I. Egyenes és fordított arányosság

Az egyenes és fordított arányosság témakörét a „Táborszervező" projekt keretében dolgozzuk fel. A modulnak az a célja, hogy a különböző szempontokat követve a tanulók dolgozzák ki egy tábor költségvetésének néhány részletét. Minden csoport plakátot fog készíteni, a plakáton szerepeljen a tábor helyszínének ajánlása, a költségvetés különböző fejezeteihez kapcsolódó táblázatok és grafikonok.

Módszertani megjegyzés: Az előző óra utolsó két percét fordítsuk ennek az órának az előkészítésére. Négyfős csapatokat alkotunk. Ahány négyfős csoportot akarunk kialakítani, annyi földrajzi nevet válasszunk. Minden helységnevet négy cédulára írunk le. A tanulók húznak egy-egy cédulát, és akik azonos nevet húztak, egy csoportot alkotnak. Minden csoport megkapja az 1. feladatlapot. A tanulók házi feladata, hogy természeti- és kulturális nevezetességeket gyűjtsenek a húzott helyszínről az 1. feladatlap alapján.

Tudjuk már, hogy mit jelent az arány és tudunk megfelelő arányban felosztani adott mennyiségeket. A mindennapi életünkben előfordul az is, hogy bizonyos mennyiségek arányát ismerjük de nekünk kell eldönteni, hogy ha az arányos mennyiségek közül az egyik megváltozik, hogyan változik meg a másik.

Az alábbi feladatlapokon ilyen feladatokkal találkoztok.

1. feladatlap

A csoportotok szervezi a nyári tábort. A táborban, sátrakban fogtok lakni és szalmazsákokon aludni. Önellátóak lesztek, azaz ti fogtok bevásárolni és főzni. Gyűjtsetek ismereteket a tábor helyszínével kapcsolatban! Készítsetek plakátot! A munkát osszátok fel magatok között! A plakáton szerepeljen a tábor helyszínének ajánlása, a költségvetés különböző fejezeteihez kapcsolódó táblázatok és grafikonok!

(Nyomtassatok térképet, jelöljétek be a tábor helyét, nézzétek meg, milyen messze van a lakóhelyünktől, keressétek meg a környék nevezetességeit, stb.) A csoport a közösen elkészített plakáton fogja bemutatni a munkáját.

Egyenes arányosság

Módszertani megjegyzés: Közösen megbeszélve keressünk példát összetartozó mennyiségekre. Pl: a vásárolt kenyér mennyisége és ára. Ugyanazon környéken levő lakások alapterülete és ezek bérleti díja. A szántóföldön az egyenletesen elvetett gabona területe és a

learatott gabona mennyisége. Ezután írjon minden csoport egy-egy példát összetartozó mennyiségekre. A csoportforgó módszerével ellenőrizzük a példák helyességét.

Az egyenes arányosság fogalmának előkészítése, kialakítása

Osszuk ki, és a csoportok önállóan dolgozzák fel a 2. feladatlapot. A kitöltött táblázatot és az elkészített grafikont használják fel a plakáthoz!

2. feladatlap

A nomád tábor előkészületeihez az élelmiszer-rendelés és a költségvetés elkészítése is hozzátartozik. Tudjuk, hogy az egyes élelmiszerekből mennyi a napi szükséglet fejenként:

Kenyér: 1 főnek napi 60 dkg, és 1 kg kenyér ára 100 Ft. Hús: 1 főnek napi 20 dkg, és 1 kg hús ára 1000 Ft.

Vajon mennyi kenyérre, mennyi húsra lesz szükség, mennyit kell érte fizetni?

Nyilvánvalóan az egy főre jutó adatokat annyiszorosára kell növelni, ahány résztvevője van a tábornak. Ezt az összefüggést egyenes arányosságnak nevezzük.

Az egyenes arányosság fogalmának pontosítása

Ha készen vannak, mondjuk ki, és a füzetbe írassuk is le, hogy:
- a létszám és a kenyér mennyisége,
- a létszám és a kenyérért fizetett pénz,
- a létszám és a hús mennyisége,
- a létszám és a húsért fizetett pénz

kapcsolata olyan, hogy ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyiszorosára változik a másik, ilyenkor a két mennyiségről azt mondjuk, hogy egyenes arányban vannak.

Két mennyiség **egyenes arányban** van egymással, ha az egyik mennyiség **valahányszorosára** változik, akkor a másik mennyiség is **ugyanannyiszorosára** változik.

Módszertani megjegyzés:
- Kérjünk példákat a csoportoktól!
- Közösen vizsgáljuk meg az összetartozó értékek arányát!

- Fogalmazzuk meg és írassuk be a füzetbe a tapasztalatokat!

Megoldás: az összetartozó értékek hányadosa állandó.

- Mondjuk ki, ha két mennyiség között olyan kapcsolat van, hogy az összetartozó értékek aránya, hányadosa állandó, akkor a két mennyiség egyenesen arányos.

- Beszéljük meg az egyenes arányosság ábrázolását grafikonon!

Megoldás: A tapasztalatok alapján, ha az egyenesen arányos mennyiségek összetartozó értékeit ábrázoljuk, a grafikon egy egyenes.

Fordított arányosság

A fordított arányosság fogalmának előkészítése

A csoportok megtervezik az utazás költségét. (3. feladatlap)

3. feladatlap

Busszal mentek és egy kilométernyi útért a Volán Rt-nek 150 Ft-ot kell fizetni. Mennyi lesz az utazás költsége?

a) Számoljátok ki, mennyit kell egy tanulónak fizetni az utazásért, ha 15-en, ha 30-an, ha 45-en, ha 54-en, vagy ha 81-an mennétek a táborba?

Készítsetek az adatokból táblázatot is! Fogalmazzátok meg a tapasztalatokat!

Résztvevők száma	15	30	45	54	81
Egy főre jutó költség					

Megoldás: A táblázatban x jelöli az út km-ben mért hosszát.

Résztvevők száma	15	30	45	54	81
Egy főre jutó költség	$10 \cdot x$	$5 \cdot x$	$\frac{10}{3} \cdot x$	$\frac{25}{9} \cdot x$	$\frac{50}{27} \cdot x$

Minél többen utaznak, annál kevesebb az egy főre jutó költség, persze csak akkor, ha elférnek egy buszban.

Módszertani megjegyzés: Ha készen vannak, beszéljük meg a táblázat kitöltését és a tapasztalatokat. Ezután foglalkozzunk a 4. feladatlappal, amelyben vegyesen oldunk meg egyenes és fordított arányossággal kapcsolatos feladatokat.

4. feladatlap

Hosszú tervezgetés után eldőlt, hogy a tábor helyszíne Kistolmács. A résztvevőket ötszemélyes sátrakban szeretnétek elhelyezni. Egy sátor beszerzési ára 80000 Ft. A sátorban szalmazsákon fogtok aludni, egy szalmazsák ára 1500 Ft. Készítsen a csoport erre vonatkozó költségvetést is! A költségeket foglaljátok táblázatba!

Résztvevők száma	15	30	45	54	81
Sátrak száma					
Sátrak beszerzési költsége					
Szalmazsákok beszerzési költsége					

Az előző grafikonon rajzoljátok meg a táblázatnak megfelelő grafikonokat úgy, hogy az egyik pár a sátrak, a másik a szalmazsákok költségvetésével foglalkozzon!

Figyeljétek meg a kapott grafikonok tulajdonságait!

Használjatok színes íróeszközt! A grafikont ragasszátok fel a plakátra!

Megoldás:

Résztvevők száma	15	30	45	54	81
Sátrak száma	3	6	9	11	17
Sátrak beszerzési költsége	240000 Ft	480000 Ft	720000 Ft	880000 Ft	1360000 Ft
Szalmazsákok beszerzési költsége	22500 Ft	45000 Ft	67500 Ft	81000 Ft	121500 Ft

Ha készen vannak a gyerekek, beszéljük meg a megoldásokat.

Ha ez megtörtént, minden csoport olvassa el és értelmezze az 5. feladatlapon szereplő állításokat.

5. feladatlap

A szóforgó módszerével oldassuk meg a feladatokat: Az *A* jelű tanuló olvassa fel az első állítást, és tegyen javaslatot rá. Ezt közösen beszéljék meg, majd a következő állítást a *B* jelű olvassa fel, és tegyen rá javaslatot, ezt is közösen beszéljék meg, majd a *C* jelű tanuló jön, és így tovább, amíg a kérdések tartanak.

Igazak-e az alábbi állítások?

1. Ahányszorosára növeljük a sátrak számát, annyiszorosára nő a beszerzési költség.
2. Ahányszorosára nő a résztvevők száma, annyiszorosára nő a szalmazsákok beszerzési költsége.
3. A sátrak beszerzési költsége és a sátrak száma egyenesen arányos.
4. A szalmazsákok beszerzési költsége és a résztvevők száma nem egyenesen arányos.
5. A sátrak száma és a résztvevők száma egyenesen arányos.
6. A résztvevők száma és az egy főre jutó útiköltség nem egyenesen arányos.
7. Ha elosztjuk a sátrak beszerzési költségét a hozzá tartozó sátrak számával, mindig ugyanazt a számot kapjuk.
8. Ha elosztjuk a szalmazsákok beszerzési költségét a hozzátartozó résztvevők számával, mindig ugyanazt a számot kapjuk.
9. Ha elosztjuk a résztvevők számát az egy főre jutó utazási költséggel, mindig ugyanazt a számot kapjuk.
10. Ha megszorozzuk a résztvevők számát a hozzátartozó egy főre jutó utazási költséggel, mindig ugyanazt a számot kapjuk.

Beszéljük meg a feladatlap helyes kitöltését. Majd térjünk ki arra, hogy a résztvevők száma és az egy főre jutó utazási költség fordítottan arányosak.

Itt tisztázzuk a **fordított arányosság** fogalmát :

Ha két mennyiség között olyan kapcsolat van, hogy **ahányszorosára** változik az egyik mennyiség, **annyiad részére** változik a másik mennyiség, akkor a két mennyiség fordítottan arányos egymással.
Azt is mondhatjuk, hogy ha két mennyiség között olyan a kapcsolat, hogy a szorzatuk állandó, akkor a két mennyiség fordítottan arányos. Ez az állandó 0 nem lehet.

A fordított arányosság alkalmazása

Folytassuk a költségvetést! A kidolgozáskor alkalmazzuk a fordított arányosság fogalmát! Dolgoztassuk ki a 6. feladatlapot!

6. feladatlap

Folytassátok a költségvetést!

A tábor helye téglalap alakú, területe 1200 m^2. A lakósátrakon kívül szükség van egy konyhasátorra, egy ebédlősátorra, és egy tárolósátorra. Ezek összterülete 200 m^2. A lakósátrak 480 m^2-nyi területre helyezhetők el. Egy sátor alapterülete 20 m^2. Foglaljátok táblázatba, ha változtatjuk a sátrak számát, hogyan változik a sátrakkal elfoglalt terület nagysága!

Sátrak száma	3	6	9	11	17
Sátrak által elfoglalt terület nagysága					

Állapítsátok meg azt is, hogy maximum hány sátor helyezhető el az adott területen!

Ábrázoljátok grafikonon az összetartozó mennyiségeket!

Keressétek meg, milyen arány van a sátrak száma és az elfoglalt terület nagysága között!

A grafikont ragasszátok fel a plakátra!

Megoldás:

Sátrak száma	3	6	9	11	17
Sátrak által elfoglalt terület nagysága	60 m^2	120 m^2	180 m^2	220 m^2	340 m^2

Beszéljük meg a megoldásokat! Ezután dolgoztassuk ki a 7. feladatlapot!

7. feladatlap

A tábor szervezői azt szeretnék, hogy a sátorban ne csak a szalmazsákok férjenek el, hanem legyen benne szabad terület is. Nagyobb alapterületű sátrakra volna szükség! A költségvetést készítőkhöz azzal a kéréssel fordulnak a szervezők, hogy határozzák meg a sátrak lehetséges alapterületét úgy, hogy a rét 480 m^2-nyi területére kerülhetnek a lakósátrak. Szorosan egymás mellé, minden m^2 területet felhasználva helyezik el a sátrakat. A sátor által elfoglalt területbe vegyük bele a sátor és a körülötte lévő árok alapterületét is. Foglaljátok táblázatba, hogy a sátrak számának növekedésével hogyan változik az adott területen elhelyezhető sátrak

alapterülete (technikai kérdésekkel – megépíthető-e az adott nagyságú sátor – ne foglalkozzunk)!

Sátrak száma	3	6	9	11	17
Egy sátor által elfoglalt terület					

Állapítsátok meg, hogy egyenes vagy fordított arányosság van az adott területre elhelyezhető sátrak alapterülete és a sátrak száma között! Készítsétek el a grafikont is!

Megoldás:

Sátrak száma	3	6	9	11	17
Egy sátor által elfoglalt terület	160 m^2	80 m^2	$\frac{160}{3}$ m^2	$\frac{480}{11}$ m^2	$\frac{480}{17}$ m^2

A költségvetés véglegesítése, elkészítése

A csoportok fejezzék be a költségvetés készítését, és alakítsák ki a poszterek végleges formáját. További tanulmányozásra rakják ki a falra! Szavazással válasszák ki a legjobban sikerülteket!
Pozitív értékelési attitűddel beszéljük meg, melyik plakátnak mi a pozitívuma.

Gyakorlás

Kidolgoztatjuk a 8. feladatlapot. A gyerekek gyakorolják az új fogalmakat és használatukat. Párban dolgoznak, eredményeiket egyeztetik a csoport másik párjával. Az első négy feladat megoldása után a csoportok egyeztetik eredményeiket.

8. Feladatlap

1. Hasonlítsd össze a következő arányos mennyiségeket!

Megoldás:

	Egyenesen arányos mennyiségek	Fordítottan arányos mennyiségek
Ha az egyik mennyiséget a kétszeresére növelem, hogyan változik a másik?	kétszeresére nő	felére csökken
Ha az egyik mennyiséget a háromszorosára növelem, hogyan változik a másik?	háromszorosára nő	harmadára csökken

Ha az egyik mennyiséget a felére csökkentem, hogyan változik a másik?	felére csökken	kétszeresére nő
Ha az egyik mennyiséget harmadára csökkentem, hogyan változik a másik?	harmadára csökken	háromszorosára nő
Példa		
Mit tudunk az összetartozó értékpárokról?	hányadosuk állandó	szorzatuk állandó (0-tól különböző)
Milyen a grafikonja?	Egyenes	nem egyenes

2. Válogasd ki az alábbi mennyiségpárok közül azokat, amelyek egyenesen arányosak egymással!
   a) Egyenletesen haladó gyalogos által *megtett út* és az *eltelt idő*.
   b) *Négyzet* oldala és *kerülete*.
   c) *Négyzet* oldala és *területe*.
   d) Egyenletesen vetett *búzaföld területe* és a learatott *búza mennyisége*.
   e) Az üzletben vásárolt tej *mennyisége és ára.*
   f) Azonos névértékű „Patex” kötvények *száma és hozama.*
   g) 60 m^2 területű *téglalap alakú kert szomszédos oldalai.*

Írd ide az egyenesen arányos mennyiségek betűjelét:

Megoldás: a), b), d), e), f).

3. Azonos teljesítményű kőműveseket keresnek egy 400 m^2 alapterületű 3 emeletes ház falainak felhúzásához. Az építtetők tapasztalataiból tudják, hogy ha 2 kőműves dolgozna, akkor a falak 120 óra alatt lennének készen. Mennyi idő alatt készülne el a ház fala, ha növelnéd a kőművesek számát? Készíts tervet!

Megoldás:

Kőműves	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Idő	120	80	60	48	40	34,28	30	26,67	24

12	15	20	30	40	50	120	180	240	
20	16	12	8	6	4,8	2	1,33	1	

(A vállalkozónak azon is el kell gondolkoznia, hány kőművest érdemes alkalmazni.)
Írd le az összetartozó értékpárokra vonatkozó összefüggést!

Megoldás: Szorzatuk állandó: 240.

4. A Citroen C3 150 km-en 9 liter benzint fogyaszt. Mennyit fogyaszt egy 375 km-es úton? Mennyibe kerül ez a benzinmennyiség, ha tízharmad liter 800 Ft-ba kerül?

Megoldás: Ha 150 km-en 9 l-t fogyaszt, akkor 100 km-en 6 l-t, tehát 375 km-en 3,75 · 6 l-t, azaz 22,5 l-t. Mivel 22,5 a tízharmadnak 6,75-szorosa, ezért ez 5400 Ft-ba kerül.

5. Öten elhatározták, hogy reggelente tejet és péksüteményt szállítanak a környék lakóinak. Lemérték, hogy mindez 2 óra és 20 percig tart. Mivel 7 órára végezni kell a szállítással, nagyon korán kell kezdeniük. Segítségül hívják három társukat. Mennyi időt vesz igénybe így a szállítás?
És ha 11-en lennének?
És ha 3-an lennének?

Megoldás:

Ha öten elvégzik 2 óra 20 perc azaz 2,33 óra alatt, akkor egyedül 5 · 2,33 azaz 11,65 óra alatt.
Nyolcan 11,65 : 8 = 1,45 óra alatt végzik el.
Tizenegyen 11,65 : 11 = 1,06 óra, hárman 11,65 : 3 = 3,88 óra alatt.

Feladatgyűjtemény

A Feladatgyűjtemény összes feladatának feldolgozása nem fér bele a 3 tanórás modulrészbe, szükség és érdeklődés szerint további órákon lehet válogatni belőlük.

1. A tábor mellett álló házban élő Szépítő család ki szeretné festetni a lakását. A szomszédban a múlt héten festették ki a kisebbik szobát 45000 Ft-ért. A szoba falának a területe 30 m^2. Mennyiért festené ki ugyanaz a mester Szépítőék lakását, ahol a falak összterülete 180 m^2?

Megoldás: Ha 30 m^2-t 45000 Ft-ért festenek ki, akkor 180 m^2-t $6 \cdot 45000 = 270000$ Ft-ért festenek ki.

2. A táborozók elvállalták, hogy a hétvégén kitakarítják a tábort. Előzetesen csak hárman jelentkeztek. A három gyerek el volt keseredve, féltek, hogy így nagyon későn fognak végezni. Szerencsére a takarítás reggelén 8-an jelentek meg, így két óra alatt elvégezték a munkát. Hány óráig tartott volna a takarítás, ha csak 3-an dolgoztak volna?

Megoldás: Ha 8-an két óra alatt takarítanak ki, akkor egy gyerek 16 óra alatt végezne, tehát 3 gyerek $16 : 3 = 5{,}33$ óra alatt végez.

3. A tábor mellett egy strand van. Az egyik medencét három csap 2 óra alatt tölti fel vízzel. Hány óra alatt töltené fel ugyanezt a medencét 5 csap?

Megoldás: Ha 3 csap két óra alatt tölti fel, akkor egy csap hat óra alatt, és 5 csap $6 : 5 = 1{,}2$ óra alatt tölti fel a medencét.

4. Egy 20 m^2 alapterületű 2,6 m magas lakás fűtése hetente 3120 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetni egy 86 m^2 alapterületi 3,5 m magas lakás fűtéséért ugyanennyi idő alatt (a fűtési díjat légköbméterenként számolják)?

Megoldás: $20 \cdot 2{,}6 = 52$ m^3-res lakás fűtéséért 3120 Ft-ot fizetünk, így 1 m^3-ért 60 Ft-ot, és $86 \cdot 3{,}6 = 309{,}6$ m^3-ért 18576 Ft-ot fizetünk.

5. A tábor környékén biciklit lehet bérelni. Biciklis apa fiával 1,5 km utat tesz meg. Az apa kerékpárjának a kereke 25 cm sugarú, a fiáé 10 cm. Számold ki a gyerekkerékpár és a felnőttkerékpár fordulatszámának az arányát! Hány százalékkal fordul többet a gyerek kerékpárjának kereke az apáénál?

Megoldás: Az apa kerekének kerülete 157 cm, ezen az úton 955,4-szer fordul, a fiáé 62,8 cm, és 2388,5-ször fordul. A fordulatszámok aránya 2388,5 : 955,4 = 2,5.
A gyerek kereke 150%-kal fordul többet.

6. Szilvi 3 gombóc fagylaltért 280 Ft-ot fizetett. Mennyit fizetne egy 5 gombócos fagylaltért, ha a tölcsér 10 Ft-ba kerül?

Megoldás: A három gombóc fagylalt 270 Ft-ba, így egy gombóc 90 Ft-ba, öt gombóc 450 Ft-ba kerül. Tehát Szilvi 460 Ft-ot fizetne.

7. A társasházakban a lakások alapterülete alapján állapítják meg, hogy mennyi közös költséget kell fizetni. Kissék lakása 80 m^2, Nagyéké 120 m^2. Kissék havi közös költsége 8300 Ft. Mennyit kell fizetnie Nagyéknak? Állapítsd meg a két lakás alapterületének arányát!

Megoldás: A két lakás alapterületének aránya 2 : 3, így a közös költség aránya is 2 : 3, tehát 2 : 3 = 8300 : x, ahonnan $2x = 24900$, $x = 12450$ Ft, tehát Nagyék közös költsége 12450 Ft.

8. A Ganz Egál Rt. 5 db 10000 Ft-os részvénye 9000 Ft osztalékot fizet. Mennyit fizet 13 db ugyanilyen névértékű részvényre?

Megoldás:
Egy darab részvény 9000 : 5 = 1800 Ft-ot, 13 db 23400 osztalékot fizet.

9. Szépalmán (a Bakonyban) a kastély istállójában 5 ló él. A lovak napi 15 kg abrakot esznek. Hány kg abrakot enne 9 ló egy nap alatt? (feltéve, hogy minden ló naponta ugyannyit eszik). A lovász 450 kg abrakot vásárolt. Hány napra lenne elég ez a mennyiség, ha nyolc ló élne az istállóban? Hány lovat lehetne etetni 4 napon át ennyi abrakból?

Megoldás: Ha öt ló 15 kg abrakot eszik, akkor egy ló 3 kg-mot, így 9 ló 27 kg-mot. A nyolc ló naponta 24 kg abrakot enne, tehát a 450 kg kb. 18 napra lenne elég. Ha egy ló naponta 3 kg-ot enne, akkor ennyi abrakkal egy napon át körülbelül 37 lovat táplálhatnának.

II. Százalékszámítás

Módszertani megjegyzés: A százalékszámítást gyakoroltassuk fejben is! Célszerű, hogy először számoltassunk arányt (pl. olyan törtrészt, ami fejben átváltható 100-adrészre: negyedek, ötödök, kettedek, azután a 12-nek 1/4 , 1/3, 7/3 stb. része), majd százalékba átváltást (adott számnak hány százaléka egy bizonyos szám, illetve hogy ha pl. a 30% 75, akkor mennyi 50%, 60%, 100%, stb.). Fontos, hogy a gyerekek megértsék, a százalékokban kifejezett értékekkel ugyanúgy számolhatnak, mintha magukkal a számokkal számolnának.

Alakítsunk 4 fős csoportokat. Minden csoportban legyen egy *A*, *B*, *C*, *D* jelű tanuló. Az első kérdésre az *A* jelű tanulók válaszolhatnak. A válaszadónak indokolni is kell a választ. Az a csapat kap 1 pontot, aki először mondja a helyes választ az indoklással.

Például: 1200 Ft 4 %-a 48Ft, mert 1200 Ft 1 %-a 12 Ft, 4 %-a 4 · 12 = 48 Ft.

Több feladatot közlünk, hogy a tanulók felkészültségéhez alkalmazkodva tudjunk a feladatokból válogatni.

Számold ki fejben a következőket!

a) 1200 Ft 4 %-a, b) 30 kg 5%-a, c) 24 liter 25%-a,

d) 12 fő $33,\dot{3}$ %-a, e) 400 Ft 75%-a, f) 400 Ft 125 %-a,

g) 300 méter 15 %-a, h) 5 torta negyed része, i) 20 könyv 250%-a

Megoldás:

a) 48Ft; b) 1,5 kg; c) 6 liter;

d) 4 fő; e) 300 Ft; f) 500 Ft;

g) 45 m; h) 1,25 torta; i) 50 könyv.

Az előzőekben, (3.modul: Arány, arányosság 4. feladatlap 4.10. feladat) számok századrészét számoltuk ki.

A századrész kiszámítására a gyakorlatban gyakran kerül sor. Külön nevet is kapott.

A századrész másik neve százalék, és ezt így jelöljük: %.

a) 200-nak az $\frac{1}{100}$ része, másként az 1%-a 2;

b) 500-nak a $\frac{3}{100}$ része, másként 3%-a, 5·3 = 15;

c) 50-nek a $\frac{7}{100}$ része, azaz 7%-a 3,5;

d) 82-nek a $\frac{16}{100}$ része, 16%-a 13,12;.

e) 30-nak $\frac{200}{100}$ része, 200%-a 60;

f) 139-nek a $\frac{120}{100}$ része, 120%-a 166,8.

Mintapélda$_1$

Számítsuk ki a következő számok adott százalékát!

a) 100-nak a 20%-a; b) 140-nek az 50%-a; c) 84-nek a 25%-a;
d) 30-nak a 10%-a; e) 60-nek a 90%-a; f) 59-nek a 200%-a,
g) 20-nak a 150%-a, h) 11-nek a 300%-a.

Megoldás:

A feladatban megadott százalékok 100-nak osztói, illetve többszörösei.
20% a 100-nak ötödrésze, 50% a fele, 25 % a negyedrésze, 200% a kétszerese.

Ezeket a százalékokat fejben is azonnal ki tudjuk számolni:

a) 100-nak a 20%-a; az ötödrésze: 20;
b) 140-nek az 50%-a; a fele: 70;
c) 84-nek a 25%-a negyedrésze :21;
d) 30-nak a 10%-a; a tizedrésze: 3;
e) 60-nek a 90%-a; a tizedrészének 9-szerese: $6 \cdot 9 = 53$;
f) 59-nek a 200%-a, a kétszerese: 118;
g) 20-nak a 150%-a másfélszerese: $20 \cdot 1{,}5 = 300$.

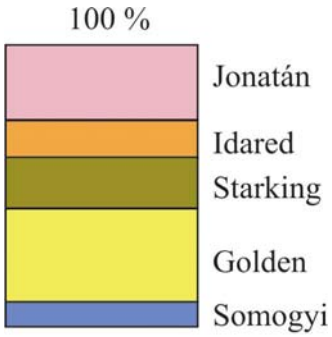
Százalékszámítás a hétköznapi életben

Mintapélda$_2$

Becsüljük meg a sávdiagramról, hogy hány kg a tömege az egyes almafajtáknak és ez hány százaléka az egésznek, ha összesen 60 kg alma tömegét ábrázolták! Az egyes részek arányát méréssel állapítsuk meg! Készítsünk táblázatot!

Megoldás:

Százalék	Tömeg (kg)	Fajta
20%	12	Jonatán
10%	6	Idared
13,3%	8	Starking
25%	15	Golden
6,7%	4	Somogyi

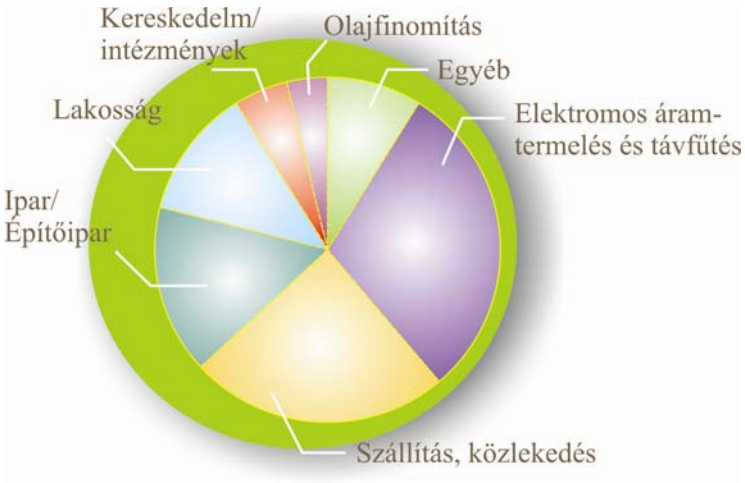


Adjunk fejben kiszámolható feladatokat a százalékláb kiszámítására!
Például:
Számold ki fejben, hány százaléka

a) 7-nek a 70, b) 70-nek a 7, c) 15-nek a 35,
d) 50-nek a 20, e) 16-nak a 4, f) 1000-nek a 10?

Megoldás:

a) 1000%; b) 10%; c) 233,3%;
d) 40%; e) 25%; f) 1%.



Mintapélda$_3$

Módszertani megjegyzés: A feladatot itemenként oldassuk meg. A táblázat egy-egy oszlopa legyen egy-egy item. Minden helyesen kitöltött cella 1-1 pontot ér.

Az alábbi kördiagram az európai CO_2 kibocsátást mutatja iparáganként.

a) Méréssel állapítsuk meg az egyes tételekhez tartozó körcikkek szögét!

b) Az egyes iparágak hány százalékban felelősek a CO_2 kibocsátásáért?

c) Írjuk le racionális számokkal az egyes iparágak CO_2 kibocsátásának arányát a lakossági kibocsátáshoz képest! (Kerekítsünk!)

Megoldás:

a) 108°; 86°; 58°; 43°; 18°; 14°; 32°.

b) 30%; 24%; 16%; 12%; 5%; 4%; 9%.

c) A lakosság 12%, ehhez képest az egyes iparágak aránya: áramtermelés $\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$, közlekedés $\frac{24}{12}=2$, ipar $\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$, kereskedelem $\frac{5}{12}$, olajfinomítás $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, egyéb $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

Számold ki fejben a következőket! Melyik az a szám, amelyiknek

a) 15 %-a 30, b) 150%-a 30, c) 33,3 %-a 12,

d) 16 %-a 32, e) $\frac{4}{5}$ része 36, f) $\frac{3}{2}$ része 30?

Megoldás:

a) 200; b) 20; c) 36;
d) 200; e) 45; f) 20.

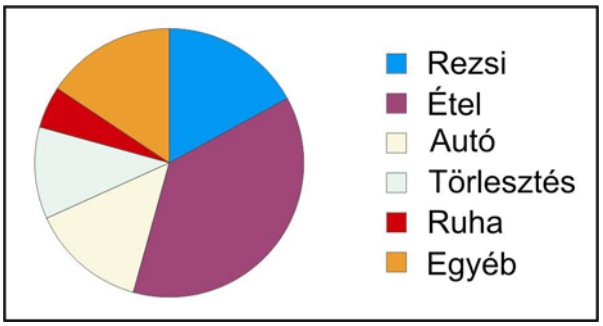
Mintapélda$_4$

Az alábbi táblázat egy család havi költségvetését mutatja. Számoljuk ki, hogy a fizetésüknek hány százalékát költik az egyes ráfordításokra, és készítsünk kördiagramot az egyes tételekből.
A kördiagramon a körcikkek arányokat (százalékokat) jeleznek, amihez szükség van a középponti szögek nagyságára.

Tétel	Rezsi	Étel	Autó	Törlesztés	Ruha	Egyéb
Költség (Ft)	42300	89800	35200	26800	12600	38700
Százalék						
Szög						

Megoldás:

Százalék	17,24	36,59	14,34	10,92	5,13	15,77
Szög [°]	62,06	131,72	51,62	39,31	18,47	56,77



A százalék jelentése, kiszámítási módjai

A százalékszámítás speciális törtrész számítás:

$$\begin{cases} 1\% = \dfrac{1}{100}\text{rész} \\ p\% = \dfrac{p}{100}\text{rész} \\ 100\% = \dfrac{100}{100}\text{rész} \end{cases}$$

1. **Százalékérték meghatározásakor** adott mennyiség valahány század részét számoljuk.

Például mennyi 80 Ft 25%-a? $\rightarrow$ $80 \cdot \frac{25}{100} = 80 \cdot 0{,}25 = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20$ (Ft)

2. Az alap meghatározásakor a törtrész ismeretéből az egész rész számítása:

Például hány forint 25%-a 20 Ft? $\rightarrow$ $x \cdot \frac{25}{100} = x \cdot 0{,}25 = 20$ vagy $x \cdot \frac{1}{4} = 20 \Rightarrow x = 80$ (Ft)

3. A százalékláb a százalékérték és az alap arányát mutatja: $p\% = \frac{p}{100}$.

Például 80 Ft-nak a 20 Ft hány százaléka (hány századrésze)?

$\frac{20\text{ Ft}}{80\text{ Ft}} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\% \Rightarrow$ 20 Ft a 80 Ft-nak 25%-a.

A százaléknál kisebb arányt, egy mennyiség ezredrészét fejezi ki az **ezrelék** (jele: ‰). A százalékhoz hasonlóan értelmezzük és használjuk.

Mintapélda$_5$

Ha az ÁFA (általános forgalmi adó) a termék nettó árának 25 %-a, a boltban a termékért a bruttó árat kell kifizetni (bruttó ár = nettó ár + ÁFA). Hány százalékát kell levonni a bruttó árnak, ha a nettó árra vagyunk kíváncsiak?

Sokan úgy gondolják, hogy 25 %-ot. Vizsgáljuk meg egy példán keresztül, miért téves ez a nézet!

Mennyi a termék nettó ára, ha 1200 Ft-ot fizettünk érte? Hány százaléka a nettó ár a bruttó árnak?

Megoldás:

Mivel a bruttó ár 1,25-szerese a nettó árnak, az 1200 Ft-ot el kell osztani 1,25-tel. A kapott nettó ár 960 Ft. Ez az 1200 Ft-nak $\frac{960}{1200} \cdot 100 = 0{,}8$-szorosa, vagyis 80 %-a.
Tehát a bruttó árnak a 20%-a az ÁFA.

Tekintsük a következőt:

nettó ár		80 Ft
+25 % ÁFA	20 Ft	
bruttó ár		100 Ft

Az ÁFA 20 Ft, ez a 100 Ft-nak, a bruttó árnak a **20 %-** a.

Azt kaptuk, hogy ha valahány százalékkal megnöveltük egy mennyiségnek az értékét, akkor az eredeti érték visszaállításához nem ugyanannyi százalékkal kell csökkenteni a megnövelt értéket.

Mintapélda$_6$

Egy kereskedő kétféle árucikket vásárolt: inget kétszer annyiért, mint pólót. Az ingeken 15%-ot, a pólókon 20%-ot keresett, így a nyeresége 100-100 darab eladása után 31500 Ft. Mennyiért vásárolta, és mennyiért adta el a termékeket? Hány százalék az összes nyeresége?

Megoldás:

A póló ára x, az ing ára $2x$, a nyereség 1 pár (azaz 1 ing és 1 póló) után $0{,}2x + 0{,}15 \cdot 2x = 0{,}5x$. Egy pár után a nyereség 31500/100 = 315 Ft, vagyis $0{,}5x = 315$. A termékek ára így 630 és 1260 Ft. 100 pár terméket $100 \cdot (630 + 1260) = 189000$ Ft-ért vásárolt, aminek a 31500 Ft a 16,67 %-a.

Feladatok

1. Egy biciklis 24 km/h sebességgel halad, összesen 120 km utat kell megtennie. Az út hány százalékát teszi meg 45 perc, 1 óra, másfél óra, 2 óra, 200 perc alatt? (Készíts táblázatot!)

Megoldás:

idő	45 perc	1 óra	1,5 óra	2 óra	200 perc
Megtett út (km)	$\frac{45}{60}\cdot 24 = 18$	24	36	48	80
Megtett út (százalék)	$\frac{18}{120} = 0{,}15 \Rightarrow 15\%$	20%	30%	40%	66,7%

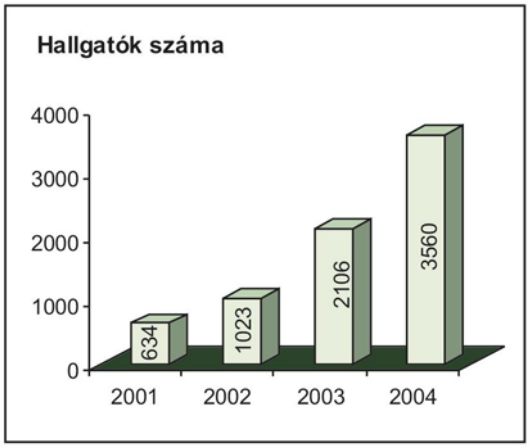
2. Ödön nagymamája aszalt szilvát készít. 3,5 kg szilvából 105 dkg marad a folyamat végére, mert az eredeti szilva tömegének jelentős része elpárolog a vízzel. Hány százalék a súlyveszteség?

Megoldás: 70%.

3. A mellékelt grafikon a TurboEdu Kft. tanfolyamain részt vevő hallgatók számát mutatja, éves felbontásban.

a) Határozd meg, hány százalékkal növekedett a hallgatók száma az egyes években az előző évihez képest!

b) Az utolsó évi növekedést feltételezve mennyi hallgatóra számítson a vezetőség 2005-ben?



Megoldás: a) 61,36%, 105,87%, 69,04%; b) 6018 fő.

4. Zedországban az emberek éves keresetük után a következőképpen adóznak:

ha az éves kereset nem éri el az 500 zedet, 20% az adó;

ha a kereset 500 és 1000 zed között van, akkor 100 zed és a kereset 500 zedet meghaladó részének 30%-a az adó;

ha a kereset 1000 zed felett van, akkor 250 zed és az 1000-zedet meghaladó részének 40%-a az adó.

a) Hány zed az éves adója annak, akinek az éves keresete 2500 zed?

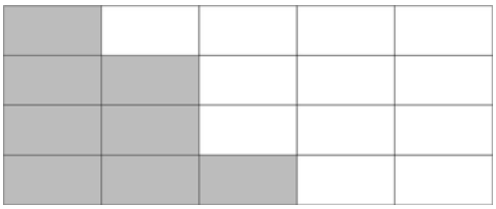
b) Mennyi az éves keresete annak, akinek 112 zed az adója?

Megoldás: a) 850; b) 540.

5. Az alábbi elektronikus kijelző egy parkolóház bejárata fölött látható. Az olvasható le róla, hogy a parkolóhelyek hányadrésze szabad. A szürke rész jelenti a foglalt parkolóhelyeket.

Hány százaléka SZABAD a parkolónak? Válaszd ki a megoldást!

a)



A) 80%-a B) 70%-a C) 60%-a D) 50%-a

b) Hány autó áll a garázsban, ha 80 férőhelyes a parkoló? Válaszd ki a megoldást!

A) 24 B) 32 C) 48 D) 56 .

Megoldás: C), B).

6. Fantáziaföld kormánya egy kormányzati ciklus alatt 360 km autópálya építésére vállalt kötelezettséget, és a megbízást két építő cég kapta. Mivel időközben kiderült, hogy az adókból több pénz folyt be, ezért további megbízást kaptak a cégek: az egyik az eredeti távolság 112%-át, a másik pedig a 110%-át építette meg, így a kormány 40 km-rel több autópályát építtetett a tervezettnél. Mennyi úttal építettek többet az egyes cégek az eredeti tervhez képest?

Megoldás: 24 és 16 km-rel.

7. Egy tömblakásban élő család átalánydíjat fizet az elfogyasztott víz után. Az átalányt úgy állapítják meg, hogy a ház összes vízfogyasztását elosztják a lakók számával. A család szerint túl sok vízdíjat számolnak nekik, ők csak a 80%-át fogyasztják el a rájuk kirótt 26 m^3-nek. Úgy döntenek, hogy beszereltetnek egy 14000 talléros vízórát a lakásukba. Mennyi idő alatt térül meg a befektetés, ha valóban csak a 80%-át használják el a kirótt vízmennyiségnek, és 1 m^3 víz ára 212 tallér?

Megoldás: 13 (12,7) hónap alatt.

8. Gárdonyi Géza: Egri csillagok című regénye 525 oldal. István 4 hét alatt szeretné kiolvasni a könyvet, ezért naponta elolvas 12 oldalt. Egy hét után rájön, hogy nem fog végezni. Hány százalékkal kell a naponta elolvasott oldalak számát növelnie, hogy időre végezzen?

Megoldás: 75%-kal.

9. Egy kereskedő a termékét úgy tudta eladni, hogy az eredetileg tervezett árból előbb 8%-ot, majd ebből még 10%-ot engedett. Az így kialakult ár 2070 Ft. Mennyi volt az eredeti ár?

Megoldás: 2500 Ft.

10. A boltokban kiskereskedők árulják a cikkeket, amiket nagykereskedőktől, általában raktáráruházakból vásárolnak. A raktárak a termelőktől szerzik be az árut. Mennyi lesz annak a ruhának az ára, amelynek a termelői ára 946 Ft, a nagykereskedelmi haszonkulcsa (a nagykereskedő haszna) 4%, a kiskereskedelmi haszonkulcsa (a kiskereskedő haszna) pedig 8,5%?

Megoldás: 1067 Ft.

11. Egy kávéfőző fogyasztói ára 3250 Ft, a nagykereskedelmi árrés 336 Ft, a kiskereskedelmi haszonkulcs 14%. Mennyi a kávéfőző termelői ára?

Megoldás: 2515 Ft.

12. Tegnap vettem egy biciklit 10500 Ft-ért, ma továbbadtam 12000 Ft-ért. Hány százalékos a hasznom? Ha 10000 Ft-ért adtam volna el, hány százalék lenne a veszteségem?

Megoldás: 14,28%; 4,76%.

Mintapélda7

A tengervíz sótartalma 5%. Mennyi édesvizet kell 200 liter tengervízhez önteni, hogy a keverék sótartalma 2% legyen?

Megoldás:

A **keveréses feladatoknál** mindig **az oldott anyag mennyisége** az, amire alapozzuk a számítást. Az oldott anyag mennyisége ugyanis a keverékben egyenlő az összekevert anyagokban lévő oldott anyagok összegével. Jelen esetben 200 · 0,05 = 10 liter a só, és ez a keverés után is ugyanennyi marad.

Ha 10 liter 2 %, akkor a 100% $\frac{10}{2} \cdot 100 = 500$ liter. A különbség tehát 300 liter.

13. 2 kg 25%-os sóoldatból mennyi vizet kell elpárologtatni, hogy 32%-os oldatot kapjunk?

Megoldás: 0,4375 kg-ot.

14. Mennyi 42%-os kénsavat kell önteni 2,6 liter 20%-os koncentrációjúhoz, hogy az eredmény 30%-os koncentrációjú kénsav legyen?

Megoldás: 2,17 litert.

Ellenőrző feladatok

Módszertani megjegyzés: A most következő feladatokat az utolsó óra végén, összefoglalásként, egyéni munkához adhatjuk fel: segít a tanulók értékelésében. Az ellenőrzést párban végezzék.

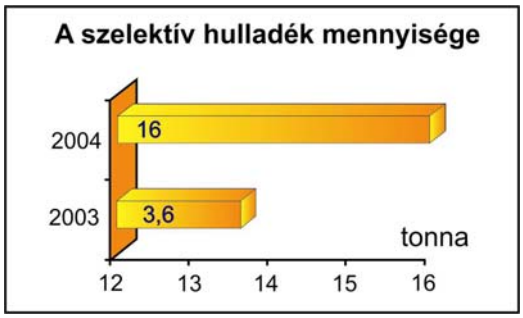
15. Ha az osztályban a tanulók $\frac{4}{5}$ része lány, és 6 fiú van az osztályban, akkor mennyi az osztálylétszám?

Megoldás: 30.

16. 8 darab dinnye tömege 24 kg. Milyen nehéz 15 dinnye?

Megoldás: 45 kg.

17. A grafikon a szelektív hulladék mennyiségének éves eloszlását mutatja. Hány százalékkal nőtt 2004-re a gyűjtött mennyiség? Mi a véleményed erről a grafikonról?



Megoldás: 17,6%-kal. A grafikon hamisan mutatja az arányokat, mert nem 0-tól indul!

18. A 16 km-re levő, dobozos üdítőket gyártó gyár mintaboltjában egy literes doboz ára 126 Ft, a közeli boltban 20%-kal több. Hány doboz üdítőért éri meg elmenni a mintaboltba, ha egy km út költsége 21 Ft?

Megoldás: 27 db-tól.

19. Fekete Péter 1,3 millió forintot szeretne befektetni évi 7,65%-ot ígérő biztos állami, és 18,5%-ot ígérő rizikós részvénypiaci pénzügyi papírokba.

Mennyit kamatozik a pénze év végére, ha 550 000 Ft-ot fektet be állami értékpapírokba, a maradékot részvényekre?

Megoldás: 13,9%-ot.