A kör szerepe mindennapi életünkben (olvasmány)

A kör az egyik leggyakoribb és legharmonikusabbnak tartott forma. Kör alakú pénzzel fizetünk, kör alakú gyűrűt, karkötőt, láncot viselünk, látjuk a virágok szirmainak elrendeződésében, kanyarodás közben sokszor köríven mozgunk, ruháinkon is kör alakú nyílás van. Természetes, hogy a körrel kapcsolatos számítások az ókor óta izgatták az embereket. A Holdat, a Napot is korong alakúnak látták az égen.

Tibetben mandalákat alkottak, hogy például a rajtuk elhelyezkedő ábrákkal tanítsák a buddhizmus tanát, vagy gyógyítsanak, meditáljanak vele. A mandala jelentése: „kör”, az Univerzumot és annak energiáját szimbolizálja. A kör megtalálható az összes vallás szimbólumai között.

Leonardo da Vinci jól ismert grafikája (a vitruviuszi férfi) is utal az emberi test felépítésének és a körnek a kapcsolatára. Azt is megtudhatjuk belőle, hogy az ember körülbelül olyan magas, mint a kiterjesztett karján levő ujjvégek távolsága.

Módszertani megjegyzés: Indíthatunk olyan projekteket, amelyben a gyerekek (vagy kisebb csoportjaik) vállalják, hogy a mandalákról és Leonardo említett alkotásáról képeket, információkat gyűjtenek. A projekt „végterméke” bemutató legyen, így élhetnek az internet nyújtotta lehetőségekkel.

A   történetéről (olvasmány)

A kör kerületének és sugarának arányszámával sokan foglalkoztak, története több ezer évre nyúlik vissza. A π jelet 1739 óta használjuk, Leonhard Euler (1707–1783) javaslatára. Értékét a különböző korokban és kultúrákban ily módon becsülték:

a) sumérek, i.e. 4000: $4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$ 3,1605;

b) egyiptomiak, i. e. 2000: $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ 3,1605;

c) Arkhimédész Kr. e. 250-ben a kör kerületét a körbe írt, illetve köré írt sokszögek kerületével közelítette: kiszámította a két 96 oldalú szabályos sokszög kerületét, és eredményül azt kapta, hogy $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, azaz $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$;

d) Ptolemaiosz i. sz. 150-ben $\frac{377}{120}$ azaz körülbelül 3,1417;

e) Árjabhata hindu matematikus, VI. század: a 364 oldalú szabályos sokszöggel számolva 3,1416-ot kapott;

f) Adrian Metius, XVI. század: 393216 oldalú szabályos sokszöggel számolva 9 tizedes jegyig pontos számot kapott;

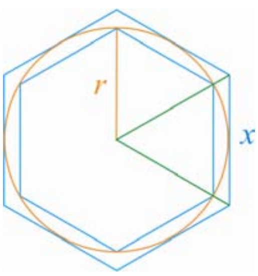
g) Ludolf van Ceulen, XVI. század, Hollandia: az első 35 jegyét határozta meg a π-nek, tiszteletére hívjuk más néven Ludolf-féle számnak. Síremlékére végakaratának megfelelően felvésték.

Közelítették még $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$ értékével, vagy $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}1463$ összeggel is az idők folyamán. Napjaink számítógépes technikai hátterével 16 millió jegyig számították ki az értékét. Érdekes megjegyezni, hogy a π-nek nincs pontos értéke: irracionális szám, sőt nem jön ki semmilyen algebrai egyenlet gyökeként (transzcendens szám). Számjegyeinek memorizálására π verseket írtak (a szavak betűinek száma adta a számjegyeket).

(A π értékét jó pontossággal közelíthetjük hatványsorokkal, vagy statisztikai eszközökkel is.)

Módszertani megjegyzés: Jobb képességű, érdeklődő diákoknak feladható internetes kutatásnak a statisztikai közelítést, valamint a Pi-verseket.

Hatszögek beleírásával és köré írásával mi is kiszámíthatjuk π közelítő értékét:



A beleírt hatszög oldalai: r, kerülete: $6r$

A köré írt hatszög egy központi szabályos háromszögének magassága r, oldalára $r = x\frac{\sqrt{3}}{2}$, így $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r$.

A köré írt hatszög kerülete $6x = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot r \approx 6{,}9282 \cdot r$.

Így a kerületre $6r < K < 6{,}9282r$ adódik. Mivel $K = 2r\pi$, π értékére kapott közelítés:

$$3 < \pi < 3{,}4641.$$

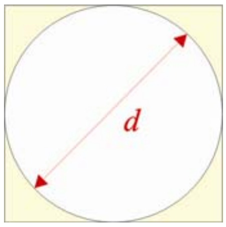
I. A kör területe, kerülete

A jól ismert képletek szerint:

A kör kerülete: $K = 2r\pi$

A kör területe: $T = r^2\pi$

Mintapélda$_1$



Kör alakú asztallapot akarunk készíteni bútorlapból úgy, hogy a szélére élfóliát ragasztunk. A lapszabászatban csak négyzet alakú lapot tudnak levágni, a kör alakot otthon kell elkészíteni dekopírfűrésszel.

a) Mennyi élfóliát kell vásárolni, ha azt csak egész méterben árulják?

b) Mennyi az anyagköltség (a bútorlap és az élfólia ára együtt), ha az asztal átmérője 2,7 méter, egy m^2 bútorlap ára 2700 Ft és egy méter élfólia 40 forintba kerül?

c) A levágatott bútorlap hány százaléka szemét?

Megoldás:

Egy 2,7 x 2,7 méteres négyzetet kell levágatni, ami $2{,}7^2 = 7{,}29\,(\mathrm{m}^2)$.

A bútorlap költsége $7{,}29 \cdot 2700 = 19683$ Ft.

Az élfólia hossza a kör kerületének egészre felkerekített értékéből számítható:

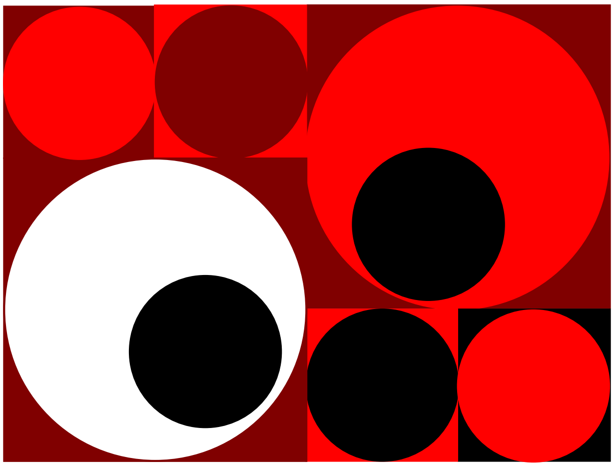
$K = d \cdot \pi = 8{,}48\,(\mathrm{m})$, felkerekítve 9m, aminek a költsége $9 \cdot 40 = 360$ Ft.

Az összes költség tehát $19683 + 360 = 20043$ Ft.

A hulladék arányát úgy kapjuk, hogy a fölösleg területét elosztjuk a négyzet területével. A fölösleg a négyzet és a kör területének különbsége.

A kör területe $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 5{,}72$ (m^2), így a hulladék aránya $\frac{2{,}7^2 - 5{,}72}{2{,}7^2} = 0{,}215$, vagyis

21,5 % a hulladék.



Mintapélda$_2$

Számítsuk ki, mennyi a fekete, a piros és a bordó körök területeinek összege! A kisebb körök 2 cm átmérőjűek.

Megoldás:

A sugarak 1 cm és 2 cm, a négyzetek oldalhosszai 2 cm és 4 cm.

Fekete: 3 kis kör, és egy négyzet körből kimaradó része:

$$T_1 = 3 \cdot 1^2 \cdot \pi + 2^2 - 1^2 \cdot \pi = 2 \cdot 1^2 \cdot \pi + 2^2 = 10{,}28 \ \ (\text{cm}^2).$$

Piros: a kis piros körök és a mellettük található piros négyzet-darabok egymásba illenek, így a piros esetében két négyzet és egy nagy kör összegét kell számítani:

$$T_2 = 2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot \pi = 20{,}56 \ \ (\text{cm}^2).$$

Bordó: egy kis négyzet és két nagy négyzet körön kívüli része:

$$T_3 = 2^2 + 2\left(4^2 - 2^2\pi\right) = 10{,}88 \ \ (\text{cm}^2).$$

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokat csoportmunkában, diákkvartett módszerrel vegyük át. A gyerekek önállóan dolgozzanak, de vessék össze az eredményeket, beszéljék meg a hibáikat, és osszák meg az ötleteiket egymással. Az A jelű tanulók az a) feladatokat, a B-k a b) feladatokat, … végezzék el.

1. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek kerülete

a) 628 cm; b) 100 cm; c) 893 m; d) 75 dm?

Megoldás: a) 100 cm; b) 15,92 cm; c) 142,19 m; d) 11,94 dm.

2. Mekkora a kör kerülete, ha területe

a) 200 cm^2; b) 2,85 dm^2; c) 300 m^2; d) 0,256 m^2?

Megoldás: a) 50,1 cm; b) 5,98 dm; c) 61,4 m; d) 1,79 m.

3. Mekkora oldalú négyzet írható abba a körbe, melynek területe

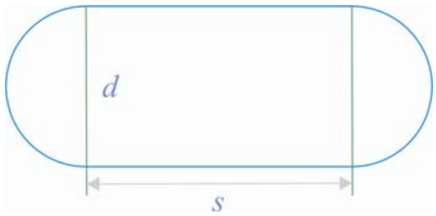
a) 25 m^2; b) 130 cm^2; c) 345 m^2; d) 0,43 m^2?

Megoldás: a) 3,99 m; b) 9,10 cm; c) 14,82 m; d) 0,52 m.

4. Számítsd ki a félkörökkel lezárt téglalap alakú idom hiányzó adatait!

T jelenti az egész alak területét, *K* az egész kerületét.

	K	*T*	*d*	*s*
a)			5 cm	15 cm
b)		300 cm^2	10 cm	
c)	170 m			25 m
d)	400 m			100 m



Megoldás:

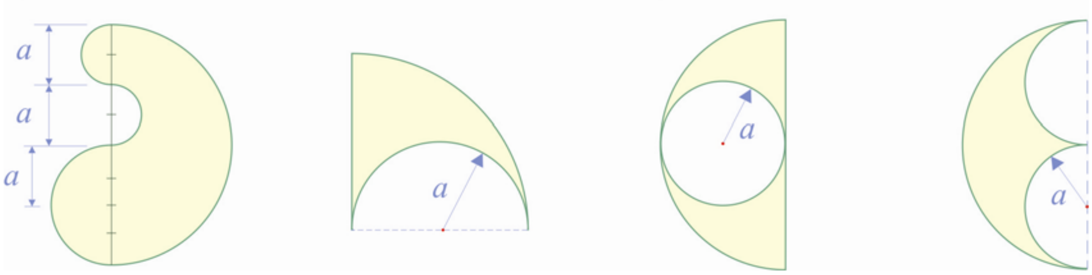
	K	*T*	*d*	*s*
a)	*45,7 cm*	*94,6 cm*	5 cm	15 cm
b)	*75,7 cm*	300 cm^2	10 cm	*22,2 cm*
c)	170 m	*2100 m^2*	*38,2 m*	25 m
d)	400 m	*9550 m^2*	63,69 m	100m

5. Egy motoros 90 m sugarú, félkör alakú úton halad. Mennyi idő alatt teszi meg a félkört, ha sebessége a) 8 km/h; b) 20 km/h; c) 80 km/h; d) 120 km/h?

Megoldás: a) 127 s; b) 51 s; c) 12,7 s; d) 8,48 s.

6. Számítsd ki a vonalkázott részek területét és kerületét (a = 30 mm)!

a) b) c) d)

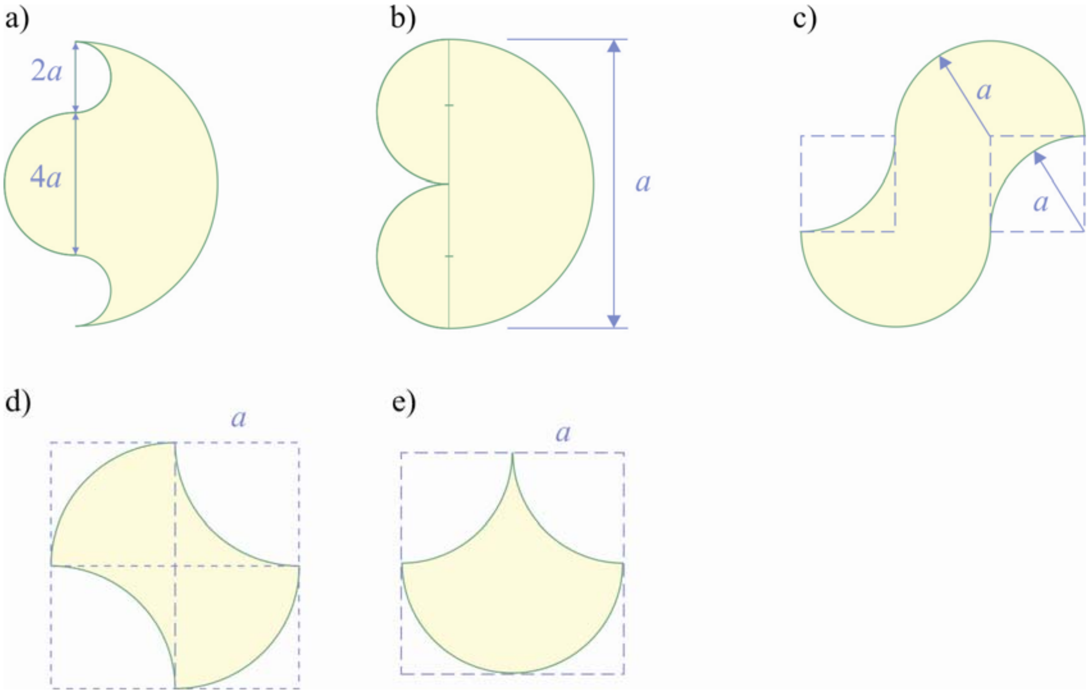


Megoldás: (ha a gépi π -vel dolgozunk)

a) T=7069 mm^2, K=376,99 mm; b) T=1413,7 mm^2, K=248,50 mm;

c) T=2827,4 mm^2, K=496,99 mm; d) T=2827,4 mm^2, K=376,99 mm.

7. Számítsd ki a színezett részek területét és kerületét (a = 2,4 cm)!



Megoldás:

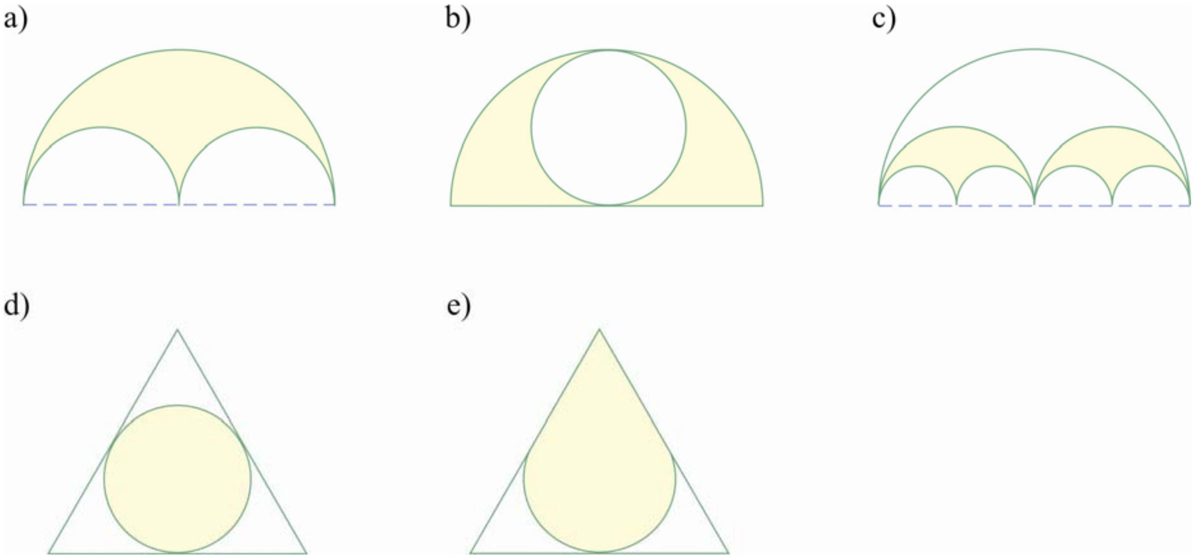
Paraméteresen: a) $T=9a^2\pi$, $K=8a\pi$; b) $T=\dfrac{3a^2\pi}{16}$, $K=a\pi$; c) $T=3a^2+\dfrac{1}{2}a^2\pi$, $K=3a\pi$ cm; d) $T=2a^2$, $K=2a\pi$; e) $T=2a^2$, $K=2a\pi$.

Eredmények: a) T=162,86 cm^2, K=60,288cm; b) T=3,3929cm^2; K=7,5398cm;

c) T=26,328 cm^2, K=22,619cm; d) T=11,52cm^2; K=15,080cm;

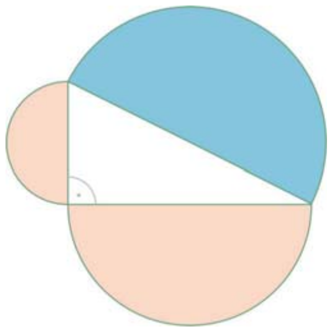
e) T=11,52cm^2; K=15,080cm.

8. Hány százaléka a színezett rész területe az egész (félkör, illetve háromszög) területének?



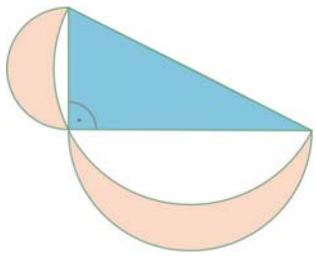
Megoldás: a) 50%; b) 50%; c) 25%; d) 60,4%; e) 73,6% .

9. a) Bizonyítsd be, hogy a piros félkörök területeinek összege megegyezik a kék félkör területével!



Megoldás: A Pitagorasz-tételből adódik.

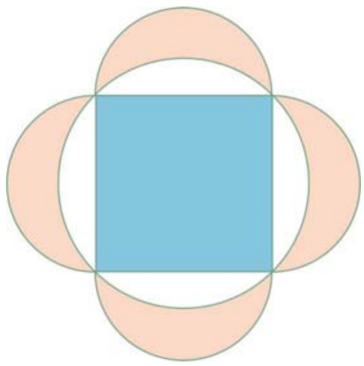
b) *Hippokratész holdacskái*: bizonyítsd be, hogy a piros holdacskák területeinek összege megegyezik a derékszögű háromszög területével!



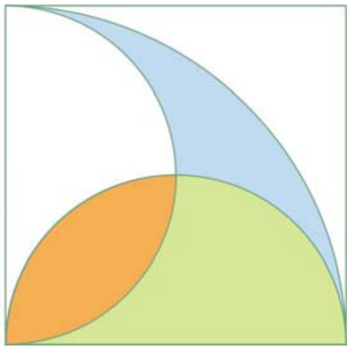
Megoldás: A Pitagorasz-tételből adódik.

c) Bizonyítsd be, hogy a piros holdacskák területeinek összege megegyezik a négyzet területével!

Megoldás: A Pitagorasz-tételből adódik; az ábra a b)-ben szereplő feladat speciális esetének kétszerese.



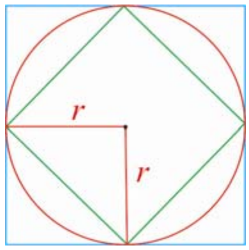
d) Bizonyítsd be, hogy a narancs és a kék rész területe egyenlő! Azt is igazold, hogy a zöld rész területe egyenlő a négyzet területének negyedével!



Megoldás: A területek kiszámításával, illetve a középvonalak behúzása után látható megfelelő átdarabolással.

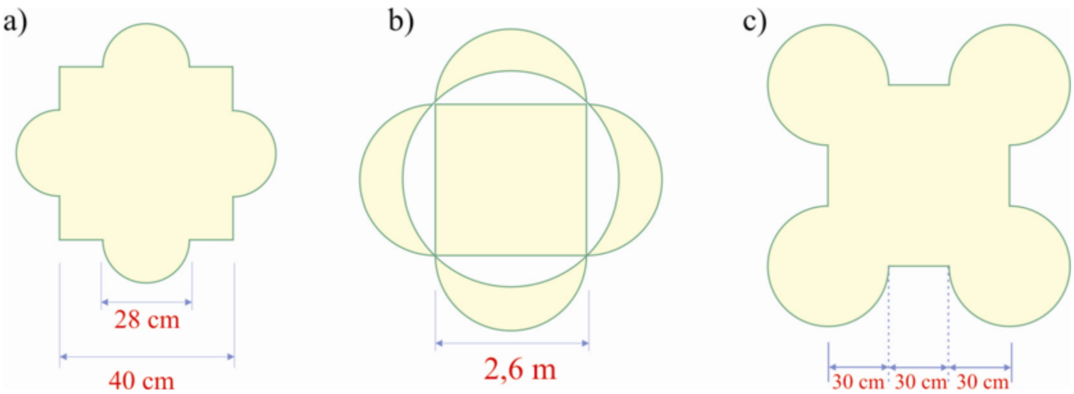
10. Számítsd ki π közelítő értékét úgy, hogy a kör köré illetve a körbe írható négyzetet használod!

Megoldás:



A köré írható négyzet kerülete 8*r*, a beleírhatóé $4r\sqrt{2}$. Az egyenlőtlenség: $4r\sqrt{2} < 2r < 8r$, amiből $2\sqrt{2} < \pi < 4$, vagyis $2{,}8 < \pi < 4$. Nem valami jó közelítés!

11. Az építészetben gyakoriak az alábbi ablakformák, díszítő motívumok. Számítsd ki a kerületüket és a területüket a feltüntetett adatok alapján! A kerületbe minden határoló vonal beleszámít.



Megoldás: a) K=233 cm és T=2215 cm^2; b) K=38,3 m és T=13,52 m^2;

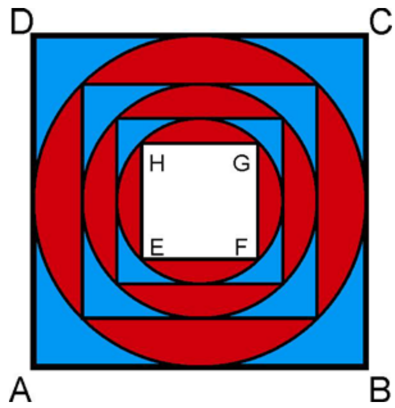
c) K=685,2 cm és T=16600 cm^2.

Megjegyzés: Ha π =3,14-gyel számolunk, akkor 3 jegynél nagyobb pontosság nem lehetséges. Ha több jegy pontosságra van szükségünk, akkor a gépi π -vel dolgozzunk.

12. Számítsd ki, hogy a szabályos háromszög beleírt körén kívül eső részének területe hány százaléka a szabályos háromszög területének!

Megoldás: 39,6%.

13. Az *ABCD* és az *EFGH* négyzet között a kék vagy a piros részek területösszege nagyobb? Ha segít, *AB* szakasz hossza 120 cm.



Megoldás:

gépi értékével számítva a piros rész területe 7192,0 cm^2, a kék rész területe 5408,0 cm^2; ha értékét kerekítve, 3,14 értékkel számítjuk, csak 3 értékes jegy maradhat: 7180 cm^2, 5420 cm^2. Érdemes paraméteresen számolni, mert nem a pontos érték a kérdés, hanem az összehasonlítás: $\frac{7}{8}(\frac{\pi}{2}-1)a^2 \approx 0{,}50a^2$ és

$\frac{7}{4}(1-\frac{\pi}{4})a^2 \approx 0{,}38a^2$

Tehát a piros részek területösszege a nagyobb.

14. Egy pizzéria kétféle kerek pizzát szolgál fel: mindkettő ugyanolyan vastag, de más méretű. A kisebbik 30 cm átmérőjű és 30 tallérba kerül. A nagyobbik 40 cm átmérőjű és 40 tallérba kerül. Melyik pizza éri meg jobban? Válaszodat indokold!

Megoldás:

A terület/ár arány a 30 cm-esnél 94,2, a 40 cm-esnél 125,6 cm^2/tallér, vagyis a második.

15. A diákoknak különböző átmérőjű, kör alakú ezüstérméket kell tervezniük, melyek együtt sorozatot alkotnak:

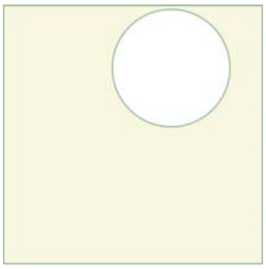
valamennyi érme átmérője 15–45 mm;

mindegyik érménél 30%-kal nagyobb átmérőjű a sorozatban utána következő;

a gép csak egész számú milliméter átmérőjű érméket tud verni.

Tervezz érmesorozatot, amely megfelel a fent leírt követelményeknek! Egy 15 mm-es átmérőjű érmével kezdd, sorozatod annyi érmét tartalmazzon, amennyi csak lehetséges!

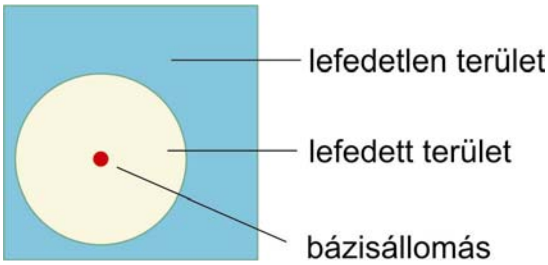
16. Egyetlen egyenes vonallal felezd meg a színezett rész területét!



Megoldás:

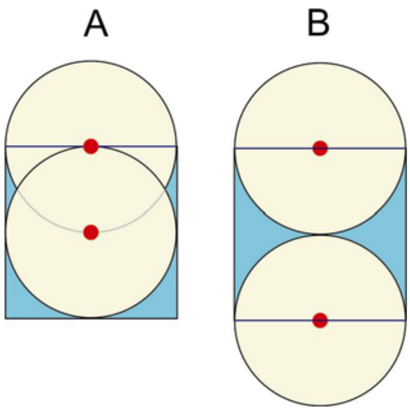
Olyan egyenes, amely keresztülmegy a kör középpontján és az átlók felezési pontján.

17. Ahhoz, hogy mobiltelefonjainkat használni tudjuk, szükség van arra, hogy a telefonjainkról kimenő és az azon fogadott jeleket antennák, úgynevezett bázisállomások továbbítsák. Minden ilyen telepített bázisállomás egy meghatározott sugarú körben képes hívásokat fogadni és továbbítani. Azt a területet, amely a bázisállomások hatósugarába esik, lefedett területnek nevezzük, csak ilyen területen tudunk mobilhívásokat folytatni. Az alábbi ábrán egy példa látható a lefedettségre.



a) Egy négyzet alakú, 2 km-es oldalú területnek legfeljebb hányad részét fedheti le 1 darab 1 km hatósugarú bázisállomás? Úgy dolgozz, hogy számításod nyomon követhető legyen!

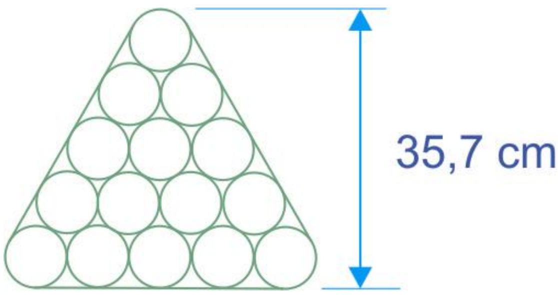
b) A következő ábrák ugyanannak a területnek (négyzet) kétféle lefedését mutatják. Az A vagy a B esetben nagyobb a lefedettség? Válaszodat indokold!



Megoldás:

a) 78,5%; b) Az A esetben, mert **a B esetben a lefedett terület két félkörnyi, azaz egy egész kört tesz ki. Egy ugyanilyen nagyságú kör alakú lefedett terület megtalálható az A részben is, de ott még ezen kívül is van lefedett terület.**

18. A játék kezdetén a biliárdgolyókat egymás mellett, egy szabályos háromszög alakú keretbe kell elhelyezni. Lemértük a keret magasságát. Mekkora egy biliárdgolyó sugara?



Megoldás: 4,0 cm.

II. Szögperc, szögmásodperc

A szögeket eddig fokban mértük. **A részfokokat vagy szögpercben és szögmásodpercben fejeztük ki, vagy tized fokban**. Az újabb számológépek közvetlenül elvégzik az átváltást a tizedfok és a szögperc között: egyes gépeken DMS (degree, minute, second angol szavakból), más gépeken feliratú billentyűvel, kezelését meg kell tanulni. Gyakorolni kell az átváltást akkor is, ha számológépet nem használhatunk.

Mintapélda₃

a) Határozd meg, mennyi a 0,25 szögpercben!

1° = 60' /· 0,25

0,25° = 0,25·60' = 15'

A szögpercet úgy kapjuk, hogy a tizedfokot megszorozzuk 60-nal.

b) Váltsd át a 25 -et fokba!

1° = 60' / : 60

$1' = \frac{1}{60}^{\circ}$

$25' = \frac{25}{60}^{\circ} = 0{,}42°$

A tizedfokot úgy kapjuk, hogy a szögpercet elosztjuk 60-nal.

Feladatok

19. Végezd el a következő átváltásokat:

a) 30 ; b) 2 15 ; c) 21 45 ; d) 1 12 ; e) 2 6 ;

f) 72 33 ; g) 61 25 ; h) 55 42 ; i) 87 55 ; j) 42 27 .

Megoldás:

a) 0,5 ; b) 1,25 ; c) 21,75 ; d) 1,2 ; e) 2,1 ; f) 72,55 ; g) 61,42 ;

h) 55,7 ; i) 87,92 ; j) 42,45 .

20. Végezd el a következő átváltásokat:

a) 4,4 ; b) 85,5 ; c) 18,9 ; d) 6,8 ; e) 23,75 ;

f) 4,04 ; g) 21,87 ; h) 68,13 ; i) 72,68 ; j) 44,12 .

Megoldás:

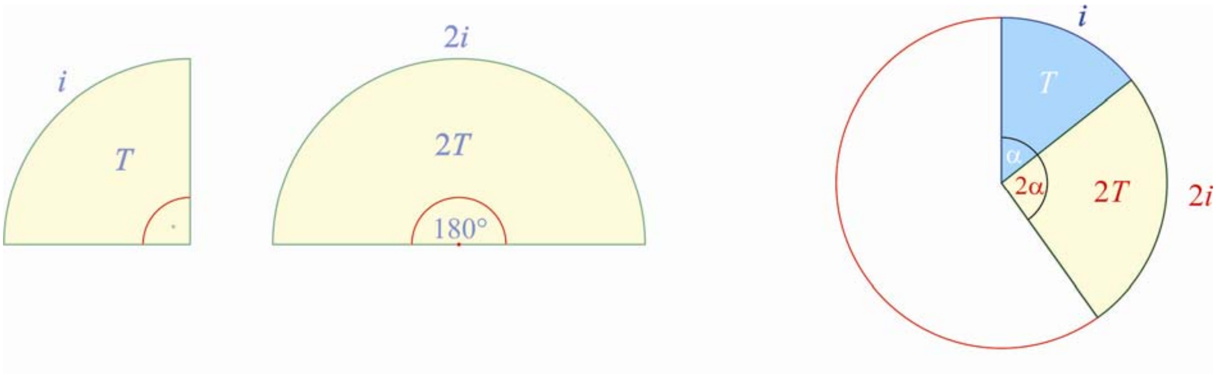
a) 4 24 ; b) 85 30 ; c) 18 54 ; d) 6 48 ; e) 23 45 ; f) 4 2 24 ;

g) 21 52 12 ; h) 68 7 48 ; i) 72 40 48 ; j) 44 7 12 .

III. Egyenes arányosságok a körben

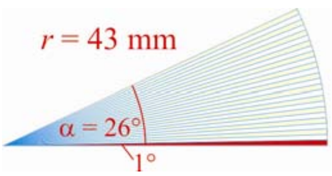
A *negyed kör* és a *félkör* között felírható néhány kapcsolat:

- a félkör középponti szöge (180°) kétszerese a negyed kör középponti szögének (90°);
- a félkör ívhossza kétszerese a negyed kör ívhosszának;
- a félkör területe kétszerese a negyed kör területének.



Ezek az összefüggések nemcsak a derékszög és az egyenesszög kapcsolatában találhatók meg. Ha a kört egy foknyi szeletekre bontjuk, kiderül, miért található egyenes arányosság a középponti szögek, az ívek és a körcikk területeinek arányában: az 1°-os körcikket többször egymás mellé mérve a középponti szög is, a körív is és a terület is megtöbbszöröződik.

A következő ábra egy 43 mm sugarú, 26° középponti szöghöz tartozó körcikk területének és ívhosszának kiszámítását mutatja.

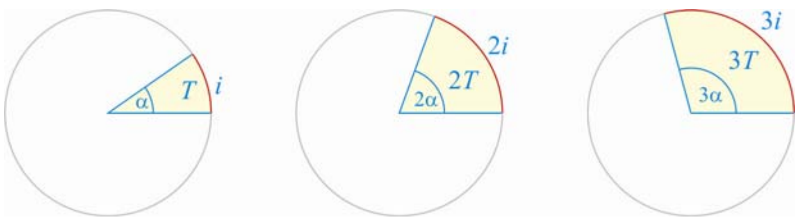


$1° \to \quad T_{1°} = \frac{43^2 \cdot \pi}{360}; \qquad i_{1°} = \frac{2 \cdot 43 \cdot \pi}{360}$

$26° \to \quad T_{26°} = T_{1°} \cdot 26 = \frac{43^2 \cdot \pi}{360} \cdot 26; \qquad i_{26°} = i_{1°} \cdot 26 = \frac{2 \cdot 43 \cdot \pi}{360} \cdot 26$

$T_{1°}$ az 1°-hoz tartozó körcikk területe. A 26° középponti szögű körcikket felbonthatjuk 26 darab, 1°-os középponti szögű körcikkre, és ezek területeit összegezzük. Az ívhossz kiszámítása analóg módon történik. A számított értékek: $T_{26°} = 419{,}5\,\text{mm}^2$, $i_{26°} = 19{,}5\,\text{mm}$.

A körív hossza is, a körcikk területe is egyenesen arányos a középponti szöggel.



Az °-hoz tartozó **körív hosszát** úgy határozzuk meg, hogy az 1°-hoz tartozó körív hosszát megszorozzuk -val.

Az °-hoz tartozó **köcikk területét** úgy határozzuk meg, hogy az 1°-hoz tartozó körcikk területét megszorozzuk -val.

A **körcikk területét** kiszámíthatjuk a $T=\frac{i\cdot r}{2}$ összefüggéssel is.

Mintapélda₄

Geom bolygó lakosai a kör iránti tiszteletük jeléül 360 napos évet használnak. Naptáruk is olyan kör, amelyet fokonként osztottak be 360 egyenlő körcikkre. Fővárosuk főterén óriásnaptár található 2,5 méteres sugárral, amelyen minden körcikk különböző színű. Számítsuk ki, hogy mennyi festék kell egy körcikkre, és mekkora egy körcikket szegélyező körív hossza! A festék kiadóssága 8 l/m^2.

Megoldás:

A körcikkek középponti szöge 1 . Az ehhez tartozó körcikk területe a kör területének 360-ad része, vagyis $\frac{r^2\pi}{360}$. A körcikk körívének hossza a kör kerületének 360-ad része, ami $\frac{2r\pi}{360}=\frac{r\pi}{180}$. A példában r = 2,5 m, ezért a körcikk területe 0,0545 m^2, a körív hossza 0,044 méter, illetve 4,4 cm. A szükséges festék 1 m^2 felülethez $\frac{1}{8}$ liter, 0,055 m^2-hez ennek 0,0545-szöröse: 0,0068 liter = 6,8 cm^3.

Feladatok

21. Mekkora körcikk és körív tartozik ahhoz a 4 cm-es sugarú körcikkhez, melynek középponti szöge a teljesszög 35 %-a?

Megoldás:

A középponti szöggel: $\alpha=360°\cdot 0{,}35=126°$.

Ehhez a középponti szöghöz tartozó körív: $i=\frac{4\cdot\pi}{180}\cdot 126=8{,}79$ cm.

A körcikk területe: $T = \frac{4^2 \cdot \pi}{360} \cdot 126 = 17{,}59\ \text{cm}^2.$

22. Töltsd ki a következő táblázat hiányzó celláit!

r	5 cm	152 mm			10 cm	35 dm		
α	200°		85°		150°		300°	
i		600 mm		10 cm		108 dm		11,775mm
T			100 cm^2	20 cm^2			35 cm^2	29,4 mm^2

Megoldás:

r	5 cm	152 mm	*11,61 cm*	*4 cm*	10 cm	35 dm	*3,66 cm*	*5 mm*
α	200°	*226,28°*	85°	*143,3°*	150°	*176,9°*	300°	*135°*
i	*17,44 cm*	600 mm	*17,22 cm*	10 cm	*26,16 cm*	108 dm	*19,13 cm*	11,775mm
T	*43,61cm^2*	*456 cm^2*	100 cm^2	20 cm^2	*130,83 cm^2*	*1890 dm^2*	35 cm^2	29,4 mm^2

23. Körcikk alakú asztallapot készítünk úgy, hogy egy 90°-os körcikk hiányzik a teljes körből. Számítsd ki az anyagköltséget, ha az asztal sugara 1,6 méter, a kerületére ragasztható bevonó szalag métere 400 Ft, és az asztallap anyagából 1m^2-nyi 3200 Ft-ba kerül!

Megoldás:

A terület 6,0288 m^2, aminek az ára 19292 Ft, Az ív hossza 7,536 m, két sugár hozzáadódik, így a szalag 4294 Ft. Összesen 23586 Ft.

24. Melyik a nagyobb? Tedd ki a megfelelő relációjeleket (T: a körcikk területe, i a körcikk teljes kerülete)!

a) A: 30 cm sugarú körben 65°-os körcikk
B: 20 cm sugarú körben 150°-os körcikk

b) A: 150 dm sugarú körben 200°-os körcikk
B: 200 dm sugarú körben 135°-os körcikk

T_A	?	T_B
i_A	?	i_B

Megoldás: a) T_A=510,25 cm^2, i_A=34 cm, T_B=523,33 cm^2, i_B=52,33 cm;

b) T_A=39250 dm^2, i_A=523,33 dm, T_B=47100 dm^2, i_B=471 dm.

Módszertani megjegyzés: A területek összehasonlításához szükségtelen a területek kiszámítása! Ez jó alkalom, hogy felhívjuk a figyelmet a felesleges számítások, s ezzel együtt a hibalehetőségek kihagyására. 12. osztályban a térfogatok arányakor ez különösen sok időmegtakarítást jelent (π -vel való egyszerűsítés). Ugyanakkor a válaszolni is kell, jellel (vagy szöveggel). A területek nagysága nem kérdés. Hányados vagy különbség képzése könnyen eredményre vezet. Ha $\frac{T_A}{T_B} < 1$, akkor $T_A < T_B$, ennek megfelelően:

$\frac{T_A}{T_B} = \frac{30^2\pi 65}{360} : \frac{20^2\pi 150}{360} = \frac{900\cdot 65}{400\cdot 150} = \frac{585}{600}$, tehát $T_A < T_B$; ugyanígy C és D-nél is.

25. Egy 5 cm sugarú körben a körcikk területe a kör területének 45%-a. Számítsd ki a középponti szöget, a körcikk területét, és a határoló ív hosszát!

Megoldás: 162 ; 35,325 cm^2; 14,13cm.

IV. Ívmérték, radián

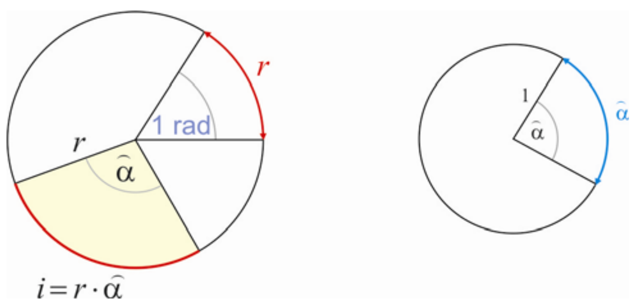
Módszertani megjegyzés: Vannak mennyiségek, amelyeket több mértékegység rendszerrel is mérhetünk. Gyűjtsünk ilyeneket!
Ilyenek az űrmérték (akó, liter, szakajtó, pint, gallon), a hosszúság (mérföld, méter, könyök, inch vagy coll, fényév), a tömeg, stb.

Mivel a középponti szög egyenesen arányos a körív hosszával, a szögeket körívvel is jellemezhetjük. Ezt a mértéket ívmértéknek, **radiánnak** nevezzük.
A műszaki életben sokszor nem fokokban számolnak, hanem radiánban. Ha a szöget fokokban mérjük, a teljes szög 360°. Ívmértékkel mérve a teljes szög 2π radián (a radiánt nem szoktuk kiírni). Vagyis 180°-nak megfelel π radián:

$$180° = \pi \text{ (rad)}; \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}; \qquad 1 \text{ (rad)} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°.$$

A 180-nak rengeteg osztója van, és ez segítséget nyújt az átszámításhoz. Például 30° éppen a hatoda 180°-nak, így π-nek is: $30° = \frac{\pi}{6}$. 150° a 30°-nak ötszöröse, ezért $150° = \frac{5\pi}{6}$, vagy $\frac{5}{6}\pi$ formában szoktuk felírni. Mivel π irracionális, a legpontosabb szögértéket akkor adhatjuk meg, ha meghagyjuk a szögben a π szimbólumot. A $\frac{180°}{\pi}$ pontosabb, mint az 1 radiánhoz tartozó 57,3°.

Mit gondolsz, melyik a régebbi mértékegység, a radián vagy a fok? A szögek ívhosszal történő mérése Roger Cotes (1682 – 1716, angol fizikus és csillagász) ötlete volt 1714-ben, de a *radián* kifejezés James Thomson (1822 – 1892, ír mérnök és fizikus) nevéhez fűződik: ő használta először nyomtatásban, 1873-ban. A kör 360 egységre osztása több mint háromezer éves találmány, a babiloniaknál jelent meg, még az ékírásos időkben.



Felmerülhet, hogy miért hívják ívmértéknek ezt a szög-mértékegységet. Azért, mert ha radiánban adjuk meg a szögeket, a körív hosszát az $i = r \cdot \hat{\alpha}$ szorzattal számíthatjuk ki.

	Fok	Körív hossza	Körcikk területe
Egész kör	360°	$2r\pi$	$r^2\pi$
Félkör	180°	$\frac{2r\pi}{2} = r\pi$	$\frac{r^2\pi}{2}$
Negyed kör	90°	$\frac{2r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2}$	$\frac{r^2\pi}{4}$
Egy fok	1°	$\frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$	$\frac{r^2\pi}{360}$
α fokos szög	**α**	$i = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha$	$T = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha$
α radián	$\hat{\alpha}$	$i = r\hat{\alpha}$	$T = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2}$

Módszertani megjegyzés: A következő átváltásokat érdemes fejben gyakoroltatni.

Feladatok

26. Alakítsd át a fokokat radiánná!

a) 180 ; b) 90 ; c) 60 ; d) 45 ;

e) 120 ; f) 240 ; g) 135 ; h) 270 ;

i) 40 ; j) 70 ; k) 35 ; l) 72 ;

m) 220 ; n) 1000 ; o) 300 ; p) 1200 .

Módszertani megjegyzés: Az i) – m) feladatokat $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ felhasználásával oldjuk meg.

Megoldás:

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{2\pi}{3}$ f) $\frac{4\pi}{3}$; g) $\frac{3\pi}{4}$; h) $\frac{3\pi}{2}$; i) $\frac{2\pi}{9}$; j) $\frac{7\pi}{18}$;

k) $\frac{7\pi}{36}$; l) $\frac{2\pi}{5}$; m) $\frac{11\pi}{9}$; n) $\frac{50\pi}{9}$; o) $\frac{5\pi}{3}$; p) $\frac{20\pi}{3}$.

27. Számítsd át a radiánokat fokokká!

a) 3π ; b) $\frac{\pi}{12}$; c) $\frac{5\pi}{12}$; d) $\frac{7\pi}{9}$;

e) $\frac{4\pi}{15}$; f) $\frac{5\pi}{6}$; g) $\frac{8\pi}{3}$; h) $\frac{11\pi}{10}$;

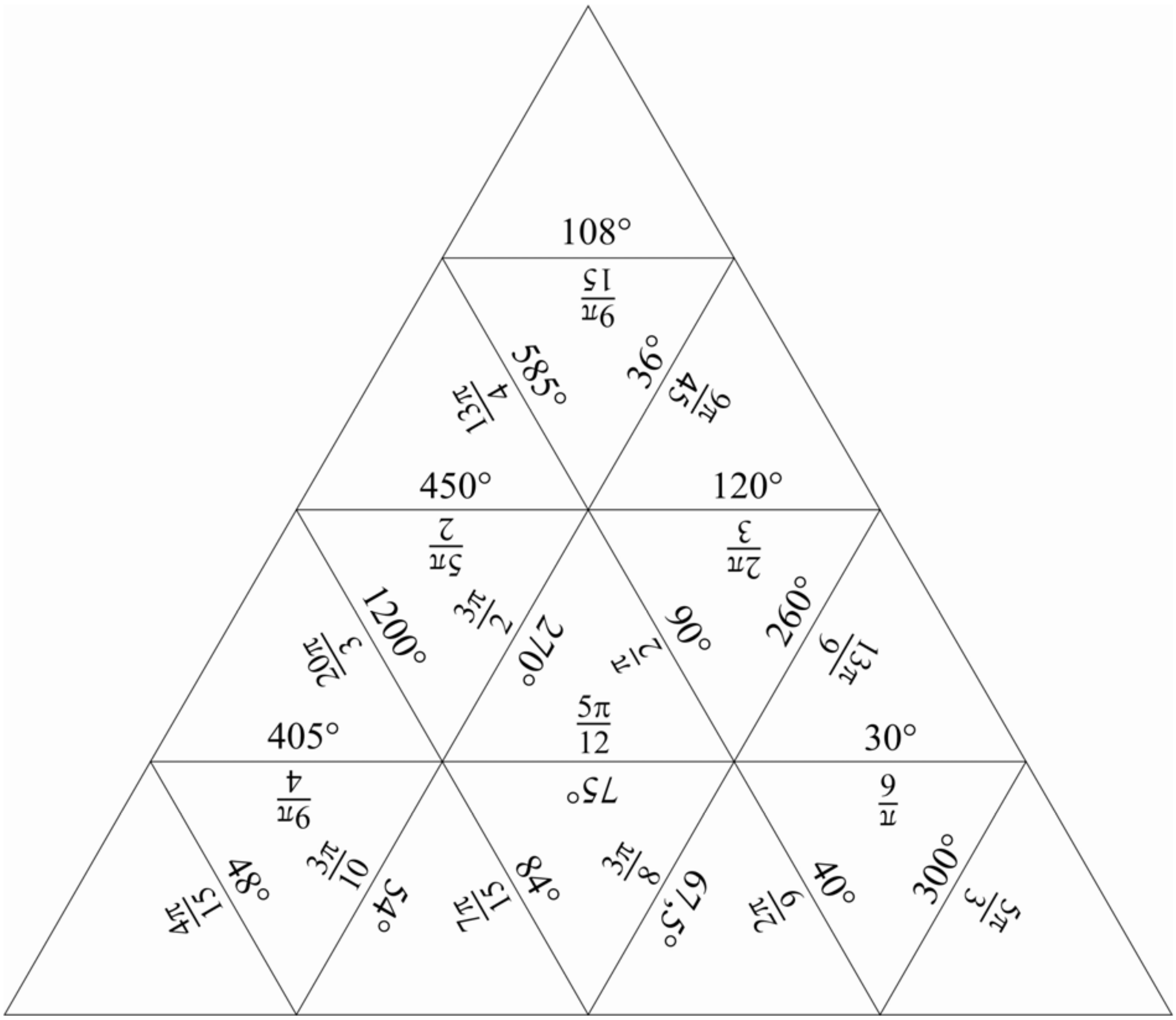
i) 2 rad; j) 3,56 rad; k) 10 rad; l) 8,12 rad-

Megoldás:

a) 540 ; b) 15 ; c) 75 ; d) 140 ; e) 48 ; f) 150 ; g) 480; h) 198 ;

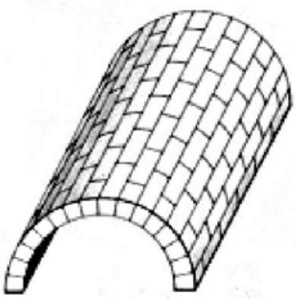
i) 114,65 ; j) 204 ; k) 573,25 ; l) 465,5 .

Módszertani megjegyzés: Az egyszerűbb átváltások gyakorlására egy triminó áll rendelkezésünkre. Minden csoport számológép nélkül rakja ki a nagy háromszöget. Az értékelés az összeállítás gyorsasága szerint történik.



V. A kör részeinek területe

Az előző részben volt már szó a körcikkről, de a kör más részeivel is megismerkedünk. A következő ábrák ezek gyakorlati felhasználásából mutatnak példákat.



A hétköznapi életben sok helyen alkalmazzák a kör részeit:

a gumi- és betongyűrűk, csövek keresztmetszete **körgyűrű** alakú;

a **körgyűrűcikket** az építészetben: a megfelelően faragott kövekből összeállított boltozat akár kötőanyag nélkül is megtart falakat (például korai gótikus épületekben), hidakat, födémeket.

Elnevezések

A kör részeivel kapcsolatban az alábbi elnevezéseket használjuk:

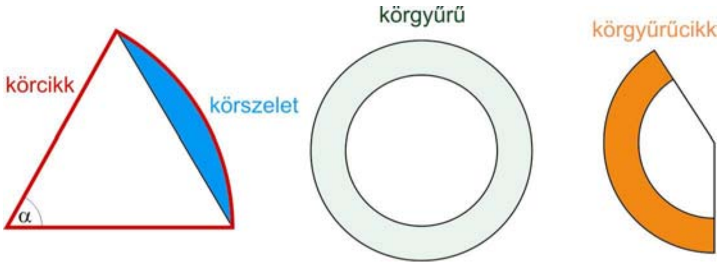
középponti szög (α);

körcikk;

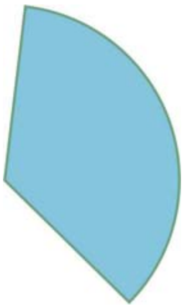
körszelet;

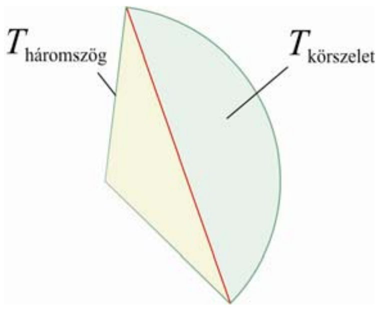
körgyűrű;

körgyűrűcikk.



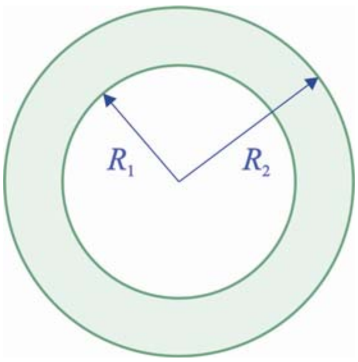
Területüket általában **területek kivonásával** számítjuk ki:

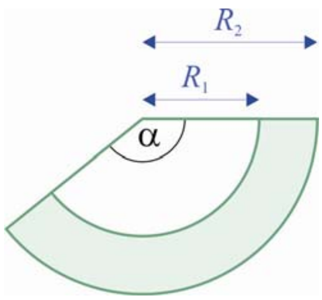




$$T_{körcikk} = \frac{i \cdot r}{2}$$

$$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{háromszög}}$$





$$T_{\text{körgyűrű}} = \left(R_2^2 - R_1^2\right)\pi$$

$R_1, \rightarrow T_1$

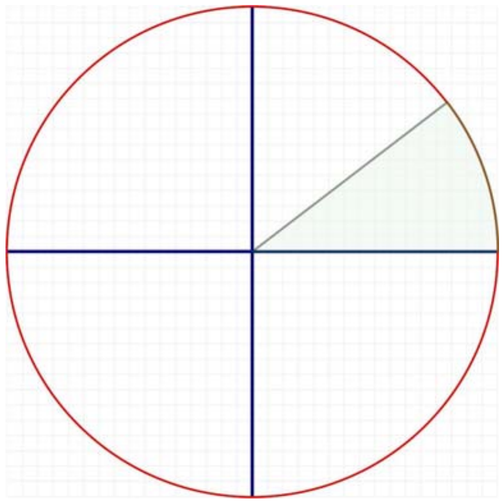
$R_2, \rightarrow T_2$

$T = T_2 - T_1$

Módszertani megjegyzés:

A számításokhoz nincs mintapélda, mert a feladatok néhány perces tanári magyarázat és az ábrák alapján önállóan megoldhatók. A feladatok megoldását javasolt csoportmunkában végezni.

Mintapélda$_5$



Rajzolj egy 8 cm sugarú kört! Becsüld meg a négyzetrácsok segítségével, hogy mekkora területű körcikk tartozik 1 radián középponti szöghöz? Mérd le a körcikket határoló körív hosszát is (például cérnával)! Végezz számításokat is, utána vizsgáld meg, hány százalékos volt az eltérés a becsült és a mért adatok között!

Megoldás:

1 radiánhoz tartozó körcikk területe a teljes kör területének 2 -ed része:

$\frac{r^2\pi}{2\pi}=\frac{r^2}{2}=32\,\text{cm}^2$. Egy négyzetrácsban egy kis négyzet területe $0{,}5^2 = 0{,}25$ cm^2, vagyis

$\frac{32}{0{,}25}=128$ kis négyzet az eredmény.

Ha például 98 kis négyzetet számoltál meg, az eltérés 30 kis négyzet , ami

$\frac{30}{128}\cdot 100 = 23{,}4\%$ eltérés (hiba).

A körív hossza a teljes kör kerületének 2 -ed része: $\frac{2r\pi}{2\pi}=r=8\,\text{cm}$.

Ha 7,6 cm-t mértél, a hiba az eltérés/jó eredmény, százalékban kifejezve képlet szerint

$\frac{8-7{,}6}{8}\cdot 100 = 5\%$.

Feladatok

28. Egy műanyagcső külső átmérője ¾ coll, az anyagvastagság 1,5 mm (1 coll: 2,45 cm.). A cső keresztmetszetén a belső kör területének hány százaléka a műanyagot tartalmazó körgyűrű területe?

Megoldás:

A körgyűrű területe 79,5 mm^2, belső köré 186 mm^2. Az arány 42,8%. Csak az arány a kérdés. Ehhez felesleges a területek kiszámítása! $\frac{(R^2 - r^2)\pi}{r^2\pi} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1$ (%-ban 100-zal szorozva)

29. Adott a körgyűrű belső (r) és külső (R) sugara. Mekkora a körgyűrű területe?

a) r = 45 mm, R = 50 mm; b) r = 72 cm; R = 78 cm; c) r = 6 cm; R = 6,4 cm.

Megoldás:

3,14-gyel csak 3 jegy maradhat: a) 1490 mm^2, b) 2830 cm^2, c)15,6 cm^2,

míg gépi értékével számolva a)1492,3 mm^2, b) 2827,4 cm^2, c)15,58 cm^2.

30. Egy 30 cm külső átmérőjű cső keresztmetszetének 7 %-a a cső anyaga. Mekkora az anyagvastagság?

Megoldás:

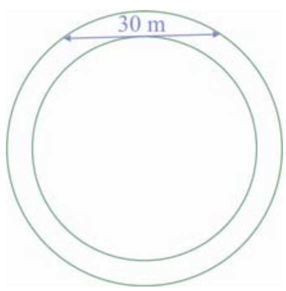
1 mm. Az eredmény attól függ, hogy hány jegynyi pontossággal dolgozunk.

r = 14,465 cm, így a R–r értéke lehet 1 mm, de akár 0,535, vagy 0,54 mm is.

31. Egy 50 cm külső átmérőjű cső keresztmetszetének 18%-a a cső anyaga. Mekkora a belső keresztmetszet területe?

Megoldás: 1610 cm^2 (3,14-gyel, 3 jegyre) vagy 1610,1 cm^2 (gépi π).

32. A planetárium körfolyosóját le kell burkolni. A burkoló az ábrán látható távolságot mérte le. Miért elegendő ez az adat a burkolat anyagmennyiségének meghatározásához? Mennyibe kerül a burkolás, ha a burkoló anyaggal együtt 2600 Ft-ot kér 1 m^2 burkolatért?

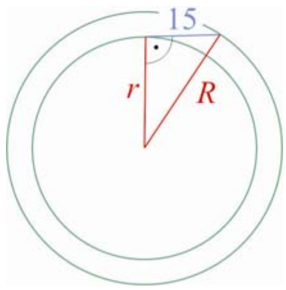


Megoldás:

A Pitagorasz-tételt alkalmazva, $R^2 = r^2 + 15^2$, amiből

$R^2 - r^2 = 225$. A körgyűrű területe ennek -szerese, ami

706,5 m^2. Az ár: 1 836 900 Ft.



33. Biztos láttál már olyan vadnyugati filmeket, amelyben postakocsi szerepel, és észrevetted, hogy néha állni látszik a kocsi küllős kereke. Ez azért van, mert másodpercenként 24 képet vetítenek a filmen, és ennyi idő alatt fordul egy küllőnyit a kerék. Mekkora annak a postakocsinak a sebessége, amelyiknek a kereke 120 cm átmérőjű, a kerék állni látszik, és a küllők száma a) 10; b) 12; c) 16; d) 8.

Megoldás:

a) 18 m/s = 65,1 km/h; b) 15,1 m/s = 54,3 km/h; c) 11,3 m/s = 40,7 km/h; d) 22,6 m/s = 81,4 km/h.

Módszertani megjegyzés: A körszelet területének kiszámításához visszatérünk majd 10. osztályban a szögfüggvények bevezetésével kapcsolatos feladatokban is. Itt csak a nevezetes szögekhez köthető, szabályos háromszögre és egyenlőszárú derékszögű háromszögre visszavezethető feladatokat vesszük.

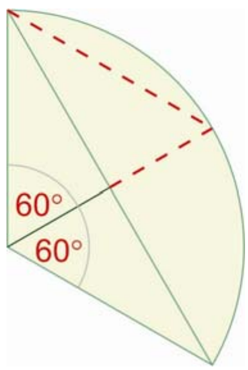
Mintapélda$_6$

Számítsuk ki a $\frac{2\pi}{3}$ radiánú középponti szöghöz tartozó körszelet területét és kerületét, ha a kör sugara 30 cm!

Megoldás:

$\frac{2\pi}{3}$ a 120°-os szögnek felel meg (harmad kör), így készítünk egy ábrát.

A körszelet területét úgy számoljuk ki, hogy kivonjuk a körcikk területéből a középen levő háromszög területét. A háromszög kiegészíthető a oldalú szabályos háromszöggé, aminek a területe $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.



Így a körszelete területe:

$T=\frac{r^2\cdot\pi}{3}-\frac{r^2\cdot\sqrt{3}}{4}=942-390=552\,\text{cm}^2$. A kerülete a kör kerületének harmada, hozzáadva kétszer a szabályos háromszög magasságát:

$$K=\frac{2\cdot r\cdot\pi}{3}+2\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=62{,}8+51{,}96=114{,}8\,\text{cm}.$$

Az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.

Módszertani megjegyzés:

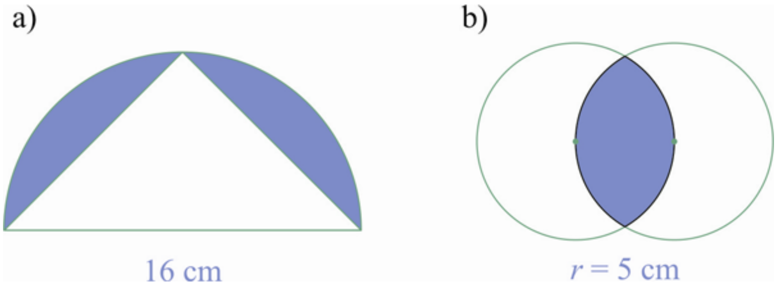
A fenti számításhoz hasonló a speciális, 60 -os vagy 45 -os derékszögű háromszögekhez köthető a körcikk háromszöge.

34. Egy kör sugara 25 cm. Számítsuk ki a következő középponti szögekhez tartozó körszeletek területét: a) 60°; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{2\pi}{3}$; d) 240°.

Megoldás:

a) 56,5 cm^2; b) 178,37 cm^2; c) 383,86 cm^2; d) 1579,83 cm^2; d)-hez megjegyzés: konkáv szög esetén a háromszög területét hozzáadjuk a körcikk területéhez.

35. Mekkora a színezett rész területe?



Megoldás: a) 36,5 cm^2; b) 30,7 cm^2.

Módszertani megjegyzés: A modul utolsó órája előtt célszerű **diagnosztikai mérést** végezni. Kiderül belőle, hogyan sajátították el a tanulók az egyes részfeladatokat, lépéseket, típuspéldákat. Javasolt feladattípusok:

1. Váltsd át a következő szögeket fokba: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{3}$
2. Váltsd át a következő szögeket radiánba: 72 ; 200
3. A 75 -hoz tartozó körív hossza 7,065 cm. Mekkora a körívhez tartozó körcikk területe?
4. Számítsd ki, mekkora a színezett rész területe, ha a négyzet oldala 40 cm!
5. Hány százaléka a szabályos hatszög területének a hatszög és a köré írható kör közötti rész területe?
6. A cilinder karimájának külső átmérője 38 cm, a karima területe 879,2 cm. Mekkora a belső átmérő?

Megoldások:

1. 135 , 420 ; 2. $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{10\pi}{9}$;

3. A sugár 5,397 cm, a terület 19,07 cm^2. (ha 4 jegyű az adat, akkor géppel kell számolni, 4 jegyre);
4. 456 cm^2;
5. 20,9%;
6. kb. 18 cm. (Ha 3,14-gyel dolgozunk, akkor a terület 4 jegye túl pontos. Az eredmény viszont 879,2:3,14 =280. Csakhogy ez nem pontos, mert $\pi \neq 3,14$. Ilyenek miatt hiszik azt a tanulók, hogy a π racionális szám, ezért a megoldásnál térjünk ki a pontosság kérdésére. A belső átmérő 18,02 cm, vagy 18,0 cm.)

VI. A kör érintője

Módszertani megjegyzés: A kör érintőjének tulajdonságait a következő lépésekkel javasoljuk felfedeztetni. A feldolgozás csoportmunkában célszerű, hogy a tanulók a felmerülő kérdésekre együtt találjanak válaszokat. Közben ne használják a munkafüzetet!

1. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, melynek befogói: $AC = 3$ cm és $BC = 4$ cm!
2. Tükrözd a háromszöget az AB átfogóra!
3. Szerkesszük meg a háromszög köré írható k kört! Középpontját jelöljük F-fel.
4. Szerkesszük meg az A középpontú, AC sugarú k_1 kört!

Mintapélda$_7$

Végezzük el a következő szerkesztéseket, és az eredmény alapján válaszoljunk a kérdésekre!

1. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, melynek befogói : $AC = 3$ cm és $BC = 4$ cm!
2. Tükrözd a háromszöget az AB átfogóra!
3. Szerkesszük meg a háromszög köré írható k kört! Középpontját jelöljük F-fel.
4. Szerkesszük meg az A középpontú, AC sugarú k_1 kört!

a) Mi a kapcsolat k_1 kör és BC egyenes között?

b) Mit mondhatunk BC és BD hosszáról?

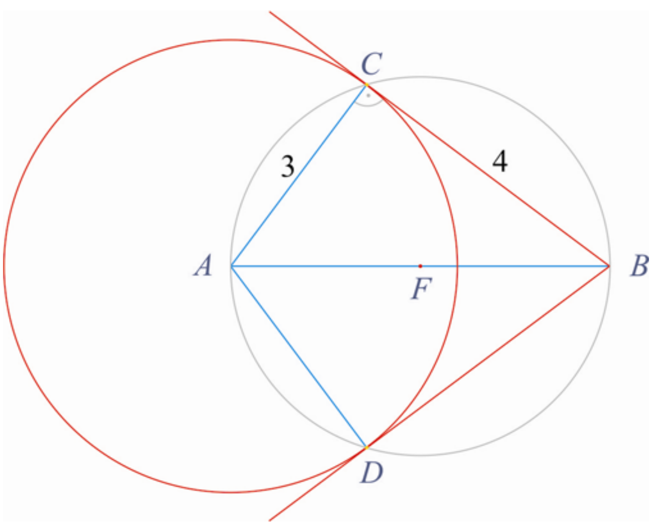
c) Milyen összefüggést állapíthatunk meg a kör érintője és sugara között?

Megoldás:

a) BC a k_1 kör érintője.

b) Egyenlők, mert ABC és ABD háromszögek egybevágók.

c) A sugár (AC) merőleges az érintőre (BC) az érintési pontban (C).



A kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra.

Egy körhöz egy külső pontból húzott **érintőszakaszok hossza** egyenlő.

Thalész-tétel megfordítása: a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja épp az átfogó felezőpontja.

Módszertani megjegyzés:

A következő feladatokban két tételt domborítunk ki: a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, és hogy a sugár merőleges az érintőre. Azt is megértjük, hogy miért kell Thalész-körrel szerkeszteni az érintőt külső pontból. Ehhez az Euklides programra, és informatika teremre van szükség, ami élményt nyújt azoknak a gyerekeknek is, akik már az érintő tulajdonságaival tisztában vannak általános iskolai tanulmányaikból. A többieknek felfedezést jelentenek a felismerések. Fontos, hogy ne közöljünk eredményeket, csak olyan feladatokat, amelyekkel rávezethetjük a tanulókat a helyes felismerésekre. Ne kérdezzünk rá direkt a tételekre, csak a tapasztalatokat beszéljük meg. Ezen az órán nincs szükség a tankönyvre.

Tanári irányítással végzik a tanulók a szerkesztéseket. A következő gondolat- és szerkesztési menetet javaslom:

Vegyük fel a kör *C* középpontját, és egy másik pontot, ami kijelöli a sugár hosszát. Szerkeszszük meg a kört! A körvonal pontját mozgatva változik a kör sugara.

Vegyünk fel egy *P* és egy *A* pontot, és szerkesszünk rajtuk keresztül egy *P*-ből kiinduló, *A*-n áthaladó félegyenest. Szerkesszünk *PA* félegyenesre merőleges egyenest *A* ponton keresztül. Szerkesszünk egy kört is, *C* középponttal. A *P* pontot rögzítve, mozgassuk az *A* pontot (és ezzel együtt *PA* félegyenest is) úgy, hogy *PA* félegyenes érintse a kört az *A* pontban! Milyen ponton megy keresztül a merőleges egyenes?

A merőleges egyenes átmegy a kör középpontján.

Milyen tulajdonságát mutatja ez az érintőnek?

Merőleges a sugárra az érintési pontban.

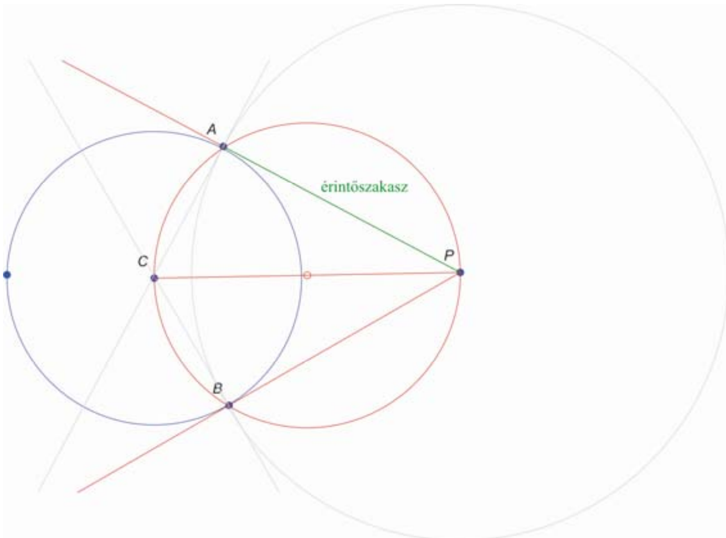
Az előző feladatot továbbfejlesztve vegyünk fel egy tetszőleges *B* pontot. Szerkesszük meg a *PB* félegyenest és a *B*-n áthaladó, *BP*-re merőleges egyenest! Mozgassuk a *B*-t addig, amíg *PB* a kör érintővé nem válik a *B* pontban (*B* *A*). Szerkesszük meg a *P* középpontú, *PA* sugarú kört.

Mit mondhatunk AP és BP ***érintőszakaszok*** *hosszáról?*

A kör átmegy a *B*-n is, így a két érintőszakasz egyenlő.

Hol van a CPA háromszög köré írható körének középpontja? Szerkesztéssel igazoljuk!

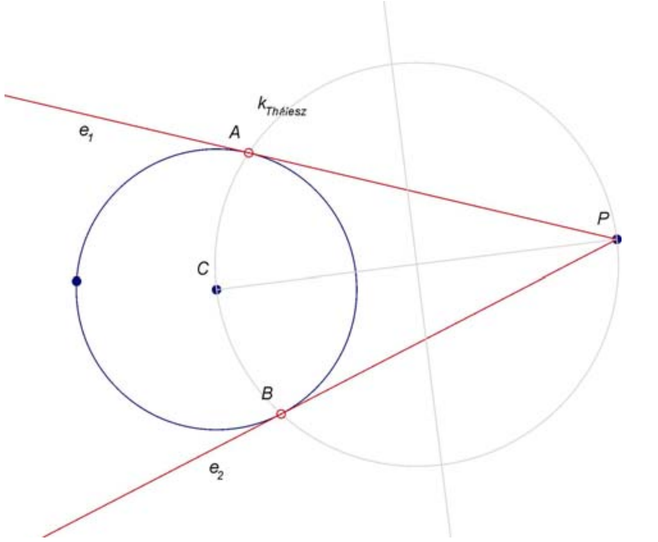
Mivel a háromszög derékszögű, a Thalész-tétel megfordítása miatt a középpont a *CP* Thalész-köre lesz. Meg kell szerkeszteni *CP* szakaszt és a felezőpontját, és ezzel a középponttal, *P*-re illeszkedő kört kell szerkeszteni.



Mintapélda₈

Vegyünk fel egy *C* a középpontú kört és rajta kívül egy *P* pontot! Szerkesszük meg a körhöz a *P* pontból húzott érintőket!

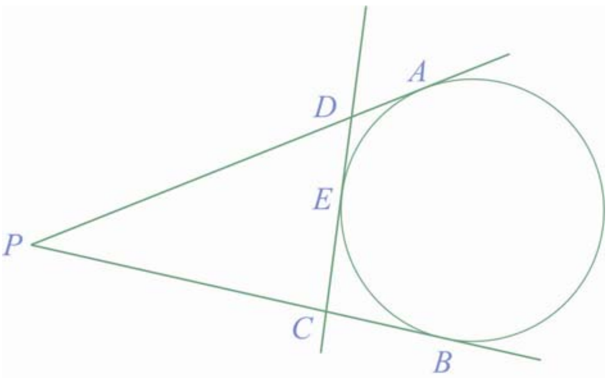
Megoldás:



A *CP* szakasz Thalész-körén ($k_{Thalész}$) helyezkednek el azok a pontok, amelyek a *C* és *P* pontokkal derékszögű háromszöget alkotnak. Mivel az érintő merőleges a sugárra az érintési pontban, az adott kör és a Thalész-kör metszéspontjai (*A* és *B*) az érintési pontok.

Feladatok

36. A *k* körhöz *P* külső pontból húzott érintők *A* és *B* pontokban érintik a kört az ábrán látható módon. Egy további érintő egyenes *C* és *D* pontokban metszi a szöszárakat. Igazold, hogy a *PCD* háromszög kerülete egyenlő a *PA* szakasz hosszának kétszeresével?



Megoldás:

PA = *PB*, mert ua. külső pontokból húzott érintők. *DE* = *AD*, *CE* = *CB*, így az állítás igaz. Feltétel: az *E* érintési pont az *AB* rövidebb ívén van.

(Ellenkező esetben *PD* + *PC* – *CD* = 2*PA*.)

37. *a* és *b* a derékszögű háromszög befogói, *c* az átfogó, *r* a köré írt kör sugara. Töltsd ki a táblázat hiányzó celláit!

a	15 cm	12 dm			32,7 dm
b	20 cm		13,4 cm	54 cm	
c		3 m	5,8 dm		589 cm
r				32 cm	

Megoldás:

a	15 cm	12 dm	*56,43 cm*	*34,35 cm*	32,7 dm
b	20 cm	*27,5 dm*	13,4 cm	54 cm	*489,9 cm*
c	*25 cm*	3 m	5,8 dm	*64 cm*	589 cm
r	*12,5 cm*	*1,5 m*	*2,9 dm*	32 cm	*294,5 cm*

38. *C* a kör középpontja, *P* egy külső pont, és *E* a *P*-ből a körhöz húzható érintő érintési pontja. Készíts rajzot, és töltsd ki a táblázat hiányzó celláit!

CP		4,1 dm	149 cm	61 cm	5,3 dm
EP	12 cm			6 dm	
r	5 cm	0,4 m	5,8 dm		45 cm

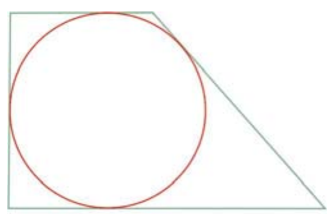
Megoldás:

CP	*13 cm*	4,1 dm	149 cm	61 cm	5,3 dm
EP	12 cm	*9 cm*	*137,2 cm*	6 dm	*28 cm*
r	5 cm	0,4 m	5,8 dm	*11 cm*	45 cm

39. Szerkeszd meg a *C* középpontú, *r* sugarú körhöz húzható érintőket *P* pontból, ha

a) $r = 4$ cm, $CP = 8$ cm; b) $r = 2{,}5$ cm, $CP = 7$ cm; c) $r = 5$ cm, $CP = 7$ cm.

40. Ebbe a derékszögű trapézba kör írható. Milyen kapcsolat van a szemben fekvő oldalak összege között? Mekkora a beleírható kör sugara, ha az alapok hossza 4 és 12, a nem derékszögű szár hossza 10 egység?



Megoldás:

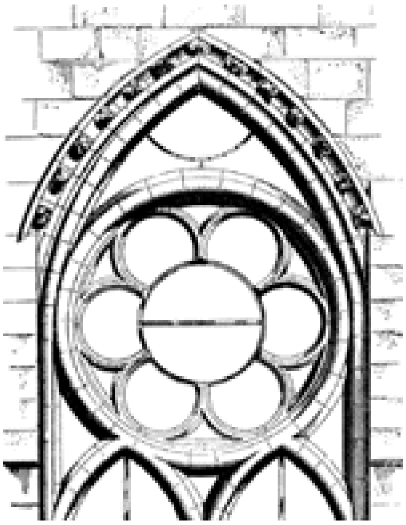
Az érintőszakaszok egyenlőségéből belátható, hogy a szemben fekvő oldalak összege egyenlő, ezért a derékszögű szár hossza 6 egység, a sugár 3. A feladat célja a nem középszintű tananyagként szereplő érintőnégyszög-tétel felfedezése. Ha a tanulók érdeklődnek, akkor segítsünk megfogalmazni a tételt általánosan is!

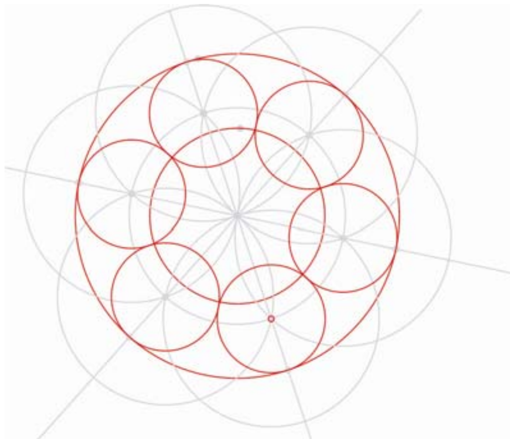
Ez a feladat túlhatározott, sok adat van megadva, ezeknek meg kell felelniük egymásnak és a kritériumoknak. Hasonló feladat kitűzésénél legyünk nagyon körültekintők!

További szerkesztések

Módszertani megjegyzés: A szerkesztések az Euklides-programmal is végrehajthatók.

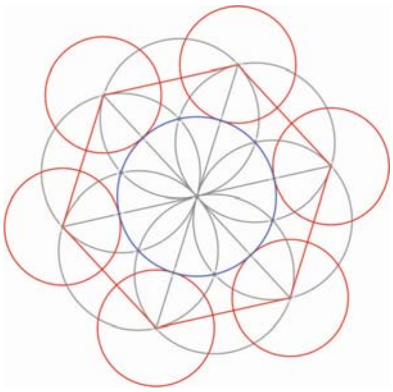
41. **Kőrácsos ablak.** Ezt a rozetta alakot 1210 körül tervezte Jean d’Orbais a Reimsben található székesegyházban, és innen terjedt el Európa-szerte.



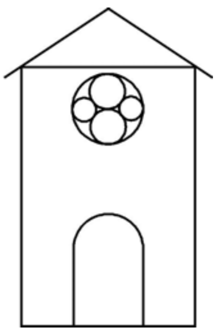


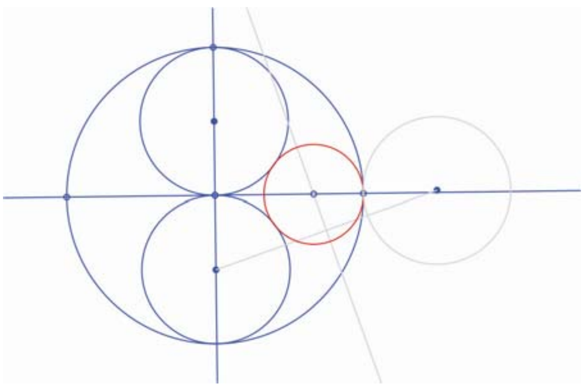
Módszertani megjegyzés:
A bázispontok elhúzásával, a körök sugarának változtatásával érdekes ábrák jönnek ki.

42. Szabályos sokszögek (négyzet, szabályos hatszög, szabályos nyolcszög) szerkesztése.



43. Román-kori ablak szerkesztése.

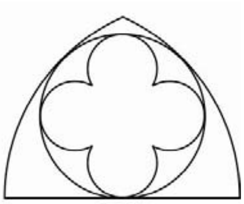


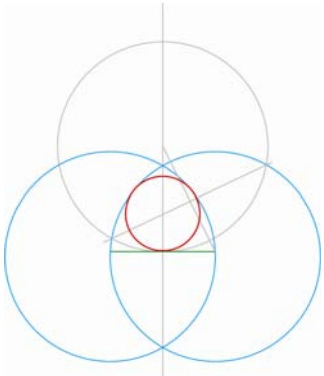


Megoldás:

A kék körök a kiinduló adatok, cél a piros kör megszerkesztése. Szerkesszük meg a szürke segédkört, aminek leszármazottjai a szürke vonalak, és a piros kör középpontját is, sugarát is metszéspontok határozzák meg. Mozgassuk a szürke kör középpontját (bázispont), és vizsgáljuk meg, mikor válik a piros kör érintővé! Mekkora ekkor a szürke kör sugara? Nyomtatás utáni méréssel határozzuk meg!

44. Gótikus ablak szerkesztése.





Megoldás:

Szerkesztése és a kísérletezés hasonló a román ablakéhoz, itt is segédkörrel dolgozunk.

Kislexikon

A kör kerülete $K = 2r\pi$, a kör területe $T = r^2\pi$.

A **szögpercet** úgy kapjuk tizedfokból, hogy a tizedfokot megszorozzuk 60-nal.

A **tizedfokot** úgy kapjuk szögpercből, hogy a szögpercet elosztjuk 60-nal.

A körív hossza és a körcikk területe egyenesen arányos a középponti szöggel.

A fokhoz tartozó **körcikk területét** úgy határozzuk meg, hogy az 1 -hoz tartozó körcikk területét megszorozzuk -val. A körcikk területét kiszámíthatjuk a $T = \frac{i \cdot r}{2}$ képlettel is.

A fokhoz tartozó **körív hosszát** úgy határozzuk meg, hogy az 1 -hoz tartozó körívet megszorozzuk -val.

A kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra.

Egy körhöz egy külső pontból húzott **érintőszakaszok hossza** egyenlő.

Thalész-tétel megfordítása: a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja épp az átfogó felezőpontja.