

## I. Az abszolútérték-függvény

*Feldolgozási javaslat:* A tanár először elmondja a lenti definíciókat, majd minden csoportban kiosztja a **8.1 szakértői mozaikot**. A tanulók felosztják egymás között a négy anyagrészt. Elolvassák és értelmezik. Majd mindenki elmagyarázza a csoport többi tagjának a saját részét.

Pozitív szám **abszolútértéke** maga a szám, negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje, ami pozitív szám.  $|0|=0$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

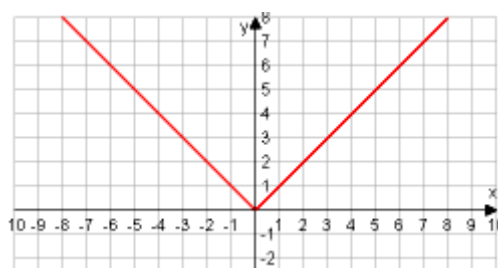
Ez szemléletesen azt mutatja meg, hogy a szám milyen messze van a 0-tól a számegyenesen.

Legyen  $x$  tetszőleges valós szám. Ekkor az **abszolútérték-függvény:**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

### Az abszolútérték-függvény ( $f(x) = |x|$ ) tulajdonságai

|        |     |       |    |    |                |    |       |   |   |               |   |   |       |
|--------|-----|-------|----|----|----------------|----|-------|---|---|---------------|---|---|-------|
| $x$    | -53 | -10,5 | -5 | -4 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | -0,63 | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 2 | 3 | 11,36 |
| $f(x)$ | 53  | 10,5  | 5  | 4  | $\frac{3}{2}$  | 1  | 0,63  | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 2 | 3 | 11,36 |



Ha  $x < 0$ , akkor növekvő  $x$  értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Azt mondjuk, hogy a függvény ezen a tartományon **szigorúan (monoton) csökkenő**.

Ha  $x \geq 0$ , akkor növekvő  $x$  értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvény ezen a tartományon **szigorúan (monoton) növekvő**.

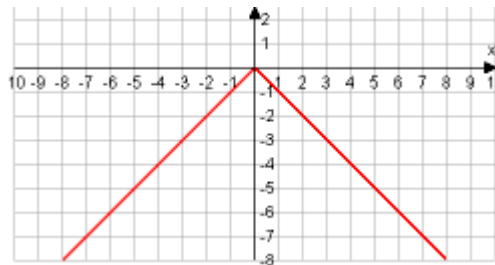
*Megjegyzés:* Elegendő lehet, ha csökkenőnek és növekvőnek nevezzük a megfelelő függvényrészeket.

Az  $f(x) = |x|$  függvény értéke az  $x = 0$  helyen 0. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ebben a pontban van közös pontja az  $x$  tengellyel.

Az  $f(x) = |x|$  függvény értelmezési tartományának  $x = 0$  helyén veszi fel a **legkisebb** függvényértékét, ekkor  $|x| = 0$ .

A  $g(x) = -|x|$  függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív. (Látható, hogy a  $g$  függvény negatív  $x$ -ek esetén szigorúan monoton növekvő, pozitív  $x$ -ekre pedig szigorúan monoton csökkenő.)

Másképp: a függvény az értelmezési tartományának  $x = 0$  helyén veszi fel a **legnagyobb** értékét, ekkor a függvény értéke 0.



Megállapításainkat értéktáblázattal is alátámasztjuk:

|        |     |       |    |    |                |    |       |   |    |                |    |    |        |
|--------|-----|-------|----|----|----------------|----|-------|---|----|----------------|----|----|--------|
| $x$    | -53 | -10,5 | -5 | -4 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | -0,63 | 0 | 1  | $\frac{2}{3}$  | 2  | 3  | 11,36  |
| $f(x)$ | -53 | -10,5 | -5 | -4 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | -0,63 | 0 | -1 | $-\frac{2}{3}$ | -2 | -3 | -11,36 |

## Feladatok

Az 1., 2. feladatok megoldásánál figyelj arra, hogy a függvény egy adott függvényértéket 0, 1 vagy 2 helyen is felvehet. Számítás előtt próbáld megtippelni az adott függvényértékhez tartozó helyek számát! Számításodat grafikonon ellenőrizheted.



1. Adott hozzárendelési szabály alapján töltsd ki az értéktáblázatot!

a)  $f(x) = 3|x|$

|               |   |    |               |   |   |   |    |   |
|---------------|---|----|---------------|---|---|---|----|---|
| $x$           | 0 | -1 | $\frac{2}{3}$ |   |   |   |    |   |
| $f(x) = 3 x $ |   |    |               | 6 | 1 | 0 | -3 | 3 |

b)  $f(x) = -|x| + 4$

|                   |    |   |   |   |    |   |   |   |
|-------------------|----|---|---|---|----|---|---|---|
| $x$               | -2 | 0 | 4 |   |    |   |   |   |
| $f(x) = - x  + 4$ |    |   |   | 0 | -2 | 6 | 4 | 1 |

c)  $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

|                         |    |    |   |   |   |   |
|-------------------------|----|----|---|---|---|---|
| $x$                     | -2 |    | 0 | 1 |   | 4 |
| $f(x) = \frac{1}{2} x $ |    | -4 |   |   | 6 |   |

d)  $f(x) = 2|x| - 3$

|                   |    |    |   |   |     |
|-------------------|----|----|---|---|-----|
| $x$               |    | -6 |   | 0 | 1,5 |
| $f(x) = 2 x  - 3$ | -1 |    | 3 |   |     |

*Megoldás:*

a)  $f(x) = 3|x|$

|        |   |    |     |       |                             |   |    |       |
|--------|---|----|-----|-------|-----------------------------|---|----|-------|
| $x$    | 0 | -1 | 2/3 | 2; -2 | $\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$ | 0 | —  | 1; -1 |
| $f(x)$ | 0 | 3  | 2   | 6     | 1                           | 0 | -3 | 3     |

b)  $f(x) = -|x| + 4$

|        |    |   |   |       |       |   |   |       |
|--------|----|---|---|-------|-------|---|---|-------|
| $x$    | -2 | 0 | 4 | 4; -4 | 6; -6 | — | 0 | 3; -3 |
| $f(x)$ | 2  | 4 | 0 | 0     | -2    | 6 | 4 | 1     |

c)  $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

|                         |    |    |   |               |         |   |
|-------------------------|----|----|---|---------------|---------|---|
| $x$                     | -2 | —  | 0 | 1             | 12; -12 | 4 |
| $f(x) = \frac{1}{2} x $ | 1  | -4 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 6       | 2 |

d)  $f(x) = 2|x| - 3$

|                   |       |    |       |    |     |
|-------------------|-------|----|-------|----|-----|
| $x$               | 1; -1 | -6 | 3; -3 | 0  | 1,5 |
| $f(x) = 2 x  - 3$ | -1    | 9  | 3     | -3 | 0   |



**2.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

a)  $f(x) = 2|x|$ ;  $f(x) = 4|x|$ ;  $f(x) = \frac{1}{3}|x|$ . Mit tapasztalsz?

b)  $f(x) = |x|$ ;  $f(x) = |x| + 2$ ;  $f(x) = |x| - 3$ . Mit tapasztalsz?

**Megjegyzés:** További gyakorló feladatokat is adhat a tanár!



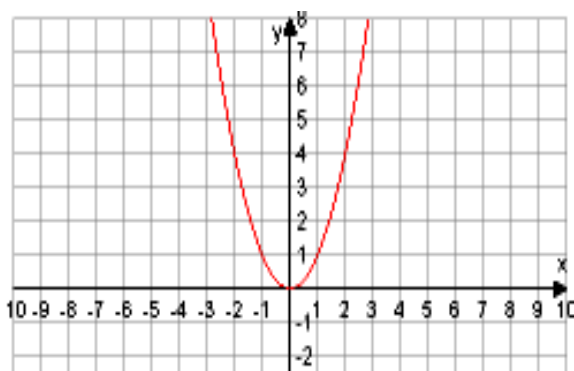
*Megoldás:*

|            |     |        |    |    |                |    |        |   |   |               |   |   |        |
|------------|-----|--------|----|----|----------------|----|--------|---|---|---------------|---|---|--------|
| $x$        | -16 | -10,5  | -5 | -4 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | -0,63  | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 2 | 3 | 11,3   |
| $f(x)=x^2$ | 256 | 110,25 | 25 | 16 | $\frac{9}{4}$  | 1  | 0,3969 | 0 | 1 | $\frac{4}{9}$ | 4 | 9 | 127,69 |

Ha minden valós számhoz hozzá rendeljük a négyzetét, akkor a hozzárendelési szabály  $f(x)=x^2$  alakban írható fel.

## A másodfokú függvény grafikonja

A táblázat alapján ábrázoljuk koordináta-rendszerben az  $f(x) = x^2$  függvényt, a függvény soha nem vesz fel negatív értékeket:



Ennek a görbének a neve **parabola**. Az ábrán látható, hogy a másodfokú függvény grafikonja szimmetrikus az  $y$  tengelyre. A parabola szimmetriatengelyén lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük

Másodfokú hozzárendelési utasítással találkozhatunk az  $a$  oldalú négyzet területének ill. az  $a$  oldalú kocka felszínének kiszámításakor, de a fizikában is használjuk a szabadesés és az egyenletesen gyorsuló test mozgását leíró út–idő kapcsolatnál.

Ha  $x < 0$ , akkor növekvő  $x$  értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Ezért a függvény ezen a tartományon szigorúan **csökkenő**.

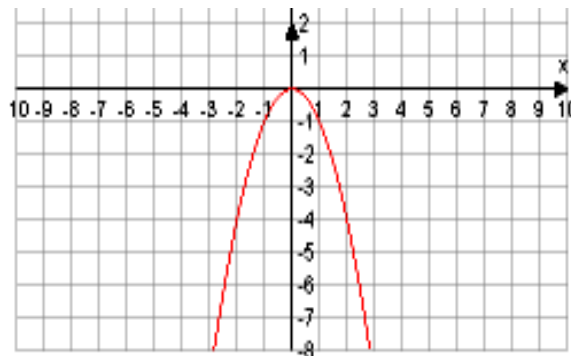
Ha  $x \geq 0$ , akkor növekvő  $x$  értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Így a függvényt ezen a tartományon szigorúan **növekvő**.

Az  $f(x) = x^2$  függvény értéke az  $x = 0$  helyen 0. Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a függvény grafikonjának ebben a pontban van közös pontja az  $x$  tengellyel.

Az  $f(x) = x^2$  függvény értelmezési tartományának  $x = 0$  helyén veszi fel a legkisebb függvényértékét, ekkor értéke 0.

Tekintsük a  $g(x) = -x^2$  függvényt! Adjunk meg táblázatban néhány értéket :

|        |      |         |     |     |                |    |         |   |    |                |    |    |         |
|--------|------|---------|-----|-----|----------------|----|---------|---|----|----------------|----|----|---------|
| $x$    | -16  | -10,5   | -5  | -4  | $-\frac{3}{2}$ | -1 | -0,63   | 0 | 1  | $\frac{2}{3}$  | 2  | 3  | 11,3    |
| $g(x)$ | -256 | -110,25 | -25 | -16 | $-\frac{9}{4}$ | -1 | -0,3969 | 0 | -1 | $-\frac{4}{9}$ | -4 | -9 | -127,69 |



A  $g$  függvény a 0 helyen a 0 értéket veszi fel, az összes többi helyen negatív.  
A  $g$  függvény az értelmezési tartományának  $x = 0$  pontjában veszi fel a legnagyobb értékét.

Azt szokták mondani, hogy a  $g$  függvénynek az  $x = 0$  helyen szélsőértéke, nevezetesen **maximuma** van. Látható, hogy a  $g$  függvény nempozitív  $x$ -ek esetén szigorúan növekvő, nemnegatív  $x$ -ekre pedig szigorúan monoton csökkenő.

 **3.** Készítsünk táblázatot és ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő függvényeket:


a)  $f(x) = x^2 + 3$ ,


b)  $f(x) = x^2 - 4$ .

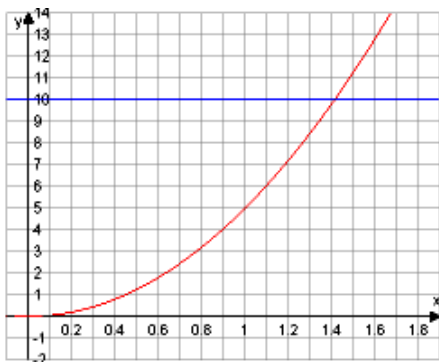
c)  $f(x) = 2x^2$ .

d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

e)  $f(x) = -2x^2 - 1$ .

 **4.** A fenti függvények közül melyeknek van legkisebb vagy legnagyobb értéke?  
Mely értékekre veszik fel a legnagyobb, vagy a legkisebb értéket, és mennyi ez?

 **5.** Egy műugró-bajnok 10 m magasból ugrik a vízbe. Hány másodperce van a gyakorlata végrehajtására, mielőtt beleesne a vízbe? ( $s = (g/2) \cdot t^2$ , ahol  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )



*Megoldás:*

Itt azokat az  $x$  helyeket kell kiszámolni, ahol a függvény felveszi a 10 értéket. A zárójelben megadott képlet alapján ki kell számolni,  $s = 10$  esetén  $t = ?$

Ezeket behelyettesítve kapjuk:

$$10 = \frac{9,81}{2} \cdot t^2$$

$$2,04 = t^2 \begin{cases} t_1 = \sqrt{2,04} \\ t_2 = -\sqrt{2,04} \end{cases} \text{ Mivel eltelt időről van szó, így a}$$

negatív érték nem megoldás. Tehát a műugrónak

kb. 1,43 másodperce van, hogy elvégezze a gyakorlatát.



**6.** Hányszorosára változik a négyzet területe, ha az oldalait másfélszeresére növeljük? Készíts értéktáblázatot és ábrázold grafikonon az oldalak változásának mértékét és a terület változását!

*Megoldás:*

A négyzet területe:  $T = a^2$ . Az oldalát 1,5-szörösére növelve a terület  $T = (1,5a)^2 = 2,25a^2$ -re nő, azaz  $1,5^2 = 2,25$ -szörösére változik. Általánosságban:  $T = (\lambda a)^2 = \lambda^2 a^2$ .



|           |      |   |      |   |      |
|-----------|------|---|------|---|------|
| $\lambda$ | 0,5  | 1 | 1,5  | 2 | 2,5  |
| $t$       | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 |

### III. A fordított arányosság mint függvény

Egy kertés házban  $24 \text{ m}^2$  területű konyhakertet szándékoznak kialakítani. Ez elég lenne, hogy a családot a legkedveltebb, otthon termesztett zöldségekkel ellássa. Azon tanakodnak, hogy hol legyen. Legyen keskeny, hosszú téglalap alakú, hátul a kerítés mellet, vagy esetleg legyen valamilyen más alakú téglalap. Nézzük meg, hogy ha a téglalap oldalát 1; 2; 3; 4; . . . 24 méter hosszúra választjuk, hány méteres lesz a másik oldala?

|                     |    |     |    |   |   |     |   |   |    |    |
|---------------------|----|-----|----|---|---|-----|---|---|----|----|
| egyik oldal ( $x$ ) | 1  | 1,5 | 2  | 3 | 4 | 5   | 6 | 8 | 12 | 24 |
| másik oldal ( $y$ ) | 24 | 16  | 12 | 8 | 6 | 4,8 | 4 | 3 | 2  | 1  |

Láthatjuk, hogy **ahányszorosára** növeljük az egyik oldalt, **annyiad részére** csökken a másik oldal.

Ha az elsőnek választott oldalhoz, amit  $x$ -szel jelöltünk, hozzárendeljük a másik oldalt, amit  $y$ -nal jelöltünk, akkor a következő függvényt kapjuk:

$$f(x) = \frac{24}{x}$$

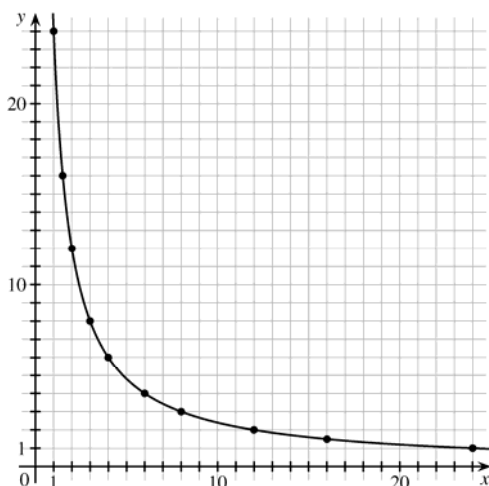
Ezt az összefüggést ismerjük: ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyiad részére változik a másik mennyiség. Ez az összefüggés a **fordított arányosság**.

Figyeljük meg:

$$1 \cdot 24 = 1,5 \cdot 16 = 2 \cdot 12 = \dots = 12 \cdot 2 = 24 \cdot 1 = 24.$$

A függvény összetartozó értékpárjainak szorzata állandó, ebben az esetben 24.

Ábrázoljuk a függvényt koordináta-rendszerben!



A téglalap oldalainak változását csak néhány esetben írtuk le, de például 1 és 24 m közt az oldalak hossza bármely valós számmal kifejezhető, tehát nyugodtan megrajzolhatjuk a grafikonunkat folytonos vonallal, mert bármely  $1 \leq x \leq 24$  értékhez tartozik egy olyan  $y$  érték, amellyel  $x \cdot y = 24$ .

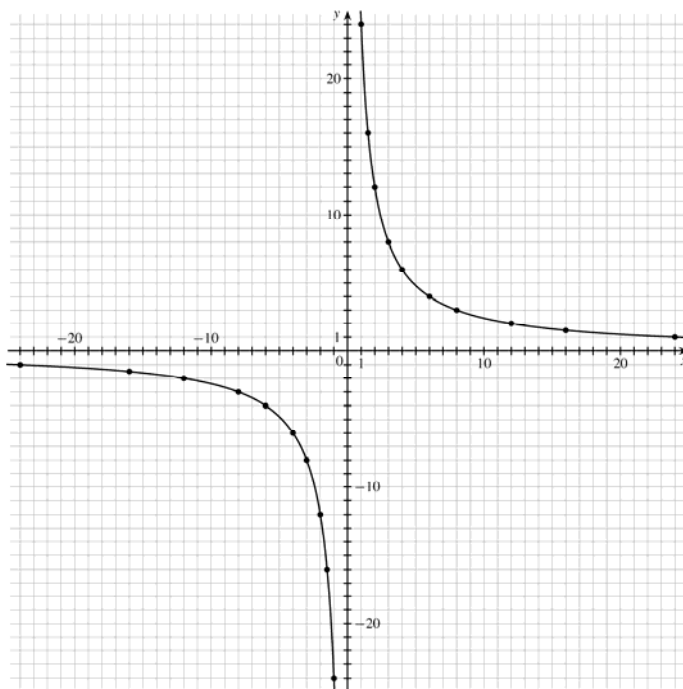
Térjünk el eredeti feladatunktól, amelyben  $x$  és  $y$  csak pozitív számok lehettek, hiszen egy oldal hosszúságát jelentették.

Vizsgáljuk, most az  $f(x) = \frac{24}{x}$  függvényt, ahol  $x$  bármely valós szám lehet.

Készítsünk táblázatot és nézzük meg, hogy hogyan viselkedik a függvény, ha  $x < 0$ :

|                       |     |      |     |    |    |      |    |    |     |     |
|-----------------------|-----|------|-----|----|----|------|----|----|-----|-----|
| $x$                   | -1  | -1,5 | -2  | -3 | -4 | -5   | -6 | -8 | -12 | -24 |
| $f(x) = \frac{24}{x}$ | -24 | -16  | -12 | -8 | -6 | -4,8 | -4 | -3 | -2  | -1  |

A két táblázat alapján ábrázolhatjuk a függvényt.




Az ábrázolt pontokat összekötve két görbevonalat kapunk. Ez a két részből álló görbe a **hiperbola**.

A függvény nincs értelmezve az  $x = 0$  helyen, ott a függvény képének „szakadása” van,

A függvény mind az  $x < 0$ , mind pedig az  $x > 0$  helyeken szigorúan monoton csökkenő. Az értelmezési tartomány nagyobb értékéhez kisebb függvényérték tartozik. Ezt a függvény képén is jól láthatjuk.

Általában is igaz, hogy az  $f(x) = \frac{a}{x}$  függvény, amelyben  $a \neq 0$  állandó érték, és  $x \neq 0$  valós szám, a fordított arányosságot kifejező függvény.

## Feladatok

 7. Egy 120 km hosszú útszakaszt különböző járműveken különböző idők alatt tesznek meg. A járművek egyenletes sebességgel haladnak. Egy gyors személyautó 1 óra alatt, egy kevésbé gyors 1,2 óra alatt, egy másik 1,5 óra alatt és így tovább a kerékpárosig, aki 6 óra alatt tette meg az utat.

Írjuk be a táblázatba, hogy milyen sebességgel mentek az egyes járművek!

|                 |   |     |     |   |     |   |   |   |
|-----------------|---|-----|-----|---|-----|---|---|---|
| idő (h)         | 1 | 1,2 | 1,5 | 2 | 2,4 | 3 | 5 | 6 |
| sebesség (km/h) |   |     | 80  |   |     |   |   |   |

Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát!

*Megoldás:*

$$f(x) = \frac{120}{x}.$$

|                 |     |     |     |    |     |    |    |    |
|-----------------|-----|-----|-----|----|-----|----|----|----|
| idő (h)         | 1   | 1,2 | 1,5 | 2  | 2,4 | 3  | 5  | 6  |
| sebesség (km/h) | 120 | 100 | 80  | 60 | 50  | 40 | 24 | 20 |

 8. Milyen függvénykapcsolat van

- egy adott összegű vásárlásnál a megvásárolt áru darabszáma és egységára közt?
- állandó sebességgel haladó jármű menetideje és a megtett út között?
- Egy bizonyos munka elvégzése esetén a munkát végzők száma és a munka elvégzésének ideje közt?

*Megoldás:* a) és c) fordított arányosság, b) egyenes arányosság



9. Egy osztály busz kirándulásra megy. A busz bérleti díja 50 ezer forint. Ezt az összeget a kiránduláson résztvevő tanulók fizetik ki, egyenlő arányban.

Milyen összefüggés van a tanulók létszáma és az egy főre jutó összeg között?

Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát!

*Megoldás:*  $f(x) = \frac{50}{x}$ .