0792. MODUL

HOZZÁRENDELÉSEK, FÜGGVÉNYEK, SOROZATOK

Sorozatok

KÉSZÍTETTE: PARÓCZAY JÓZSEF, PUSZTAI JULIANNA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Ismerkedés sorozatokkal. A sorszám és a sorozat tagjának kapcsolata. Sorozatok tagjai közötti összefüggések felismerése, szabályok megfogalmazása. Számtani sorozat tulajdonságai, elemek számtani közepének megfigyelése, *n*-edik elem képzési szabálya. Egyszerű mértani sorozatok megfigyelése.
Időkeret	3 óra + 1 óra felmérő dolgozat írása
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben*: mindennapjainkban, fizika, kémia, informatika, nyelv, zene *Szűkebb környezetben*: hozzárendelések, függvények, szabályjátékok, koordináta-rendszer, algebrai kifejezések, műveleti tulajdonságok. *Ajánlott megelőző tevékenységek*: szabályjátékok, algebrai kifejezések átalakításai. *Ajánlott követő tevékenységek*: Sorozat tagjainak összegképletének megadása, mértani sorozat definiciója.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás kompetencia*: sorozat tagjainak kiszámítása, műveletvégzés sorrendje, műveleti tulajdonságok. *Mérés, becslés*: táblázatok készítése, esetenként nagyságrendi következtetések a nagy sorszámú tagokra. *Mennyiségi következtetés*: a sorozat elemeinek változása a sorszám függvényében. *Szövegértés, problémamegoldás, metakognició*: gyakorlati problémák, feladatok a hétköznapi életben, ezek matematikai leírása, vizsgálata, sorozatok megfigyelése, gyűjtése. *Rendszerezés, kombinativitás*: módszeres próbálkozás szabályok megtalálásában, többféle szabály keresése. *Dedukció, indukció*: a sorozat néhány tagjából következtetés a további tagokra, az általános tagból, szabályból a tagok megtalálása.

AJÁNLÁS

Frontális, egyéni és csoportmunka vegyesen (kooperatív módszerek is)

TÁMOGATÓ RENDSZER

Hétköznapi életből gyűjtött példák sorozatokra, írásvetítő, zsebszámológép, feladatlapok

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka során szóbeli értékelés, a téma végén értékelő feladatlap kitöltése. A továbbhaladás feltétele: tudjon egyszerű esetekben, néhány taggal megadott sorozathoz lehetséges szabályt keresni, a sorozatot néhány elemmel folytatni mindkét irányban. Tudja a számtani sorozat definícióját.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök Feladatok
I. Sorozatok			
1.	Ráhangoló játékos feladatok	tapasztalatok gyűjtése	1. tanári melléklet, 1. feladatlap 1.
2.	Sorozatok építése	Rendszerezés, kombinativitás	1. feladatlap 2., 3.
3.	Számsorozatok megfigyelése, szabálykeresés	Következtetés a sorozatképzési szabályból sokadik elemekre	1. feladatlap 4., 6.
II. Számsorozatok tagjainak jelölése, megadása			
1.	Számsorozat építése	számolási készség, összefüggések keresése, kreativitás	2. feladatlap 1.
2.	Számsorozat megadása, elemeinek jelölése	jelölésmód, jelölésmód alkalmazása	2. feladatlap 2., 3.
3.	Sorozatok különbségsorozata	szabályfelismerés, szabályalkotás	2. feladatlap 4., 5.
4.	Számtani sorozat fogalmának bevezetése	sorozatképzés	2. feladatlap 6.; 3. feladatlap
III. Feladatok számtani és mértani sorozatokkal			
1.	A számtani sorozat *n*-edik eleme, a sorozat elemeinek összege	számtani sorozat tulajdonságainak felismerése konkrét sorozatban induktív következtetés	4. feladatlap 1–4.
2.	Mértani sorozat	Számolás készség, szabályfelismerés	4. feladatlap 5.
3.	Függvény és sorozat	Szövegesfeladat-megoldás	4. feladatlap 6.
IV. Felmérő feladatlap írása			
			Felmérő A–B

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Sorozatok

1. Ráhangoló játékos feladatok

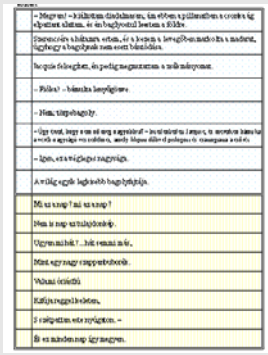
Ha már a függvénykapcsolatban egymáshoz rendelt elemek alap- illetve képhalmazhoz tartozását is a személyes átéléssel próbáltuk a gyerekek számára maradandó élménnyé tenni, mi sem természetesebb, mint hogy a sorozat-fogalom bevezetésekor is az egy sorozatelem–egy gyerek asszociációval megerősített alapokra kezdjük az építkezést.

– Álljanak nagy körbe a tanulók! (Ha sokan vannak, és kicsi a hely, lehet fél osztállyal is játszani: a többiek drukkolnak, majd csere, és az osztály másik fele új szabállyal egy újabb menetet játszik.) Kezdjék sorolni körben az egymást követő pozitív egész számokat – minden tanuló mond egyet –, de nem szabad kimondani a hármas számot és a három többszöröseit, hanem ehelyett azt kell mondani, hogy „bumm”. Aki eltéveszti, az kiesik a játékból, és helyre mehet.

Tehát ez hangzik sorban: 1, 2, bumm, 4, 5, bumm, 7, 8, bumm, 10, 11, bumm, bumm, 14, bumm, 16, 17, bumm, 19, 20, bumm, 22, bumm, bumm, 25, 26, bumm, 28, 29, bumm, bumm, bumm, …
A második „bumm”-os játékban a 4-es szám vegye át a 3-as szerepét!

– A következő játék a sorozatokban a sorrend fontosságára irányítja a figyelmet. (**1. tanári melléklet**)

1. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!



Az osztály tanulói három csoportban dolgoznak a következő feladatban: 8 tanuló egy történetet állít össze adott mondatokból, 8 tanulónak egy verset kell verssoraiból elszavalni, az osztály többi tanulója az 1. feladatlap 1. feladatával dolgozik, a mindennapi életből gyűjt sorozatokat. Ha elkészültek, akkor osztály előtt bemutatják a megoldásaikat és megbeszéljük a tapasztalatokat.
Az első csoportba tartozó gyerekek 8 mondatból álló történetet kapnak: mindenki egy cédulát húz, amelyen egy mondat van. (Durell: A részeg erdő című könyvének pici részlete.) Nem tudják, hogy az eredeti szövegben hogyan következtek egymás után ezek a mondatok. A csoport feladata, hogy, miután megismerkedtek egymás mondataival, állapítsák meg és írják a cédulákra, melyik az első, a második, stb. mondat. Így, amikor felsorakozva felolvassák, értelmes szöveget interpretálnak.

A második csoport Petőfi: A Nap című versének egy-egy sorát kapja egy-egy cédulán. Nekik is meg kell állapítaniuk, hogy melyik az első, második, stb. verssor, majd az osztály előtt felsorakozva – ki-ki a saját sorát mondva – elszavalják a verset.

Ezekkel a feladatokkal a sorozatot, mint függvényt érzékeltetjük, a pozitív egész számokhoz mondatokat illetve verssorokat egyértelműen hozzárendelve. Ugyanígy a harmadik csoport által gyűjtött példákon is megállapítjuk, hogy ki, vagy mi az első, második, harmadik tagja a sorozatnak.

1. tanári melléklet:

Az első csoport mondatai sorban:

1. – Megvan! – kiáltottam diadalmasan; ám ebben a pillanatban a csonka ág elpattant alattam, és én baglyostul leestem a földre.
2. Szerencsére a hátamra estem, és a kezem a levegőben markolta a madarat, úgyhogy a bagolynak nem esett bántódása.
3. Jacquie felsegített, én pedig megmutattam a zsákmányomat.
4. – Fióka? – bámulta lenyűgözve.
5. – Nem; törpebagoly.
6. – Úgy érted, hogy nem nő meg nagyobbra? – hitetlenkedett Jacquie, és meredten bámulta a veréb nagyságú veszedelmet, amely liliputi dühvel pislogott és csattogtatta a csőrét.
7. – Igen, ez a végleges nagysága.
8. A világ egyik legkisebb bagolyfajtája.

A második csoport verssorai:

1. Mi az a nap? mi az a nap?
2. Nem is nap az tulajdonkép.
3. Ugyan mi hát?... hát semmi más,
4. Mint egy nagy szappanbuborék.
5. Valami óriásfiú
6. Kifúja reggel keleten,
7. S szétpattan este nyúgaton. –
8. És ez minden nap így megyen.

1. FELADATLAP

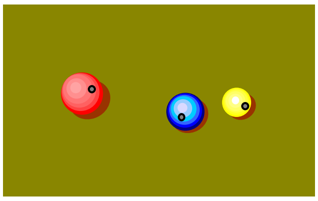
1. Hol találkozunk a mindennapi életünkben sorozatokkal?
Gyűjtsetek minél több példát az otthon, iskolában, üzletekben, intézményekben, tévében, sportversenyeken, fizikában, kémiában, biológiában, az élet bármilyen területén előforduló sorozatokra!
Pl.: az osztály neveinek ABC szerinti sorba rendezése; bankokban, orvosi rendelőkben a várakozók érkezés szerinti sorba rendezése; tornasorban nagyság szerinti rendezés; sportversenyeken a szerzett érmek száma szerinti rendezés; kihúzott lottószámok növekvő sorrendje; vonatmenetrend stb.

Beszéljük meg, hogy a sorozatoknak van egy első, második, harmadik … n-edik (ahol n pozitív egész szám) tagja. Fontos hangsúlyozni a sorszám szerepét, mert itt ez határozza meg egyértelműen, hogy melyik tagról van szó. Pl.: az osztálynévsorban egyértelmű, hogy ki a 13. tanuló. A sorozat tehát olyan függvény, amelyben pozitív egész számokhoz rendelünk értékeket valamilyen szabály szerint.

2. Sorozatok építése

A 2. és 3. feladat sorozatok alkotása. A 2. a lányok, a 3. a fiúk számára készült, de természetesen bárki bármelyiket választhatja. Mindenki csak az egyik feladaton dolgozzon! Önállóan tervezzenek, majd alkotásaikat mutassák meg egymásnak! Ezek valószínűleg periodikus sorozatok lesznek. Figyeljék meg az ismétlődő motívumokat! Utalhatunk a végtelen szakaszos tizedestörtek periodikusan ismétlődő számjegyeire is.

2. Nagyon sok ilyen gyöngy van Nagymama kincses dobozában. Szívesen ad Neked belőlük, amennyit kérsz, ezért úgy gondolod, hogy egy szép gyöngysorral fogod barátnődet születésnapján meglepni. Tervezd meg és rajzold le, milyen lesz ajándékodban a gyöngyök sora!



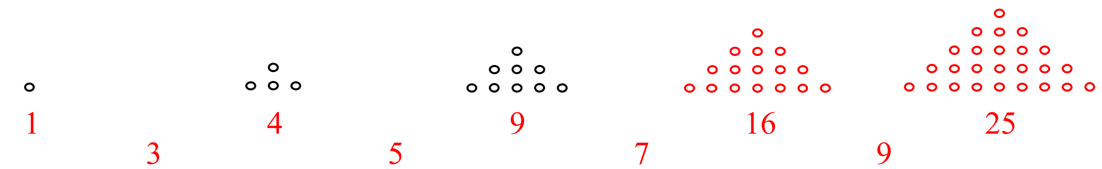
3. A fiúk faragott botot készítenek a kiránduláson. Rovátkás díszítést vésnek végig a bot hosszában. Háromféle jelet használnak: > < +. Ezeket elforgatva is alkalmazzák. Tervezz ilyen díszítést, rajzold le, milyen legyen a rovásjelek egymásutánja!

A 4. feladaton mindenki önállóan dolgozzon, de a csoporttársak mutassák meg egymásnak megoldásaikat! Itt kerítünk sort arra, hogy a sorozatok végtelenségéről beszéljünk: mivel a pozitív egész számok sora végtelen, a hozzájuk rendelt sorozatelemek sora is végtelen. Vannak tehát véges és végtelen sorozatok.
Az itt adott megoldás csak egy a lehetséges megoldások közül. Fontos beszélni arról, hogy ezeket a sorozatokat másképpen is lehet folytatni. Ha a gyerekek nem hoztak más megoldást, akkor mi mutassunk nekik egyet-kettőt (például periodikusan ismétlődőket). Beszélgessünk itt arról, hogy néhány elem megadása sohasem határozza meg a sorozatot.

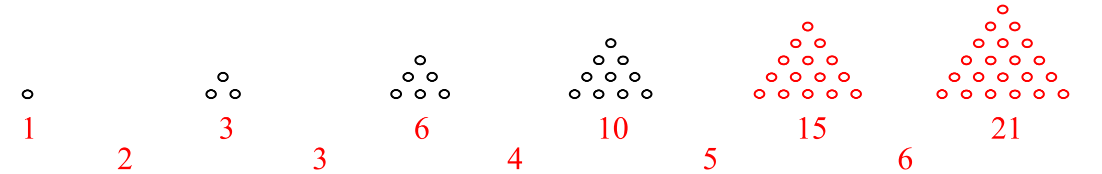
3. Számsorozatok megfigyelése, szabálykeresés

4. Figyeld meg az ábrák sorozatát! Keress hozzájuk valamilyen szabályt, és folytasd aszerint! Írd mindegyik alá, hogy hány pötty van az egyes elemekben! Rajzolj és folytasd a számsorozatot még 3-4 taggal! Rajz nélkül is folytathatod a sorozatot, ha találtál szabályt, amely szerint követik egymást a számok az adott sorban.
Hány eleme van ezeknek a sorozatoknak?

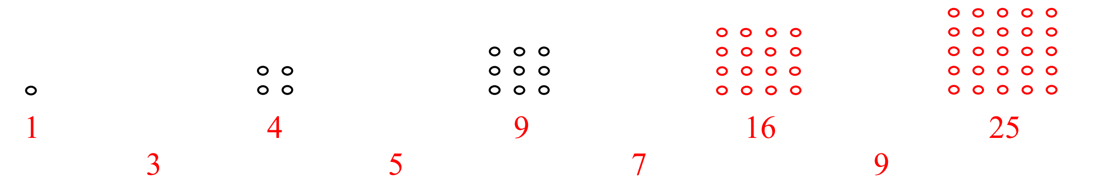
a)



b)



c)



Az 5. feladatot a négyes csoporton belül közösen oldják meg úgy, hogy minden alpontot más-más tanuló magyaráz, a többiek pedig figyelik a megoldását, ha szükséges, segítenek, vitatkoznak, érvelnek, végül a csoport közös véleményt alakít ki. Frontális ellenőrzés: Minden feladatot másik csoport szóvivője ismertet röviden.
Ha az idő nagyon elszaladt a játékokkal, ezekből a feladatokból annyit végezzünk el, amennyi az órába belefér, a többit adjuk házi feladatnak. Ebben az esetben a csoportvita, és az ellenőrzés a következő órára marad.
Házi feladatnak adhatunk a feladatgyűjtemény 1–3 feladatai közül is.

5. Figyeld meg a számok sorozatát! Találj ki hozzá szabályt! Ha találtál szabályt, folytasd mindegyik sorozatot még 3-4 elemmel! Írd le, melyik szám van a 25., 52., 100. helyen!

a) 1; 2; 3; 0; 1; 2; 3; 0… A szabály lehet az, hogy az 1, 2, 3, 0 számokat ismételgetjük. Ekkor a 25. elem: 1, az 52. elem: 0, a 100. elem: 0.

b) 1; –1; 1; –1; 1; –1… a 25. elem: 1, az 52. elem: –1, a 100. elem: –1.

c) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}\ldots$ a 25. elem: $\frac{25}{26}$, az 52. elem: $\frac{52}{53}$, a 100. elem: $\frac{100}{101}$.

d) 11; 21; 31; 41… a 25. elem: 251, az 52. elem: 521, a 100. elem: 1001.

e) 3,3; 3,03; 3,003; 3,0003…a 25. elem: a tizedesvessző után 24 db 0 következik, az 52. elem: a tizedesvessző után 51 db 0 következik, a 100. elem: a tizedesvessző után 99 db 0 következik.

f) 1; 4; 9; 16; 25… a 25. elem: 25^2, az 52. elem: 52^2, a 100. elem: 100^2.

II. Számsorozatok tagjainak jelölése, megadása

1. Számsorozat építése

A 2. feladatlap 1. feladatát a csoportok közösen oldják meg! Hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy megoldásaikat csoporttitokként kezeljék! Miután a tanulócsoportok több megoldást találtak, frontális ellenőrzés következik:
Felírjuk a táblára a két számot: 1; 3,
Valamelyik csoportból egy tanuló kijön a táblához, nem mondja meg a szabályt, csak felírja a következő két-három elemet. Ennek alapján kell a többieknek kitalálni, hogy milyen szabályra gondolhattak. Majd a többi csoport képviselője is felírja – mindig új sort kezdve – más-más szabály szerint az 1; 3; sorozat folytatását. (Ha szükségesnek látja, a tanár is írhat egy-egy új sort továbblendítendő a gyerekek fantáziáját.) A közben született új ötleteket is fogadjuk örömmel! Ily módon több sorozat is a táblára kerül, amelyek ugyanúgy kezdődnek, de másképp folytatódnak.

2. FELADATLAP

1. Egy sorozat első eleme 1, a második 3.
Keress minél több szabályt, amely szerint folytatni lehet a sorozatot! Írd is le a különböző szabállyal képzett sorozatok első 5 elemét!
Például:
1; 3; 1; 3; 1… vagy 1; 3; 3; 1; 1… periodikusan ismétlődő számokkal;
1; 3; 5; 7; 9… páratlan számok;
1; 3; 4; 7; 11… a harmadik és minden további elem az előző kettő összege;

1; 3; 2; 2,5; 2,25… a harmadik és minden további elem az előző kettő összegének a fele;
1; 3; 3; 9; 27… a harmadik és minden további elem az előző kettő szorzata;
1; 3; 6; 10; 15…mindig 1-gyel többet adunk hozzá;
1; 3; 9; 27; 81…minden következő tag az előző háromszorosa;
1; 3; 4; 4,5; 4,75; 4,875…minden elem feléhez 2,5-et adunk;
1; 3; 11; 43; 171… minden következő elem az előző négyszeresénél 1-gyel kisebb;
1; 3; 13; 63; 313… minden következő elem az előző ötszörösénél 2-vel kisebb;
1; 3; 15; 87; 519… minden következő elem az előző hatszorosánál 3-mal kisebb;
1; 3; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; 3… minden elem és az előző hányadosa adja a következő elemet;

Úgy is lehet játszani (ügyesebb gyerekekkel), hogy egyetlen sorozatot építünk többen. Miután a tanár felírja a táblára a két számot (például: 1, 3), egy tanuló kijön, és az általa gondolt szabály szerint – amelyet most még nem árul el – felírja a sorozat harmadik tagját. További jelentkezők is egy-egy elemmel folytatják a sorozatot, de ők sem árulják el a szabályukat. Amikor már jó sok szám van a sorban, és nincs több jelentkező, visszatérhetünk az elejére, végigkérdezzük, hogy ki mire gondolt, és megcsodáljuk, hogy milyen sok elképzeléssel épült a sorozatunk.
A játék végén beszéljük meg, hogy akárhány elemet is adunk meg, mindig található lesz hozzájuk többféle szabály, amely alapján a sorozat folytatható! De ha van egy szabályom, akkor az már meghatározza a sorozatot.

2. Számsorozat megadása, elemeinek jelölése

Ha azt szeretnénk, hogy mindenki ugyanarra az egy folytatásra gondoljon, akkor nem elég az elemek felsorolása, hanem **a képzési szabályt** is meg kell adni. Például a 2. a) feladatban szöveggel, a b)-ben képlettel adtuk meg a szabályt. E feladat kapcsán mutatjuk meg a sorozat elemeinek jelölését: az első tagot a_1-gyel, a másodikat a_2-vel és így tovább jelöljük. A sorozat n-edik tagja a_n (n bármely pozitív egész szám, az elem sorszáma): ezt szokás általános tagnak is nevezni.

2. Folytasd négy elemmel a számok sorozatát a megadott szabály szerint!
a) 3-mal osztva 1 maradékot adnak: 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19…
A sorozat elemeit az ábécé kisbetűivel jelöljük, a jobb alsó index utal arra, hogy a sorozat hányadik eleméről van szó. Ebben a feladatban $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 7$. Írd fel ezzel a jelöléssel a sorozat 10.; 15.; 51. elemét! $a_{10} = 28$; $a_{15} = 43$; $a_{51} = 151$
b) $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_n = 2n$ 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14…

3. Fibonacci (1170–1250?) olasz matematikus híres sorozata a következő: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; a_3 és minden következő elem az őt megelőző két szám összege. Írd fel a sorozat első 12 elemét! Nézz utána, hogyan fogalmazta meg az eredeti problémát Fibonacci! (Internet, Sain Márton: Matamatika-történeti ABC)
Hány pár nyúl származhat egy évben egyetlen pártól? A nyulak a második hónaptól lesznek ivarérettek, minden pár havonta egy új párnak ad életet, és egy ivadék sem pusztul el.
Az első néhány Fibonacci szám: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; (233; 377; 610; 987; 1597; 2584; 4181; 6765; 10946; 17711; 28657; 46368; 75025; 121393; 196418; 317811; 514229; 832040; 1346269; 2178309; 3524578; 5702887; 9227465; 14930352...)

3. Sorozatok különbségsorozata

4. Tekintsük a négyzetszámok sorozatát: $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$…. $a_n = n^2$
Nézd meg az 1. feladatlap 4. feladatában is ezt a sorozatot!
Írd le egy sorba az első 10 elemét! Számítsd ki minden szomszédos elem különbségét, és írd az eredeti sorozat számai alá! Milyen sorozatot kaptál?
Számítsd ki ebben a sorozatban is a különbségeket, és írd alá a következő sorba! Milyen sorozatot kaptál?

```
1     4     9    16    25    36    49    64    81   100
 \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /
   3     5     7     9    11    13    15    17    19      3-tól a páratlan számok sorozata
    \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /  \  /
      2     2     2     2     2     2     2     2         minden eleme: 2
```

5. 2 m mély kiszáradt kútban egy csiga mászik felfelé. 1 óra alatt 4 dm-t halad, de 1 dm-t visszacsúszik. Mennyi idő alatt jut ki a kútból?
Írd fel azt a számsorozatot, amely leírja, hogy az 1, 2… óra alatt mekkora utat tett meg a csiga! 3; 6; 9; 12; 15; 18; (a következő fél óra alatt felér, már nem csúszik vissza)
Milyen szabály határozza meg ezt a sorozatot? a_n = az előző elem + 3
Írd fel a sorozat különbségsorozatát! 3; 3; 3…

4. Számtani sorozat fogalmának bevezetése

A 6. feladat megoldása ad alkalmat arra, hogy megismerkedjünk a számtani sorozattal. A tanulók önállóan dolgozzanak ki egy feladatot, majd mutassák meg csoporttársaiknak! (A c), d) kicsit nehezebb, lehet differenciálni!) Miután a csoportok megvitatták megoldásaikat, osztályszinten is megbeszéljük a számtani sorozat fogalmát, tulajdonságát:
Mind a négy feladat különbségsorozata egy állandó szám. A szomszédos tagok közötti állandó különbséget idegen szóval **differenciá**nak (latinul a különbség), nevezzük és a jele: **d**.
Az ilyen tulajdonsággal rendelkező sorozatot számtani sorozatnak nevezzük. Ha d > 0, a sorozat növekvő, ha d < 0, akkor a sorozat csökkenő.

6. Írd fel a megadott sorozat első 10 elemét, majd képezd ezek különbségsorozatát!
Csoportban dolgozzatok úgy, hogy mindenki egy feladatot oldjon meg, majd összehasonlítva munkátokat, beszéljétek meg a tapasztaltakat!

a) a sorozat elemei azok a számok, amelyeket 4-gyel osztva, a maradék: 2.
2; 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30; 34; 38… $d = 4$

b) a sorozat elemei azok a számok, amelyeket 8-cal osztva, a maradék: 2.
2; 10; 18; 26; 34; 42; 50; 58; 66; 74… $d = 8$

c) $a_1 = 17$, $a_2 = 14$, $a_3 = 11$ a sorozat további elemei is 3-mal osztva, 2 maradékot adnak.
17; 14; 11; 8; 5; 2; –1; –4; –7; –10… $d = –3$

d) $a_1 = 20$, $a_2 = 14$, $a_3 = 8$ a sorozat további elemei is 6-tal osztva, 2 maradékot adnak.
20; 14; 8; 2; –4; –10; –16; –22; –28; –34… $d = –6$

TUDNIVALÓ:

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelyben a második elemtől kezdve bármely elem és az előtte levő különbsége állandó.

3. FELADATLAP

1. Párban dolgozzatok! Készíts számsorozatot a párodnak! Add meg a sorozat első elemét és egy szabályt úgy, hogy a sorozat

a) számtani sorozat legyen;

b) biztosan ne számtani sorozat legyen!

Oldd meg azt a feladatot, amit kaptál! Beszéljétek meg!

Házi feladat lehet a 3. feladatlap további feladatai, de válogathatunk a feladatgyűjtemény 4-9 feladataiból.

2. Válaszd ki, melyik lehet számtani sorozat! Indokolj! A számtani sorozatokban írd le a d értékét!

41; 44; 41; 44; 41; 44; 41… Ez egy periodikus sorozat, nem számtani.

41; 31; 21; 11; 1; –9… Lehet számtani sorozat, $d = -10$.

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\ldots$ Nem számtani sorozat.

$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2\ldots$ Lehet számtani sorozat, $d = \frac{1}{3}$.

3; 9; 27; 81; 243… Nem számtani sorozat, a szomszédos tagok közötti hányados állandó.

3. Imre 2 éve telket vásárolt. Évente 3 fát ültet, mert szeretne szép gyümölcsöskertet létesíteni. Most 7 szilvafája van. Hány fával vette a telket, és hány gyümölcsfája lesz 5 év múlva? Imrének 2 éve 1 fája volt, 5 év múlva 22 fája lesz.

4. A következő **számtani sorozat**okban az első négy tagot és a differenciát szeretnénk tudni. Határozd meg az első négy tag és a differencia közül azokat, melyek nincsenek megadva!

a) $a_1 = -12$; $a_2 = -8$; $a_3 = -4$

b) $a_1 = 100$; $d = 10$

c) $a_3 = 1{,}4$; $d = 0{,}1$

d) $a_1 = 32$; $a_4 = 65$

e) $a_2 = 25$; $a_4 = 13$

	a_1	a_2	a_3	a_4	d
a)	–12	–8	–4	0	4
b)	100	110	120	130	10
c)	1,2	1,3	1,4	1,5	0,1
d)	32	43	54	65	11
e)	31	25	19	13	–6

III. Feladatok számtani és mértani sorozatokkal

1. A számtani sorozat n-edik eleme, a sorozat elemeinek összege

A 4. feladatlap 1. feladatát csoportmunkára ajánljuk. Az a) feladat számtani sorozat n-edik elemének képzési szabályának megfogalmazására vezeti a tanulókat, a b) feladat a számtani sorozat tulajdonságainak, a bármely elemtől szimmetrikusan elhelyezkedő elemek számtani közepének megfigyelésére szolgál.

A frontális megbeszélés nem maradhat el. A csoportok egy-egy szóvivőjét kérjük a tapasztalataik megfogalmazására, a többiek pedig kiegészíthetik saját gondolataikkal. Elmondhatjuk, hogy a „számtani sorozat” elnevezés éppen abból ered, hogy az ilyen sorozat bármely eleme egyenlő a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő elem pár(ok) számtani közepével.
A c) feladat a számtani sorozat összegének kiszámítására mutat egy lehetséges eljárást.

4. FELADATLAP

1. Figyeljétek meg a következő sorozatot és írjátok le az első 6 elemét!
$a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2$; $a_3 = 1 + 2 \cdot 2$; $a_4 = 1 + 3 \cdot 2$; $a_5 = 1 + 4 \cdot 2$… 1; 3; 5; 7; 9; 11…

a) Állapítsátok meg és indokoljátok, hogy számtani sorozat-e?
Igen, mert minden két szomszédos elemének különbsége ugyanakkora, $d = 2$.
– Mennyi a sorozat 51. eleme? Milyen módszerrel számoltátok ki?
$a_{51} = 1 + 50 \cdot 2 = 101$
– Hogyan számítanátok ki a sorozat *n*. elemét? Keressetek képletet a számítási eljárásra: $a_n = ?$
$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$

b) Írjátok fel a sorozat 31. tagjától kezdve 9 elemét! 61; 63; 65; 67; 69; 71; 73; 75; 77.
– Keressetek olyan elem párokat, amelyek különbsége azonos! Mit tapasztaltok?
Szomszédos elem párok, második szomszédos elem párok, harmadik szomszédos elem párok…
– Számítsátok ki az első három elem átlagát (számtani közepét), bármelyik egymás melletti három elem átlagát! Mit tapasztaltok? A középső elem az átlaguk.
– Számítsátok ki az első és harmadik elem számtani közepét, bármelyik második szomszéd elem-pár számtani közepét! Mit tapasztaltok? A köztük lévő elem az átlaguk.
– Számítsátok ki az első és ötödik elem átlagát, bármelyik negyedik szomszéd elem-pár átlagát! Mit tapasztaltok? A köztük középen lévő elem az átlaguk.
– Számítsátok ki a kilenc szám átlagát! Mit tapasztaltok? A középső szám az átlaguk: 69
– Keress olyan elem párokat, amelyek számtani közepe a 69! A 69-től szimmetrikusan elhelyezkedő elem párok.
– Keressetek minél több olyan elempárt, amelyben a két szám összege 138! Mit tapasztaltatok? 61 +77; 63 + 75… A 69-től szimmetrikusan elhelyezkedő elem párok.

c) Számítsd ki a kilenc szám összegét! Segít a következő felírás:

$$\begin{array}{l} 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 \\ \underline{77 + 75 + 73 + 71 + 69 + 67 + 65 + 63 + 61} \\ 138 + 138 + \qquad\qquad\qquad\qquad + 138 + \qquad = 9 \cdot 138 = 1242 \end{array}$$

Vigyázz, ez két sorozat elemeinek összege! 1242 : 2 = 621

2. Egy híres történet minden idők egyik legnagyobb matemetikusáról, Carl Friedrich Gaussról szól. A szájhagyomány szerint a 6 éves kis Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással.
Nézd az órát! Neked mennyi időre van szükséged a feladat elvégzéséhez?
1 + 100 = 101; 2 + 99 = 101; 3 + 98 = 101…, ami összesen 101 · 50 = 5050

3. A következő sorozatok közül válaszd ki, melyik lehet számtani sorozat! Add meg a kiválasztott sorozatok differenciáját és a 15. elemét!
a) 7; 77; 777; 7777… nem számtani sorozat

b) 34; 24; 14; 4… számtani sorozat, $d = -10$ $a_{45} = -106$
c) 2; 4; 8; 16… nem számtani sorozat
d) 1; 2; 1; 2; 1; 2… nem számtani sorozat
e) 55; 66; 77; 88… számtani sorozat, $d = 11$ $a_{45} = 209$

4. A körcsarnokban a pályához legközelebbi kör mentén 520-an ülnek. Hány férőhelyes a csarnok, ha 25 körgyűrűben ülnek a szurkolók, és minden sorban 20-szal többen, mint a közvetlen előtte levőben?

1. sor: 520 férőhely 25. sor: 520 + 24 · 20 = 1000 férőhely
Összesen: (520 + 1000) · 25 : 2 = 19000 férőhely

A mértani sorozat vizsgálata elsősorban a nyolcadik osztály feladata. Ennek ellenére néhány bevezető, egyszerű feladaton keresztül a főbb tulajdonságokat megfigyelhetjük, összevethetjük a számtani sorozatokkal

2. A mértani sorozat

5. A következő sorozatokat **mértani sorozat**nak nevezzük. Ha felismerted a szabályt, folytasd mindegyiket 3-3 elemmel! Írd fel a sorozatok különbségsorozatát, felírhatod a különbségsorozatok különbségsorozatát is.
Írd fel a sorozatok hányados sorozatát! Hányados sorozat: a szomszédos elemek hányadosainak sorozata.

a) 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192…
Különbségsorozata: 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192…
Hányados sorozata: 2; 2; 2…

b) 1; 3; 9; 27; 81; 243; 729…
Különbségsorozata: 2; 6; 18; 54; 162; 486…
Hányados sorozata: 3; 3; 3…

c) 5; –10; 20; –40; 80; –160; 320…
Különbségsorozata: 5; –10; 20; –40; 80; –160; 320…
Hányados sorozata: –2; –2; –2…

d) Fogalmazd meg, hogy mit nevezünk mértani sorozatnak.

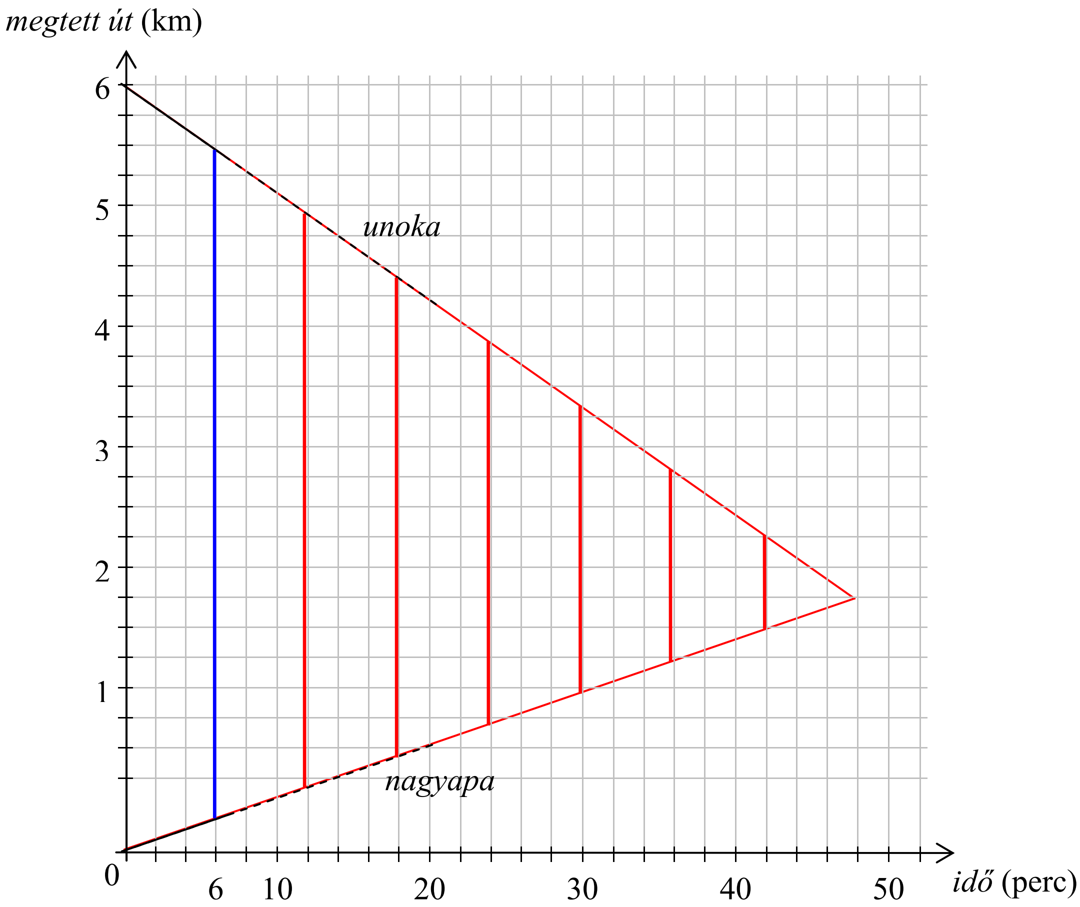
e) A 3. feladatban is van egy mértani sorozat. Melyik? A c) jelű sorozat, hányadosa 2.

Már az ókori egyiptomiak is ismerték a számtani és mértani sorozatot. Erről tanúskodik az ún. Rhind-papirusz, amely körülbelül Kr.e. 1750-ből való. Nevét felfedezőjéről, Henry Rhind skót régiségkereskedőről kapta. Ez a mű az elsőként megismert, ókori egyiptomi matematikával foglalkozó írás.

3. Függvény és sorozat

A 6. feladatban összekapcsolhatók a függvényekről és a sorozatokról szerzett ismeretek.
A tanár megítélése szerint az önálló vagy csoportmunkát frontális megbeszélés kövesse!
A feladat alkalmat ad arra is, hogy a mozgásgrafikonoknál gyakori tévedést is tisztázzuk: nevezetesen azt, hogy a grafikon nem a mozgó test pályája!

6.



Két szomszédos, 6 km-re lévő faluból egyszerre indult el nagyapa és unokája, hogy találkozzanak. Egyenletes sebességgel mennek, és 6 perc után már 750 m-rel vannak közelebb, mint induláskor (most távolságuk a kék szakasz a grafikonon). Elég-e ennyi, hogy megtudjuk: mennyi idő múlva fognak találkozni?
Írd be a táblázatba, hogy útjuk minden újabb 6 percével hogyan változik a távolság köztük!

eltelt idő (perc)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
nagyapa és unoka távolsága (km)	6	5,25	4,5	3,75	3	2,25	1,5	0,75	0
távolságváltozás köztük (km)	–0,75	–0,75	–0,75	–0,75	–0,75	–0,75	–0,75	–0,75	

Milyen sorozatot alkotnak ezek az egyre csökkenő távolságok? Számtani sorozatot.
Hosszabbítsd meg a koordinátarendszerben a grafikonjaikat! Húzd be közöttük is – új kék szakaszokkal – a 6 percenkénti távolságaikat!

IV. Felmérő feladatlap írása

FELMÉRŐ Név:____________________

7. évfolyam, Hozzárendelések, függvények, sorozatok

A CSOPORT

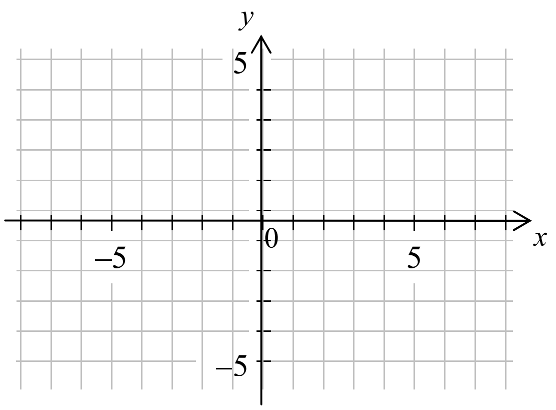
1. Állapítsd meg, hogy a felsorolt hozzárendelések közül melyek a függvények, és melyik lineáris függvény?

a) minden természetes számhoz rendeljük hozzá az osztóját;
b) az osztály tanulóihoz a félévi matematika osztályzatukat;
c) a síkidomokhoz a területüket;
d) minden számhoz a háromszorosánál 15-tel kisebb számot;
e) két természetes számhoz egy alapműveletet;
f) az emberekhez a szülőjüket.

2. Ábrázold az $y = \frac{1}{3}x + 1$ függvényt a racionális számok halmazán!

a) Mekkora a függvény meredeksége? Hol metszi az egyenes az y tengelyt?

b) Rajzolj ugyanabba a koordinátarendszerbe egy másik lineáris függvényt, amely párhuzamos az $y = \frac{1}{3}x + 1$ függvénnyel! Írd le ennek is a képletét!



3. Írd fel a sorozatok első 6 és a 31. elemét!

a) $a_1 = \frac{1}{2}$ és minden eleme a sorszáma négyzetének a fele;

b) $a_4 = 6$ és minden eleme 3-mal nagyobb, mint az előtte álló szám;

c) $a_3 = 4$; $a_4 = -5$; $a_5 = 6$….

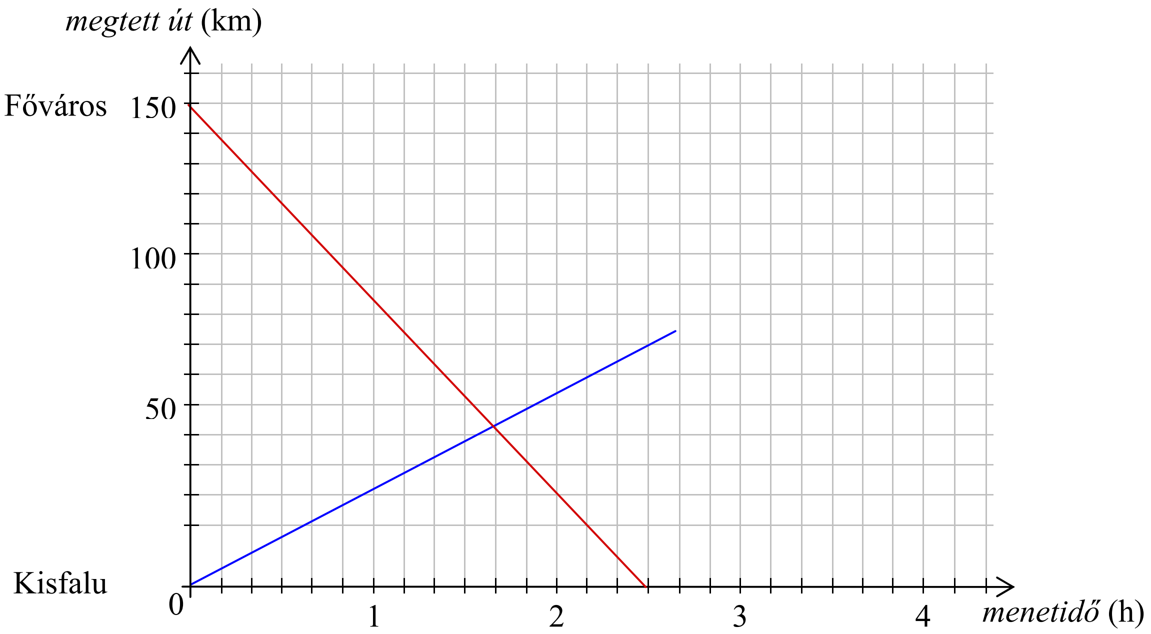
A sorozatok közül válaszd ki, melyik a számtani sorozat, és add meg a kiválasztott sorozat differenciáját! Számítsd ki első 6 elemének összegét!

4. Kisfalu 150 km távol van Fővárostól. Karcsi kerékpárral, Ferenc gépkocsival egyszerre indulnak a másik település felé. Olvasd le a grafikonról, hogy:

a) 1 óra alatt hány km-t tett meg Karcsi Kisfalutól Főváros felé, és hány km-t autózott Ferenc Fővárostól Kisfalu felé?

b) Mikor találkoztak? Milyen messze voltak ekkor a két településtől?

c) Mennyi idő alatt ért Ferenc Kisfaluba? Milyen messze volt tőle ekkor Karcsi?



FELMÉRŐ Név:____________________

7. évfolyam, Hozzárendelések, függvények, sorozatok

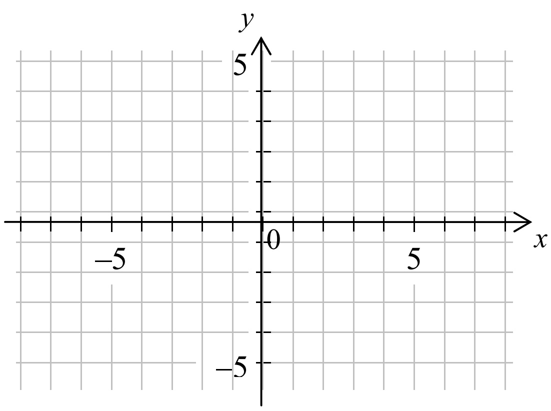
B CSOPORT

1. Állapítsd meg, hogy a felsorolt hozzárendelések közül melyek függvények, és melyik lineáris függvény?

a) minden számhoz rendeljük hozzá a felénél 4-gyel nagyobb számot;
b) minden egész számhoz rendeljük hozzá a nála legalább 2-vel kisebb számot;
c) az osztály tanulóihoz rendeljük a tanulmányi átlagukat;
d) az évszakokhoz a hónapokat;
e) a páratlan számokhoz a mellette lévő páros számot;
f) a sík pontjainak adott tengelyre vonatkozó tükörképét.

2. Ábrázold az $y = -2x + 2$ függvényt a racionális számok halmazán!

a) Mekkora a függvény meredeksége? Hol metszi az egyenes az y tengelyt?
b) Rajzolj ugyanabba a koordinátarendszerbe egy másik lineáris függvényt, amely ugyanott metszi y tengelyt, mint az $y = -2x + 2$ függvény! Írd le ennek is a képletét!



3. Írd fel a sorozatok első 6 és a 31. elemét!

a) $a_2 = -4$; $a_3 = 5$; $a_4 = -6\ldots$;
b) $a_3 = 3$, és minden eleme 3-mal kisebb, mint az előtte álló szám;
c) $a_1 = 1$, és minden eleme a sorszámának a harmadik hatványa.

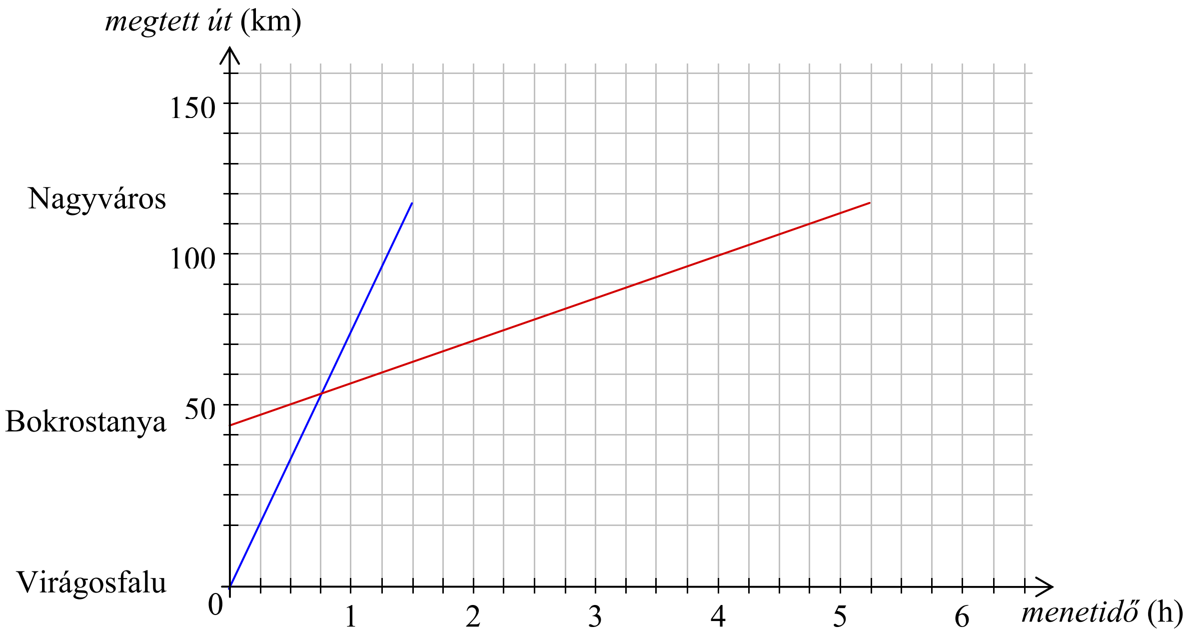
A sorozatok közül válaszd ki, melyik a számtani sorozat és add meg a kiválasztott sorozat differenciáját! Számítsd ki első 6 elemének összegét!

4. Virágosfalu Bokrostanyától 50 km távolságra van. Boldizsár Bokrostanyáról kerékpárral, Vilma Virágosfaluból gépkocsival egyszerre indulnak Nagyváros felé. Olvasd le a grafikonról, hogy:

a) 1 óra alatt hány km-t tett meg Vilma, és hány km-t kerekezett Boldizsár?

b) Mikor éri utol Vilma Boldizsárt? Milyen messze voltak ekkor a két településtől?

c) Mennyi idő alatt ért Vilma Nagyvárosba? Milyen messze volt tőle ekkor Boldizsár?



FELMÉRŐ Név:______________________

7. évfolyam, Hozzárendelések, függvények, sorozatok

A CSOPORT (MEGOLDÁS)

1. Állapítsd meg, hogy a felsorolt hozzárendelések közül melyek a függvények, és melyik lineáris függvény?

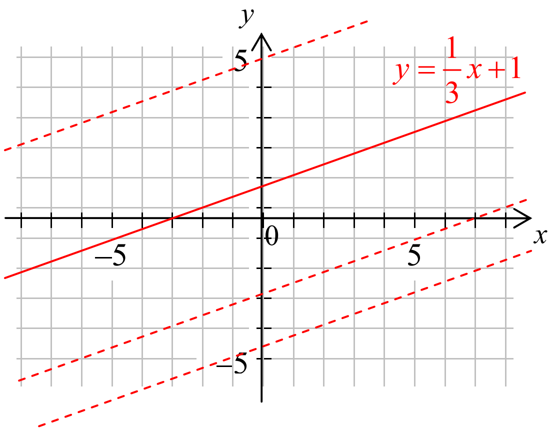
a) minden természetes számhoz rendeljük hozzá az osztóját;
b) az osztály tanulóihoz a félévi matematika osztályzatukat; függvény
c) a síkidomokhoz a területüket; függvény
d) minden számhoz a háromszorosánál 15-tel kisebb számot; függvény, lineáris függvény
e) két természetes számhoz egy alapműveletet;
f) az emberekhez a szülőjüket.

(minden hibás válasz 1 pont levonás) **5 pont**

2. Ábrázold az $y=\frac{1}{3}x+1$ függvényt a racionális számok halmazán!

a) Mekkora a függvény meredeksége? Hol metszi az egyenes az *y* tengelyt? $m=\frac{1}{3}$; $y=1$.

b) Rajzolj ugyanabba a koordinátarendszerbe egy másik lineáris függvényt, amely párhuzamos az $y=\frac{1}{3}x+1$ függvénnyel! Írd le ennek is a képletét! $y=\frac{1}{3}x+b$



Függvény grafikon 3 pont, a) 2 pont, b) 2 pont, összesen: **7 pont**

3. Írd fel a sorozatok első 6 és a 31. elemét!

a) $a_1=\frac{1}{2}$ és minden eleme a sorszáma négyzetének a fele;

b) $a_4=6$ és minden eleme 3-mal nagyobb, mint az előtte álló szám;

c) $a_3=4$; $a_4=-5$; $a_5=6\dots$

A sorozatok közül válaszd ki, melyik a számtani sorozat, és add meg a kiválasztott sorozat differenciáját! Számítsd ki első 6 elemének összegét!

a) $\frac{1}{2}$; 2; 4,5; 8; 12,5; 18… $a_{31}=480{,}5$

b) –3; 0; 3; 6; 9; 12… $a_{31}=87$; számtani sorozat, $d=3$; $S_6=27$

c) 2; –3; 4; –5; 6; –7… (lehet más is) $a_{31}=32$

a) 2 pont, b) 2 + 3 pont, c) 2 pont, összesen: **9 pont**

4. Kisfalu 150 km távol van Fővárostól. Karcsi kerékpárral, Ferenc gépkocsival egyszerre indulnak a másik település felé. Olvasd le a grafikonról, hogy:

a) 1 óra alatt hány km-t tett meg Karcsi Kisfalutól Főváros felé, és hány km-t autózott Ferenc Fővárostól Kisfalu felé?

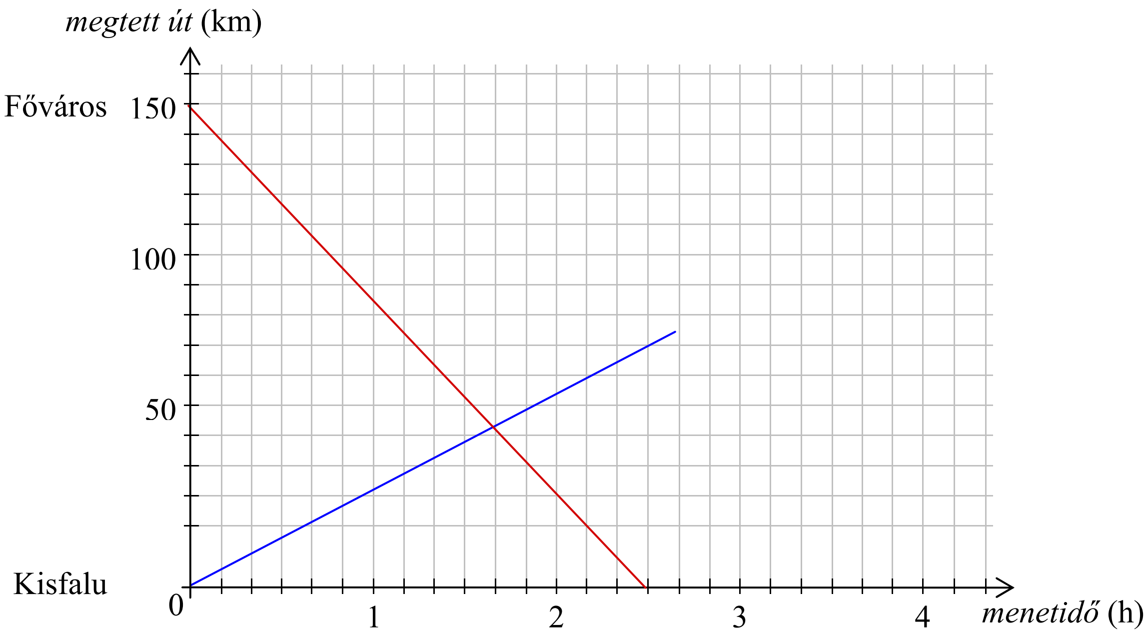
1 óra alatt Karcsi 30 km-t tett meg, Ferenc 60 km-t autózott.

b) Mikor találkoztak? Milyen messze voltak ekkor a két településtől?

Az indulástól számított 1 óra 40 perc múlva; Kisfalutól 50 km-re, Fővárostól 100 km-re.

c) Mennyi idő alatt ért Ferenc Kisfaluba? Milyen messze volt tőle ekkor Karcsi?

Ferenc $2\frac{1}{2}$ óra alatt ért Kisfaluba. Karcsi ekkor 75 km-re volt tőle.



a) 2 pont, b) 3pont, c) 2 pont, összesen: **7 pont**

FELMÉRŐ Név:______________________

7. évfolyam, Hozzárendelések, függvények, sorozatok

B CSOPORT (MEGOLDÁS)

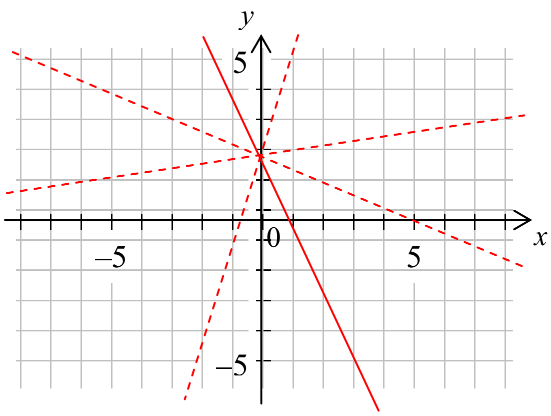
1. Állapítsd meg, hogy a felsorolt hozzárendelések közül melyek függvények, és melyik lineáris függvény?

a) minden számhoz rendeljük hozzá a felénél 4-gyel nagyobb számot; függvény, lineáris
b) minden egész számhoz rendeljük hozzá a nála legalább 2-vel kisebb számot;
c) az osztály tanulóihoz rendeljük a tanulmányi átlagukat; függvény
d) az évszakokhoz a hónapokat;
e) a páratlan számokhoz a mellette lévő páros számot;
f) a sík pontjainak adott tengelyre vonatkozó tükörképét. függvény

(minden hibás válasz 1 pont levonás) **5 pont**

2. Ábrázold az $y=-2x+2$ függvényt a racionális számok halmazán!

a) Mekkora a függvény meredeksége? Hol metszi az egyenes az y tengelyt? $m=-2$; $y=2$.
b) Rajzolj ugyanabba a koordinátarendszerbe egy másik lineáris függvényt, amely ugyanott metszi y tengelyt, mint az $y=-2x+2$ függvény! Írd le ennek is a képletét! $y=a\cdot x+2$



$y=-2x+2$

Függvény grafikon 3 pont, a) 2 pont, b) 2 pont, összesen: **7 pont**

3. Írd fel a sorozatok első 6 és a 31. elemét!

a) $a_2=-4$; $a_3=5$; $a_4=-6$;….;
b) $a_3=3$, és minden eleme 3-mal kisebb, mint az előtte álló szám;
c) $a_1=1$, és minden eleme a sorszámának a harmadik hatványa.

A sorozatok közül válaszd ki, melyik a számtani sorozat és add meg a kiválasztott sorozat differenciáját! Számítsd ki első 6 elemének összegét!

a) 3; –4; 5; –6; 7; –8… (lehet más is) $a_{31}=33$
b) 9; 6; 3; 0; –3; –6… $a_{31}=-81$ számtani sorozat, $d=-3$ $S_6=9$
c) 1; 8; 27; 64; 125; 216… $a_{31}=29791$

a) 2 pont, b) 2 + 3 pont, c) 2 pont, összesen: **9 pont**

4. Virágosfalu Bokrostanyától 50 km távolságra van. Boldizsár Bokrostanyáról kerékpárral, Vilma Virágosfaluból gépkocsival egyszerre indulnak Nagyváros felé. Olvasd le a grafikonról, hogy:

a) 1 óra alatt hány km-t tett meg Vilma, és hány km-t kerekezett Boldizsár?

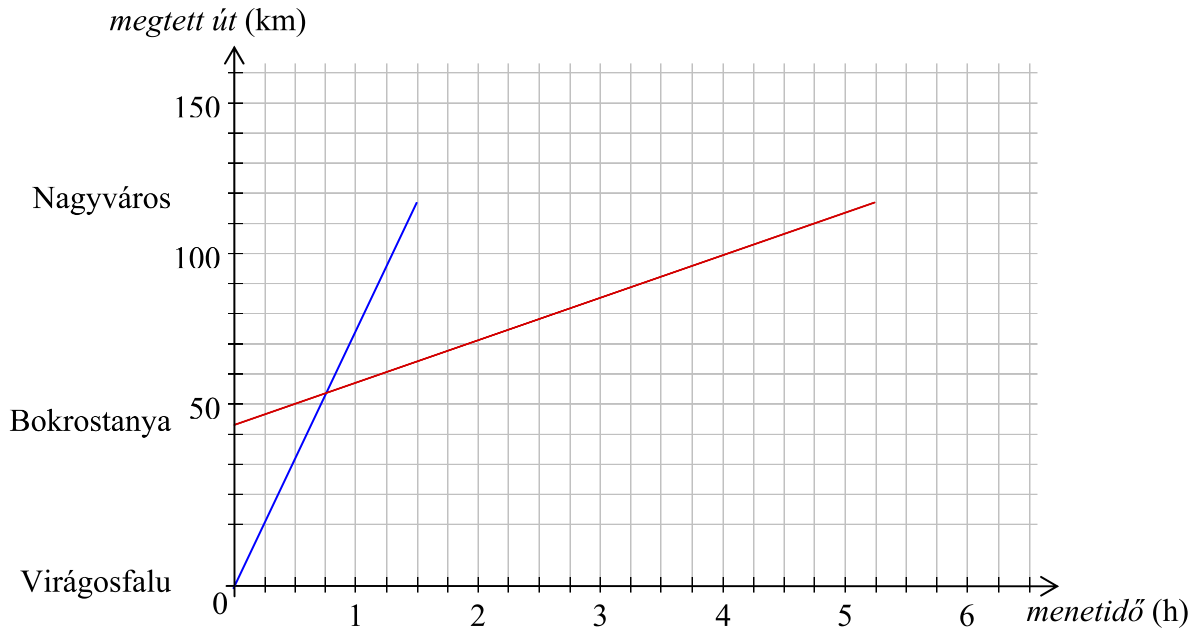
1 óra alatt Vilma 80 km-t tett meg, Boldizsár $13\frac{1}{3}$ km -t kerekezett.

b) Mikor éri utol Vilma Boldizsárt? Milyen messze voltak ekkor a két településtől?

Az indulástól számított $\frac{3}{4}$ óra múlva; 10 km-re Bokrostanyától, 60 km-re Virágosfalutól.

c) Mennyi idő alatt ért Vilma Nagyvárosba? Milyen messze volt tőle ekkor Boldizsár?

Vilma $1\frac{1}{2}$ óra alatt ért Nagyvárosba. Ekkor 50 km-re volt tőle Boldizsár.



a) 2 pont, b) 3pont, c) 2 pont, összesen: **7 pont**

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Folytasd a sorozatot!
Egy – megérett a meggy,
Kettő – feneketlen teknő,
Három – várom a párom,
Négy – biz' oda nem mégy,
Öt – leesett a köd,
Hat – hasad a pad,
Hét – virágos a rét,
Nyolc – üres a polc,
Kilenc – kis Ferenc.
Tíz – tiszta víz,
Ha nem tiszta, vidd vissza, ott a szamár, megissza.

2. Találj szabályt, és folytasd a sorozatot 4-4 elemmel!

a) 7; 10; 13; 16… 19; 22; 25; 28… minden elem hárommal nagyobb az előzőnél

b) 1; 2; 4; 7; 11; 16… 22; 29; 37; 46… bármely két elem között eggyel nagyobb a különbség, mint a megelőző kettő között.

c) 96; 48; 24; 12… 6; 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$… minden elem fele az előzőnek

d) 2; 2; 4; 6; 10; 16… 26; 42; 68; 110… első két eleme 2; 2; a többi az őt megelőző két elem összege

3. Megadjuk a sorozat szabályát, írd fel az első 6 elemét!

a) Az első eleme 2, a második és minden következő eleme 12-vel nagyobb, mint az őt megelőző elem. 2; 14; 26; 38; 50; 62…

b) 17-nél nem kisebb páratlan számok sorozata. 17; 19; 21; 23; 25; 27…

c) Az első eleme 100, a második 5-tel kisebb, mint az első, ugyanígy minden eleme 5-tel kisebb, mint az előző elem. 100; 95; 90; 85; 80; 75…

d) Minden elem háromszororosa a sorszámának. 3; 6; 9; 12; 15; 18…

e) Az ötödik tagja –6, és a sorozat minden eleme fele az előző elemnek.
–96; –48; –24; –12; –6; –3…

f) Minden eleme a sorszáma kétszeresénél 1-gyel kisebb. 1; 3; 5; 7; 9; 11…

4. Írd fel a megadott sorozatok első öt tagját!

a) $a_1 = 8$. A másodiktól kezdve minden tag az előzőnél hárommal kisebb.

$a_1 = 8$; $a_2 = 5$; $a_3 = 2$; $a_4 = -1$; $a_5 = -4$…

b) $a_1 = a_2 = 2$ A harmadik tagtól kezdve, minden tag a kettővel előtte lévő tag kétszeresének és az előtte lévő tagnak az összege.

$a_1 = 2$; $a_2 = 2$; $a_3 = 6$; $a_4 = 10$; $a_5 = 22$…

c) $a_n = \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$

$a_1 = 1$; $a_2 = \frac{5}{2}$; $a_3 = 4$; $a_4 = \frac{11}{2}$; $a_5 = 7$…

5. Írd fel a következő sorozat különbségsorozatát, majd a különbségsorozat különbségsorozatát (második különbségsorozat)! Mit tapasztalsz?

1; 2; 5; 10; 17; 26; 37; 50; ...
1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; ...
2; 2; 2; 2; 2; 2; ...

6. $a_1 = 2$. A sorozat minden eleme 3-szorosa az őt megelőzőnek!
Írd le egy sorba az első 8 elemét! Számítsd ki minden szomszédos elem különbségét, és írd a különbségsorozatot az eredeti sorozat számai alá! Milyen sorozatot kaptál? Milyen sorozat lenne a második, harmadik különbségsorozat? A különbségsorozatok szabálya ugyanaz, mint az eredeti sorozaté. A kezdőelem mindegyik esetben az előző sorozat első és második elemének különbsége.

2; 6; 18; 54; 162; 486; 1458; 4374; ...
4; 12; 36; 108; 324; 972; 2916; ...
8; 24; 72; 216; 648; 1944; ...
16; 48; 144; 432; 1296; ...

7. $a_1 = 1$. A sorozat minden eleme –3-szorosa az őt megelőzőnek!
Írd le egy sorba az első 7elemét! Számítsd ki minden szomszédos elem különbségét (a másodiktól kezdve minden elemből vond ki az előtte állót), és írd a különbségsorozatot az eredeti sorozat számai alá! Milyen sorozatot kaptál? Milyen sorozat lenne a második, harmadik különbségsorozat? A különbségsorozatok szabálya ugyanaz, mint az eredeti sorozaté. A kezdőelem mindegyik esetben az előző sorozat első és második elemének különbsége.

1; –3; 9; –27; 81; –243; 729; ...
–4; 12; –36; 108; –324; 972; ...
16; –48; 144; –432; 1296; ...
–64; 192; –576; 1728; ...

8. Válaszd ki, melyik lehet számtani sorozat! Indokolj!

41; 44; 41; 44; 41; 44; 41…	Ez egy periodikus sorozat, nem számtani.
41; 31; 21; 11; 1; –9…	Lehet számtani sorozat, $d = -10$.
$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\ldots$	Nem számtani sorozat.
$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2\ldots$	Lehet számtani sorozat, $d = \frac{1}{3}$

9. Döntsétek el az alábbi sorozatokról, melyik számtani sorozat, melyik nem! A számtani sorozatokat és szabályaikat írjátok le a füzetbe!

a) Ez egy olyan sorozat, melynek minden eleme a 0.
Számtani sorozat, mivel bármely két szomszédos tag különbsége 0.

b) Ez egy olyan sorozat, melyben van három egymás utáni, 0-tól különböző, váltakozó előjelű elem.
Nem számtani sorozat, mivel a két szomszédos tag különbsége hol pozitív, hol negatív.

c) A sorozat bármely elemét megkapjuk, ha az elemsorszám kétszereséből elveszünk 2-t.
Számtani sorozat, $a_n = 2n - 2$, a páros számok sorozata!

d) $a_1 = 4$; $a_2 = 32$; $a_3 = 54\ldots$

Nem lehet számtani sorozat, mivel $a_2 - a_1 = 28$, de $a_3 - a_2 = 22$.

e) A sorozat bármely tagját úgy kapjuk meg, hogy a tag sorszámát megszorozzuk a következő tag sorszámával.

Nem lehet számtani sorozat, mivel $a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$, de $a_3 - a_2 = 12 - 6 = 6$.

10. Tornyoska település templomának toronyórája csak az egész órákat üti. Mindig annyit, ahány óra van 1-től 12-ig. Egy nap alatt hány ütés hangzik a faluban?

A sorozatösszeg: $(1 + 2 + 3 + ... + 12) \cdot 2 = 13 \cdot 6 \cdot 2 = 156$.

11. Válasszátok ki az állítások közül az igaz állításokat, majd írjátok le a füzetbe azokat! Minden esetben készüljetek fel az érvelésre!

a) A számtani sorozatoknál bármely elem – a másodiktól kezdve – nagyobb az őt megelőző elemeknél. Nem igaz, mivel a számtani sorozat lehet pl. csökkenő is, ha d negatív.

b) Nincs olyan számtani sorozat, amelyben 3 elem értéke megegyezik, a többi ezektől különböző. Igaz, mert ha három elem egyenlő $\Rightarrow$ $d = 0$ $\Rightarrow$ a többi elem is velük egyenlő.

c) Három egymást követő elem közül a középső mindig egyenlő a két szomszédjának átlagával. Igaz, a középső elemhez képest a szomszédosok d-vel kisebbek illetve nagyobbak, ezért az összegük a középső tag kétszeresével egyezik meg.

12. Sorold fel az alábbi sorozatok első 4 elemét! Milyen sorozatok ezek?

a) $a_n = 7 \cdot n - 1$	$a_1 = 6$	$a_2 = 13$	$a_3 = 20$	$a_4 = 27$
b) $a_n = n + \frac{2}{5}$	$a_1 = \frac{7}{5}$	$a_2 = \frac{12}{5}$	$a_3 = \frac{17}{5}$	$a_4 = \frac{22}{5}$
c) $a_n = (n + 0{,}5) \cdot 2$	$a_1 = 3$	$a_2 = 5$	$a_3 = 7$	$a_4 = 9$

A második tagtól kezdve bármely tagnak és az előtte levőnek a különbsége állandó, tehát számtani sorozatok.

13. Számítsd ki a számtani sorozat kérdezett elemeit!

a) $a_1 = -9$ $d = 11$ $a_5 = 35$ $a_{11} = 101$

b) $a_1 = \frac{1}{3}$ $d = \frac{2}{3}$ $a_4 = \frac{7}{3}$ $a_{10} = \frac{19}{3}$

c) $a_1 = 0{,}3$ $d = -0{,}8$ $a_3 = -1{,}3$ $a_8 = -5{,}3$

14. A megadott két adat segítségével számítsd ki a számtani sorozat differenciáját és a kérdezett tagokat!

a) $a_1 = 100$ $a_3 = 130$ $d = 15$ $a_7 = 190$

b) $a_1 = 5$ $a_7 = -61$ $d = -11$ $a_4 = -28$

c) $a_4 = 6$ $a_9 = 16$ $d = 2$ $a_1 = 0$

d) $a_{13} = 20{,}5$ $a_6 = 47{,}1$ $d = -3{,}8$ $a_{10} = 31{,}9$

15. Összeadtuk egy számtani sorozat első öt elemét. Az összeg 75.

a) Hány ilyen számtani sorozat létezhet? Keress több megoldást!

b) Van-e a sorozatoknak közös eleme?

c) Add meg a tagokat, ha a differencia 4!

Ha $a_1 > 0$ és $d = 0$, akkor $a_1 = a_2 = ... = a_5 = 15$ (ez a **b)** kérdésre adható egyik válasz);

Ha $a_1 > 0$ és $d > 0$ és egészek, akkor a következő megoldások lehetnek (néhány válasz az **a)** kérdésre):

c)	$a_1 = 13$;	$d = 1$	13;	14;	15;	16;	17;
	$a_1 = 11$;	$d = 2$	11;	13;	15;	17;	19;
	$a_1 = 9$;	$d = 3$	9;	12;	15;	18;	21;
	$a_1 = 7$;	$d = 4$	7;	11;	15;	19;	23;
	$a_1 = 5$;	$d = 5$	5;	10;	15;	20;	25;
	$a_1 = 3$;	$d = 6$	3;	9;	15;	21;	27;
	$a_1 = 1$;	$d = 7$	1;	8;	15;	22;	29;

Az egymás alatti elemek közösek a megadott (a_1; d)-jű sorozatokban (**b)** -re adható válaszok).

Ha $a_1 = 0$ és $d > 0$ akkor d nem lehet egész szám, hanem $d = 7{,}5$;

ha a_1 és d különböző előjelűek, akkor végtelen sok megoldás van;

ha $a_1 \le 0$ és $d \le 0$, akkor nincs megoldás.

0792 – 1. tanári melléklet

Az oldalról minden új órai felhasználáshoz fénymásolat készítendő. A fénymásolat sorait a fekete vonalak mentén szét kell vágni. A dupla vonal által határolt, különböző hátterű sorokat külön kell kezelni!

	– Megvan! – kiáltottam diadalmasan; ám ebben a pillanatban a csonka ág elpattant alattam, és én baglyostul leestem a földre.
	Szerencsére a hátamra estem, és a kezem a levegőben markolta a madarat, úgyhogy a bagolynak nem esett bántódása.
	Jacquie felsegített, én pedig megmutattam a zsákmányomat.
	– Fióka? – bámulta lenyűgözve.
	– Nem; törpebagoly.
	– Úgy érted, hogy nem nő meg nagyobbra? – hitetlenkedett Jacquie, és meredten bámulta a veréb nagyságú veszedelmet, amely liliputi dühvel pislogott és csattogtatta a csőrét.
	– Igen, ez a végleges nagysága.
	A világ egyik legkisebb bagolyfajtája.

	Mi az a nap? mi az a nap?
	Nem is nap az tulajdonkép.
	Ugyan mi hát?... hát semmi más,
	Mint egy nagy szappanbuborék.
	Valami óriásfiú
	Kifúja reggel keleten,
	S szétpattan este nyúgaton. –
	És ez minden nap így megyen.