek közül a páros számok osztható 6-tal. (Ha nem egyformák a táblák, ellenőrizzék az osztásokat!) A számok fele osztható 2-vel, így a táblákon talán látható, hogy a kísérleteknek közel a felében a mezőket színezni lehetett. Nem jártak túl jól azok, akik a 4-gyel oszthatóságot figyelték, hiszen a kirakható számok negyede osztható csak 4-gyel. Hasonlóan jártak azok, akik az 5-tel oszthatóságot figyelték, hiszen a számok negyede osztható 5-tel. A legrosszabbul azok jártak, akik a 9-cel való oszthatóságot figyelték, hiszen a számok egyike sem osztható 9-cel, így ők egyetlen mezőt sem színezhettek.
Házi feladatnak válasszunk az 5. feladatlap még nem megoldott feladatai közül!	

7. óra

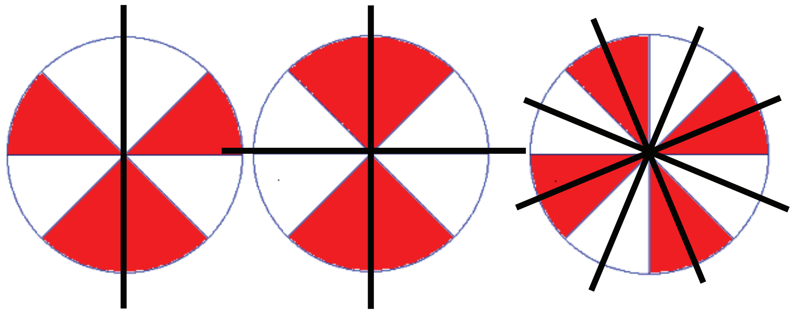
Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
20. Szimmetria vizsgálata körön és gömbön Szervezzünk 4 fős csoportokat! Mindegyik csoport asztalán helyezzünk el egy Lénárt-féle gömböt, és a gömbi eszközöket, celofánt vagy fóliát és zsebtükröt! Rajzoljuk meg a gömb 4 főkörét, amelyek átmennek egy ponton, és 8 egyenlő részre osztják a gömb felületét! Minden csoport számára készítsünk elő egy gömböt így megrajzolva! Hasonlóan rajzoljunk meg minden gyereknek egy pingponglabdát, vagy egy hungarocellből készült gömböt (kreatívboltban kapható)! A pingponglabdát helyettesítheti narancs is. „Figyeljétek meg a 6. feladatlap első feladatában a köröket, amelyek részekre vannak osztva. Melyik ábrán egybevágók ezek a részek? Azt is figyeljétek meg, melyik ábrának hány tükörtengelye van!” (18. melléklet)	A gyerekek megvizsgálják az ábrákat, szükség esetén tükröt is használnak. Válaszolnak a kérdésekre:  ✓ 8 1 $\boxed{2}$ $\boxed{✓\ 0}$
„Tegyetek egy darab celofánt a rajzokra, és másoljátok rá a mintákat! Hányféle helyzetben tudjátok a másolt rajzot ráilleszteni a feladatlap ábrájára átfordítás nélkül?” Vágjuk ki a melléklet egyik ábráját az ábra fölé rajzolt * jellel együtt, és írásvetítőre helyezéssel ellenőrizzük a megoldást! A forgatott fóliára rajzolt * mozgásának a követésével megállapítható, hogy hányadrendben forgásszimmetrikusak az alakzatok. Ezt az elnevezést még ne használjuk!	A gyerekek a fóliarajzok segítségével valójában azt állapítják meg, hogy hányadrendben forgásszimmetrikusak az ábrák. 8 1 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
„Most figyeljétek meg a gömböt! Hány főkört jelöltünk ki rajta? Hány részre osztják ezek a főkörök a gömböt? Egybevágók-e ezek a részek? Hogyan tudnánk erről megbizonyosodni?”	A gyerekek megállapítják, hogy a 4 főkör 8 egybevágó részre osztja a gömböt. A részek egybevágóságát úgy igazolják, hogy ráhelyeznek egy félgömbfóliát a gömbre, rárajzolják a gömbön látható egyik gömbkétszöget, és a fóliát továbbcsúsztatva a gömb felületén, ellenőrzik, hogy ezzel egybevágó mindegyik gömbkétszög a gömbön. 

„Tartsátok úgy a gömböt, hogy szembe legyen veletek a gömbkétszögek egyik közös csúcsa! (Mutatja is, amit mond.) Ha lefényképeznétek most a gömböt, a feladatlapon látható rajzok közül melyik ábra lenne a fotón?”
Ha nehéz a gyerekeknek a döntés, helyezzük a gömböt írásvetítőre, és vetítsük ki a képet!

A gyerekek kiválasztják az első ábrát.

„Színezzétek a feladatlap 2. feladatában lévő ábrákat a feltételeknek megfelelően!”
Célszerű színes fóliadarabokat kivágni, és ezekkel letakarhatják a gyerekek a megfelelő körcikkeket a fólián az ellenőrzéskor.

Elkészítik a feltételeknek megfelelő színezést, például:



1 tükörtengelye van; 2 tükörtengelye van; 4 tükörtengelye van.
Közben tapasztalatot szereznek arról, hogy a 8 szimmetriatengellyel rendelkező alakzat szimmetria-tulajdonságát hogyan lehet „elrontani” színezéssel.

A feladat 2. részében a színezett ábrák forgásszimmetriáját vizsgálják.

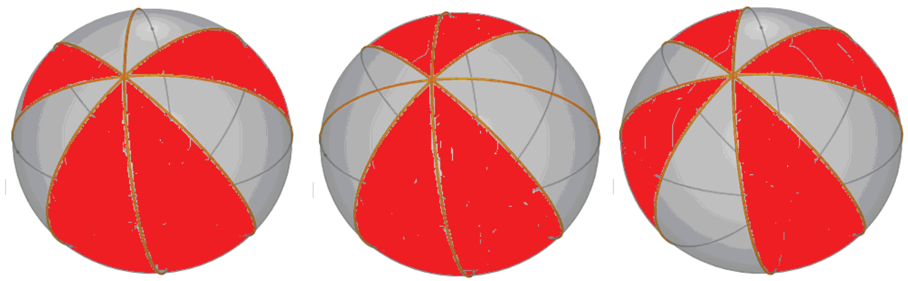
A színezett ábrák forásszimmetriáját vizsgálva is érdekes tapasztalatokhoz juthatnak:

1 2 $\boxed{4}$

„Most osszuk meg a munkát a csoportok között! Színezzétek a pingponglabdákon a 8 gömbkétszög felét úgy, hogy a színes gömböt lefényképezve olyan helyzetből, mint az előbb, ezeket a fotókat kapjátok!” Itt is helyettesíthetjük a pingponglabdákat naranccsal, amelyek héjából megfelelő körcikkeket kivágva könnyen és gyorsan hozhatnak létre a gyerekek a feltételeknek megfelelő alakzatokat.

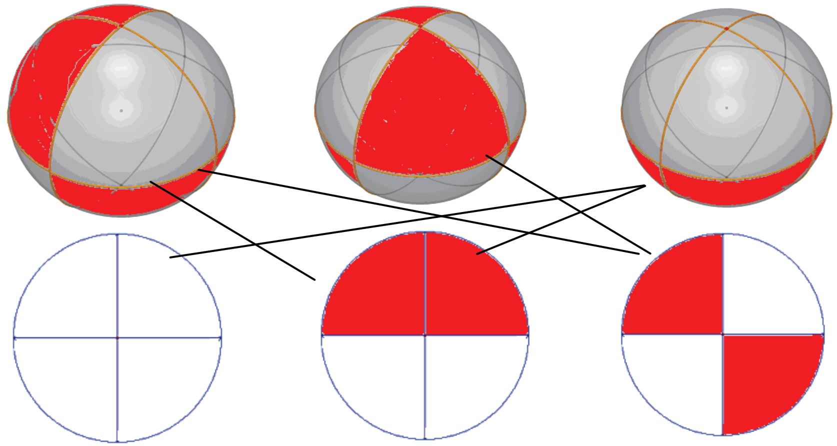
Az ellenőrzést ismét segítheti a kép kivetítése.

A gyerekek felhasználják a síkban készült ábrákat, és ennek alapján ki tudják színezni a gömböt.



„A 6. feladatlap 3. feladatában képek alapján kell eldönteni, hogy melyik gömbről melyik fotó készülhetett.”
Amit eddig a gömbfelületen tapasztaltak, azt megpróbálják elképzelni a rajz alapján. Fontos azonban, hogy készítsünk elő ilyen színezésű gömböket, hogy az elképzelést ellenőrizni tudják a kézbe fogható színes gömbök segítségével!

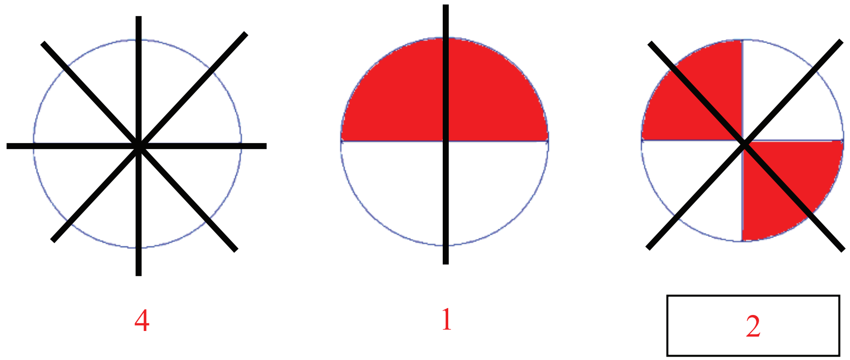
A 6. feladatlap 3. feladatának a) részénél elképzelik, hogy melyik gömbről melyik fotó készülhetett.



A feladatlap 3. feladatának b) része a síkbeli alakzatok tükrösségét átfordítással vizsgáltatja.

Meglepődve tapasztalják, hogy az első és a harmadik gömbről két fotó is készülhetett, és a második és az utolsó fotó két gömbről is készülhetett.

b) Átfordítás segítségével megállapítják a tükörtengelyek számát:



Nehéz látni, és legfeljebb színezett gömbfóliával ellenőrizhető a sejtés, hogy hányféleképpen lehetne az a) feladatban található színezett labdákat két egyforma félgömbre vágni. Ennek megfigyelésében nagy különbségek lehetnek a gyerekek között. Ha ők nem vetik fel, mi ne kérdezzük, majd a következő feladatban nézegethetik a gömböket tükörben!

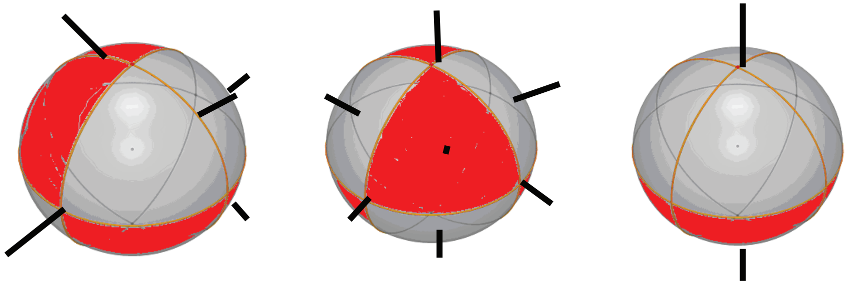
Lehet, hogy néhányan kapcsolatot próbálnak keresni a síkbeli alakzatok szimmetriája és a feladat a) részében található színes gömbök szimmetriája között. Az is lehet, hogy pont az a) feladat fogja ráébreszteni őket arra, hogy ezt nem tehetik meg, hiszen egy színezett gömbről lehet készíteni olyan fotót is, amelyik kép 1, míg egy másik kép 2 szimmetriatengellyel rendelkezik, sőt a harmadik gömbről készülhet olyan fotó, amelyiknek 4 szimmetriatengelye van, míg egy másik fotó csak 1 szimmetriatengellyel rendelkezik.

A c) feladatban síkbeli alakzatok forgásszimmetriáját vizsgálva, lehet, hogy néhány gyerekben felvetődik, vajon a gömbnél megfigyelhetők-e ilyen elforgatások. Az érdeklődőknek engedjük meg, hogy végezzenek ilyen vizsgálódásokat.

c) Azt állapítják meg, hogy forgásszimmetrikusak-e az alakzatok. Megvizsgálják, hányféle helyzetben tudják a másolt rajzot ráilleszteni a feladatlap ábrájára átfordítás nélkül.

4 1 2

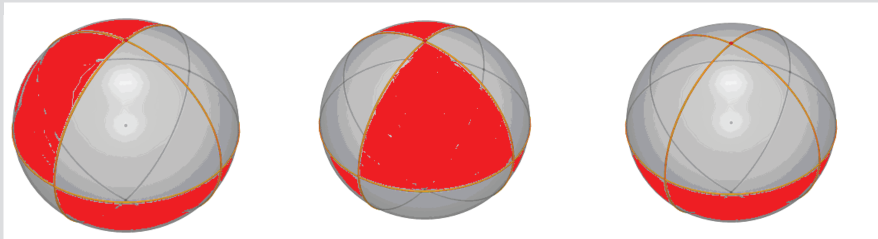
(A gömböket vizsgálva rájöhetnek, hogy az a) feladatban található 3. gömbnél csak egy olyan egyenes van, ami körül elforgatható a gömb úgy, hogy ne változzon a „látvány”. Az 1. gömbnél 3 ilyen egyenest is találunk, és mindegyiknél 2-féle állása lehet a színes gömbnek, hogy a látvány ugyanolyan legyen. Nem várható, hogy a 2. alakzat forgástengelyeit megtalálják, de azt beláthatják, hogy több ilyen tengely van.)



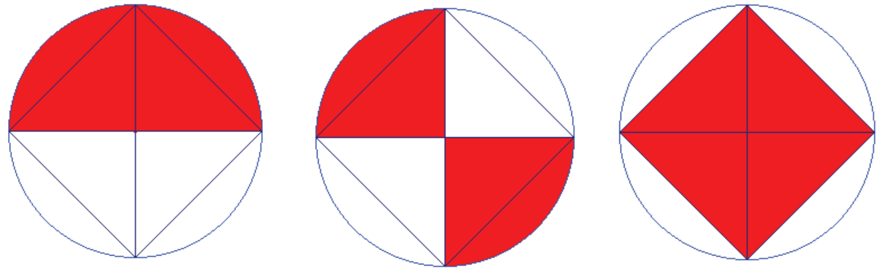
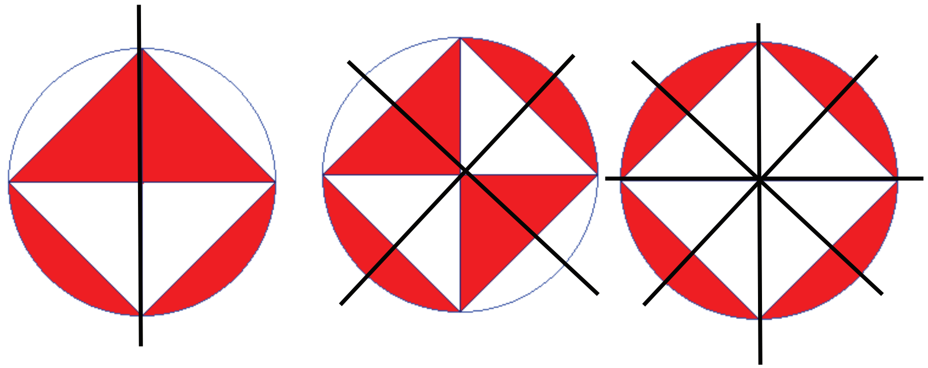
A színes gömbök síkszimmetriájáról szerezhetnek kezdeti tapasztalatot a feladatlap 4. feladatában. Ne várjunk tökéletes megoldást, elégedjünk meg a gömbök nézegetésével!

A tükörsíkok vizsgálatával csak jó képességű osztályokban próbálkozzunk!

Tükör vizsgálatával felismerhetik a szimmetriasíkok számát.



3 **6** $\boxed{\textbf{4}}$

Szereztessünk további tapasztalatot a síkbeli ábrák szimmetriájáról minden tanulóval! A 6. feladatlap 5. feladatának ábráit színezzék a gyerekek a feltételeknek megfelelően!	A 6. feladatlap 5. feladatának megoldása során a gyerekek észreveszik, hogy most is 4 részt kell színezniük, de nem feltétlenül a kör felét. A feltételeknek megfelelően egy lehetséges színezés: 1 tükörtengelye van 2 tükörtengelye van 4 tükörtengelye van 
Végül vizsgálják meg a gyerekek a 6. feladat ábráit!	Az 1. és a 2. ábrán a körlap fele piros, a 3. ábrán nem. A szimmetriatengelyek: 
Házi feladat A következő órára hozzatok egy képet a kedvenc állatotokról.	