I. Síkgeometriai alapfogalmak, szögek, szögpárok

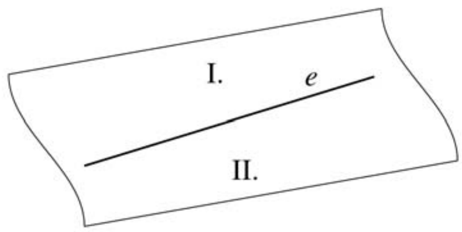
Módszertani megjegyzés: A jelen modult többnyire kibővített ismétlésnek szántuk, és fő célja az alapfogalmak és az alapismeretek felidézése, kiegészítése. Ezért csak az alapvető összefüggésekhez köthető feladatok kerültek az anyagrészbe.

A geometria legfontosabb alapfogalmai: a tér, a sík, az egyenes, illetve a vonal, és a pont.

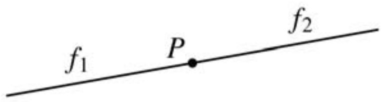
A síkok a térben helyezkednek el, a sík a teret két féltérre bontja.

Mi most elsősorban a sík geometriájával fogunk foglalkozni

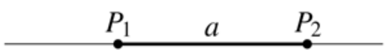
A sík egy egyenese a síkot két félsíkra bontja.



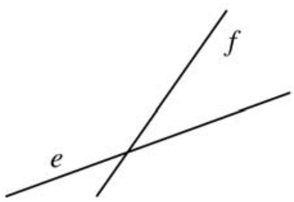
Az egyenest egy pontja két félegyenesre bontja,

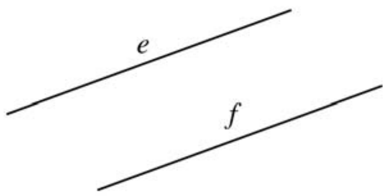


két különböző pontja az egyenesen egy szakaszt határoz meg.

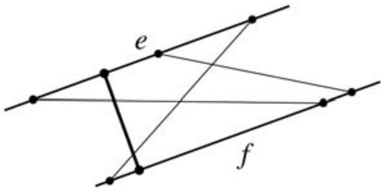


A síkban két egyenesnek vagy van közös pontja, akkor metszik egymást, vagy nincs, akkor párhuzamosak.

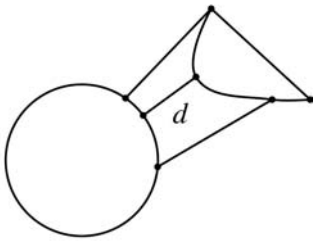


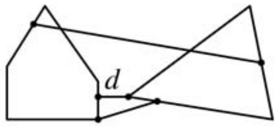


Két párhuzamos egyenes távolsága a két egyenes pontjait összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hossza. A metsző egyenesek távolsága nulla.



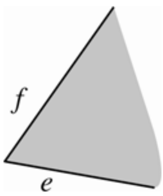
Ez általánosan is igaz: két alakzat távolságán a különböző alakzatok pontjait összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hosszát értjük. Ha van közös pontjuk, akkor távolságuk nulla.

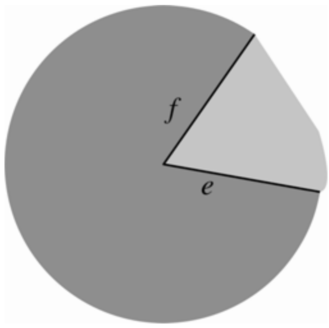




Egy pontból kiinduló két félegyenes szöget zár be egymással.

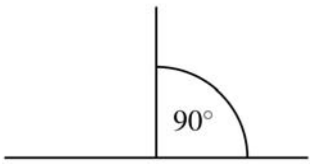
Megjegyzés: Látható, hogy két szög keletkezik. Ha külön nem jelezzük, akkor a két félegyenes szögén a kisebb szöget értjük.



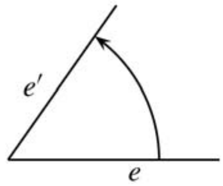


Szögek nagyságát többféle módon mérhetjük. Leggyakrabban a teljes szög $\frac{1}{360}$-ad részét választjuk mértékegységnek, ez az 1^{o}.

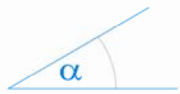
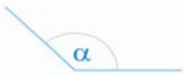
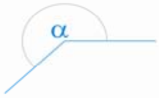
Egy adott egyenesre bocsátott merőleges egyenesnek az adott egyenessel bezárt szögét derékszögnek nevezték el. A derékszög 90^{o}-os.



A szöget úgy is származtathatjuk, hogy egy félegyenest a kezdőpontja körül elforgatunk. Ez esetben a szöget az elforgatás ívével mérjük.



A szögeket **nagyság szerint** a következő csoportokba soroljuk:

nullszög	0°	
hegyesszög	$0° < \alpha < 90°$	
derékszög	90°	
tompaszög	$90° < \alpha < 180°$	
egyenesszög	180°	
homorúszög	$180° < \alpha < 360°$	
teljesszög	360°	

A szög konvex, ha a szögtartományban bárhol kiválasztunk két pontot, akkor az őket összekötő szakasz teljes egészében a szögtartományban van.

Konvex szögek a hegyesszög, a derékszög, a tompaszög.

A szög konkáv, ha a szögtartományban találunk két olyan pontot, hogy az őket összekötő szakasz nincs teljes egészében a szögtartományon belül. A homorúszög konkáv.

Egyenlő szögpárok

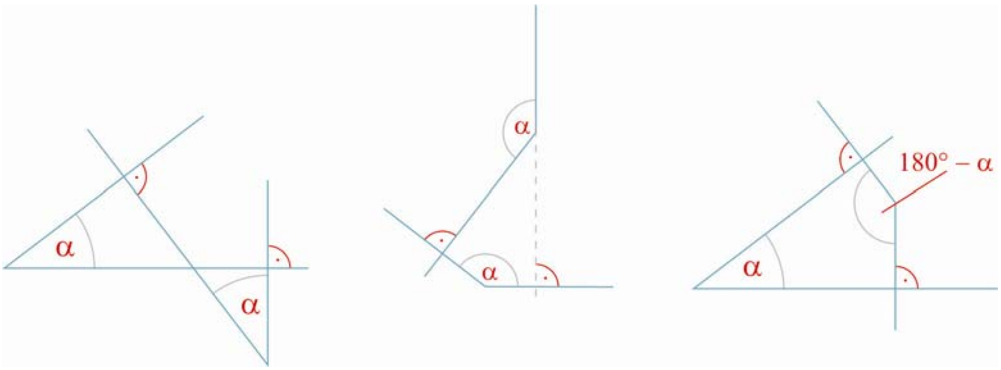
Az egyenlő szögpárok közül a következőket ismertük meg korábban:

- **Egyállású szögek**: száraik páronként párhuzamosak és azonos irányúak. (Ha egy egyenes két párhuzamos egyenest metsz, a metsző egyenes azonos oldalán keletkező egyenlő szögek egyállású szögek.)

- **Váltószögek**: száraik páronként párhuzamosak, és ellenkező irányúak. Ilyenek például egy Z-betű szára által az alsó és felső vízszintes szakaszokkal bezárt szögek.

- **Csúcsszögek**: speciális váltószögek; egy-egy száruk egy egyenest alkot. Ha két egyenes egymást metszi, négy szög keletkezik. Ezek közül az átellenes szögpárokat csúcsszögeknek nevezzük.
A keletkezett szögek közül 2-2 egyenlő nagyságú.
Két egymást metsző egyenes szögén a keletkezett szögek közül a kisebbik szöget értjük.

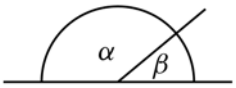
- **Merőleges szárú szögek**: száraik páronként merőlegesek egymásra; a merőleges szárú szögek között vannak egyenlők és olyanok is, amelyek 180°-ra egészítik ki egymást.



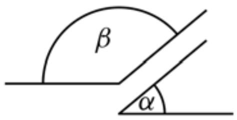
Egymást kiegészítő szögpárok

Pótszögeknek nevezünk két szöget, ha összegük 90°.

A **kiegészítő szögek** 180°-ra egészítik ki egymást (összegük 180°):



mellékszögek



társszögek

Módszertani megjegyzés: Csoportalakítás után minden csoportnak adjunk a ***15.1 feladatlapból*** 1-1 példányt és 15 percet a megoldásra. A feladatokat a csoportok minden tagja megoldja, és a megoldásokat egyenként egyeztetik csoporton belül. A 15 perc letelte után diák-kvartett módszerének megfelelően történik az ellenőrzés: a tanár megmondja, hogy melyik feladatra kér választ, a csoportok szóvivői jelentkeznek, majd a tanár által kiválasztott szóvivő elmondja a megoldást. Ezután megbeszélik a hallottakat, a tanár azonnal értékel.

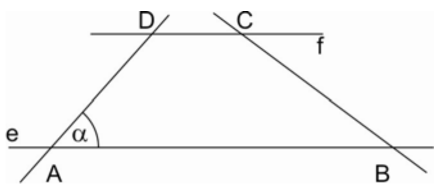
A feladatlap célja az egyenes, félegyenes, pont fogalmának tisztázása, és a szögek, szögpárok vizsgálata.

VONALZÓRA ÉS SZÖGMÉRŐRE SZÜKSÉG VAN A FELADATLAP MEGOLDÁSÁHOZ !

15.1 feladatlap:

Ha a feladatlapot itt kívánjuk alkalmazni, akkor fel kell idézni a trapéz fogalmát, illetve a szögek jelölési módját, mert az csak a következőkben kerül ismétlésre, illetve bevezetésre.

1. Rajzold meg az ábrán látható trapézt! Hosszabbik alapja 9 cm, szárai 4 cm és 5 cm, magassága 3 cm. Hosszabbítsd meg az oldalait!



2. Jelöld α-val a *DAB* szöget! Egészítsd ki a következő mondatokat!

a) Az α szög egyik szára az … pontból kiinduló, …-t tartalmazó ……………, másik szára az …………………………………...

b) Az *e* ……………   ……………… az … egyenessel.

c) A trapéz szárai az … és … szakaszok.

d) A … a trapéz rövidebb ………, és része az f …………nek.

Megoldás:

a) Az α szög egyik szára az *A* pontból kiinduló, *D*-t tartalmazó félegyenes, másik szára az *A* pontból kiinduló, *B*-t tartalmazó félegyenes.

b) Az *e* egyenes párhuzamos az *f* egyenessel.

c) A trapéz szárai az *AB* és *BC* szakaszok.

d) A *DC* a trapéz rövidebb alapja, és része az *f* egyenesnek.

3. Szögmérővel mérd meg a szögeket, és állapítsd meg, hogy mely szögek egyenlők a trapézban!

Megoldás: Fontos, hogy a gyerekek találják meg a szögpárokat (az egyállású szögeket, illetve váltószögeket, valamint a csúcsszögeket).

4. Végezz méréseket és állapítsd meg, hogy mely szögek egészítik ki egymást 180°-ra a trapézban!

Megoldás: Fontos, hogy a gyerekek találják meg a mellékszögeket és a társszögeket.

Ezután minden csoportnak adjunk egyet a ***15.2 kártyakészletből***, amelyen a szögek elnevezése, nagysága és ábrája található. A feladat az, hogy válogassák össze a megfelelőket. Az értékelés a kirakás gyorsasága szerint történik.

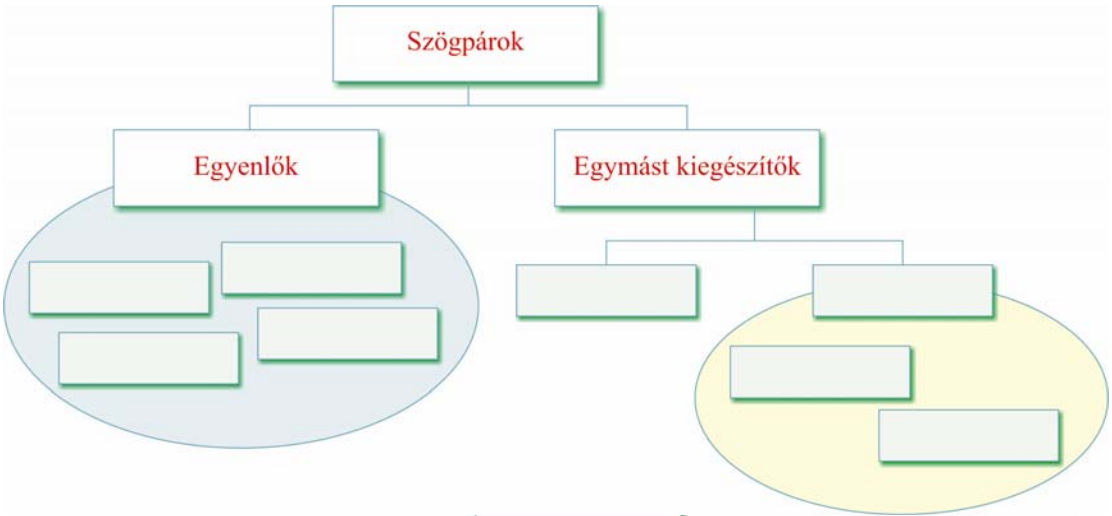
Feladatok

Módszertani megjegyzés: Az 1 – 3. feladatokat önálló feldolgozásra házi feladatnak célszerű feladni. Az ellenőrzéshez segítséget nyújt a bemutató, amelyben az 1 – 3. feladatok kitűzése és az 1 – 2. feladatok megoldása is szerepel.
Az itt szereplő feladatokból nem kell mindet megoldani, de lehetőségünk adódik a differenciálásra.

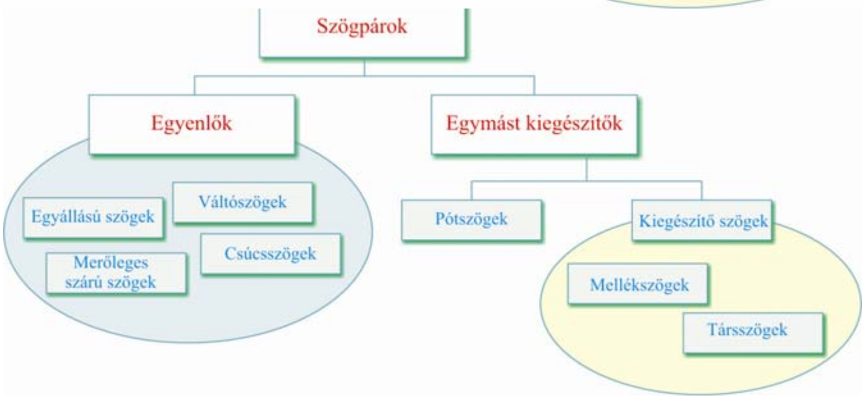
1. A fenti szöveg alapján írd a következő ábra megfelelő helyeire az egymást kiegészítő szögpárokat!

Megoldás:

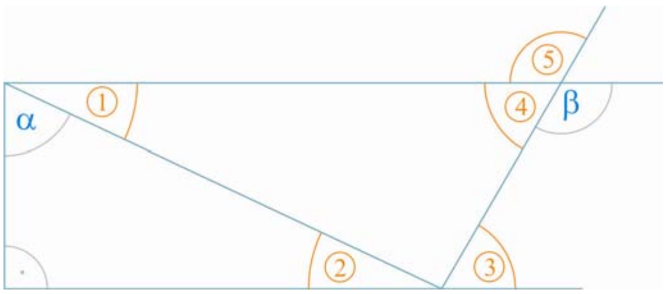
2. Töltsd ki az ábra hiányzó részeit!



Megoldás:



3. Melyik szöghöz társíthatók a következő fogalmak: α pótszöge, β csúcsszöge, β mellékszöge, β társszöge?



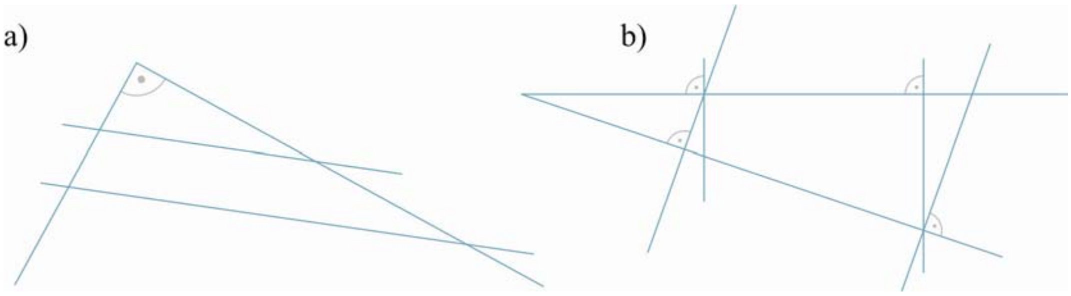
Megoldás: α pótszöge: 1, 2; β csúcsszöge: 5; β mellékszöge: 4; β társszöge: 3.

Módszertani megjegyzés: A 4 – 7. feladatokból válogassunk feladatokat a tanulócsoportnak megfelelő számban és nehézségben. Megoldásukhoz a diák-kvartett vagy az ellenőrzés párban módszer ajánlott.

4. Egészítsd ki a mondatot! Egy hegyesszög és egy tompaszög összege lehet ……………
……………………………………………………………………………………………….

Megoldás: Egy hegyesszög és egy tompaszög összege lehet tompaszög, egyenesszög vagy homorúszög.

5. Keress egyenlő és egymást kiegészítő szögpárokat a következő ábrákon! Betűzd meg a szögeket!



6. Megadták, hogy egy szög mennyivel kisebb a mellékszögénél. Számítsd ki a szöget és a mellékszögét!

a) 100°; b) 20°; c) 200°; d) 75°; e) 23,8°; f) 1,2°.

Megoldás: a) 40°, 140°; b) 80°, 100°; c) nem lehetséges;
d) 52,5°; 127,5°; e) 78,1°; 101,9°; f) 89,4°; 90,6°.

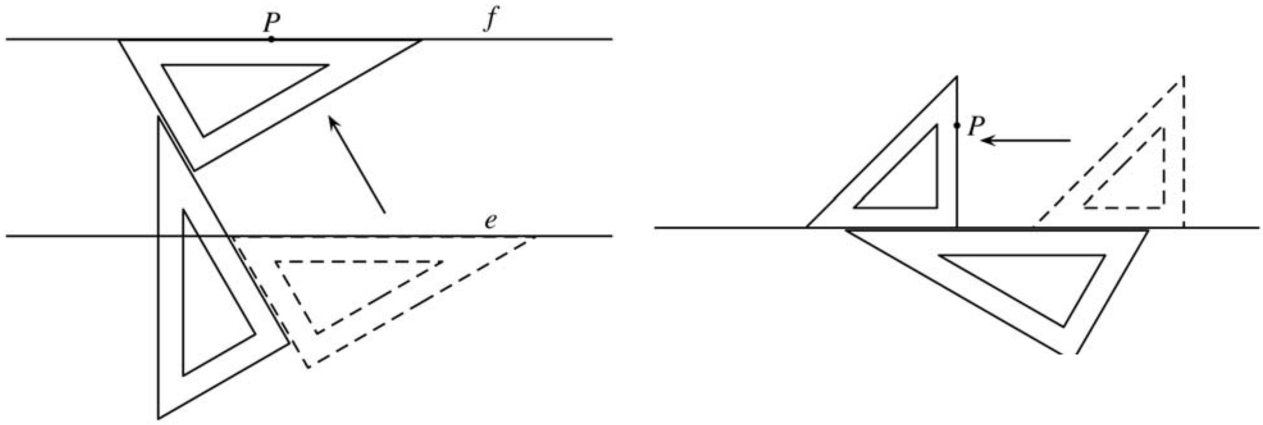
7. Rajzolj egy trapézt, és hosszabbítsd meg az oldalakat a csúcsokon túl! Keress egyenlő és egymást kiegészítő szögpárokat az ábrán! Végezd el a feladatot paralelogramma esetében is!

II. Alapszerkesztések

Ha ábrákat készítünk, akkor sok esetben használunk derékszögű vonalzókat és különböző sablonokat, mint például olyanokat, amelyekkel téglalapokat, szabályos háromszögeket, görbe vonalakat rajzolhatunk.

Ha ezeket használjuk, akkor általában azt mondjuk, hogy rajzolunk, nem pedig azt, hogy szerkesztünk.

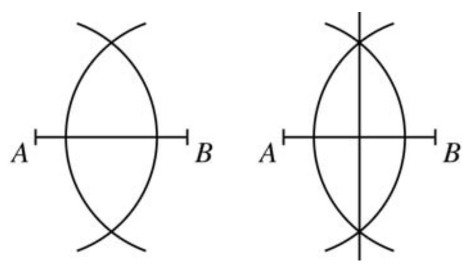
A két derékszögű háromszög csúsztatásával könnyen rajzolhatunk párhuzamos, illetve merőleges egyeneseket.



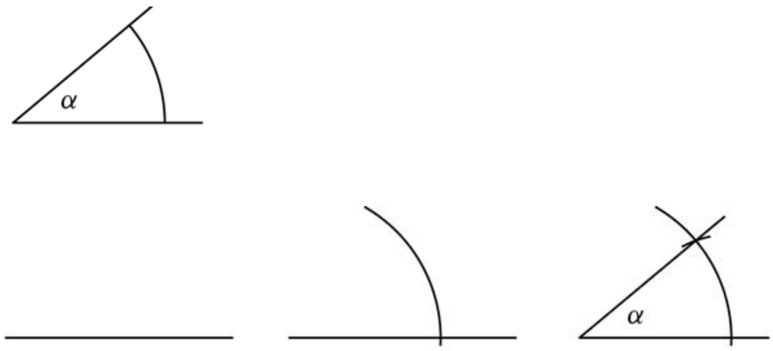
Az igazi szerkesztés csak körző és egyélű vonalzó használatát engedi meg.

Beszédes ábrákkal ismételjük át a következő szerkesztéseket:

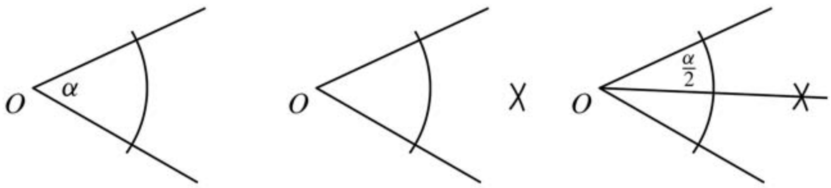
Szakasz felezése



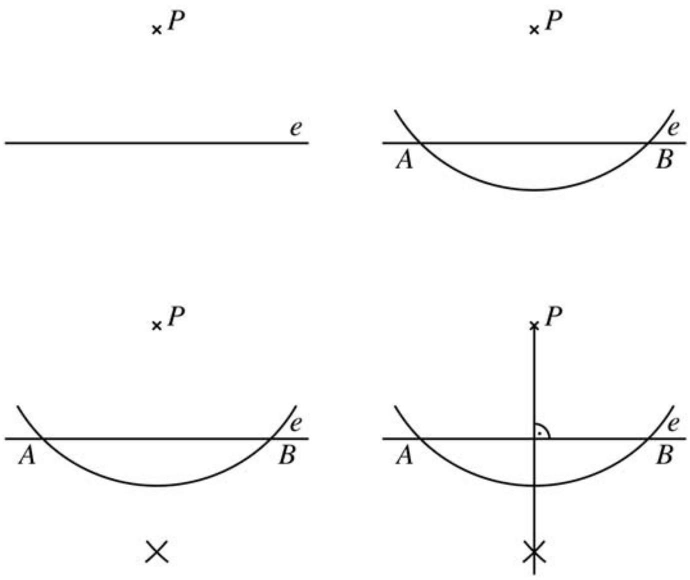
Szög másolása



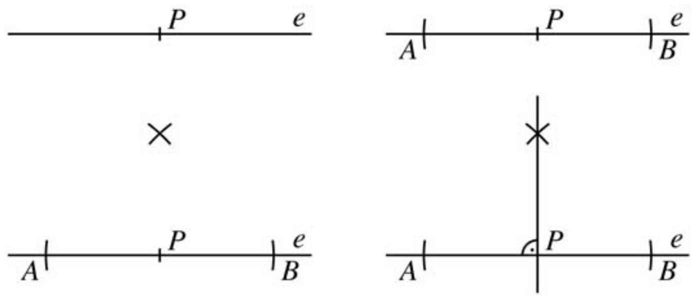
Szög felezése



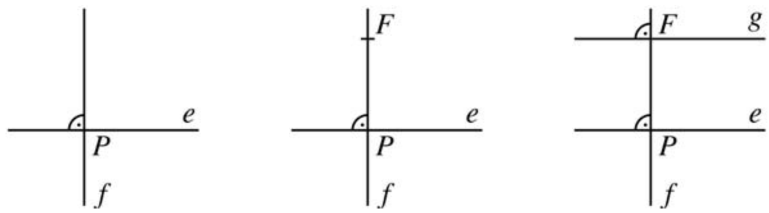
Egyenesre merőleges szerkesztése adott külső pontból



Egyenes adott pontjára merőleges szerkesztése



Párhuzamos egyenespár szerkesztése egymást követő két merőleges szerkesztésével történhet.



Feladatok

8. Rajzolj egy tetszőleges, 180°-nál kisebb szöget, és

a) másold le,

b) felezd meg!

Megoldás: a szerkesztésre adott ábra alapján.

9. Rajzolj egy tetszőleges egyenest, és rajzolj egy erre merőleges egyenest,

a) egy adott külső pontból.

b) az adott egyenes egy adott pontjában!

Megoldás: a szerkesztésre adott ábra alapján.

10. Rajzolj egy tetszőleges szakaszt, és azt felezd meg!

Megoldás: a szerkesztésre adott ábra alapján.

III. Háromszögek

Módszertani megjegyzés: A síkidomok feldolgozását csoportalakítással kezdjük. Minden tanuló kap egy kártyát a ***15.3 kártyakészletből***. Azok kerülnek egy csoportba, akiknek a kártyáján ugyanarra a síkidomra vonatkozó kijelentés szerepel, és a csoporton belül egyeztetik a tulajdonságokat. A kártyák szétosztása véletlenszerűen is történhet, azonban az itt felsorolt kijelentések közül az utolsóból a legnehezebb kitalálni, hogy milyen síkidomra vonatkozik, ezért ajánlott azokat a kártyákat jobb képességű tanulóknak adni. A négyszögek kitalálása több tanulónak is problémát okoz. Miután megkapták a kártyákat, kérdezzük meg, hogy ki nem érti, vagy ki az, aki nem tudja, hogy milyen sokszögről szól az állítás. A sokszögek (háromszögek, négyszögek) tulajdonságainak megbeszélésére is lehetőséget ad, hogy ha a problémás kérdéseket megbeszéljük az egész osztállyal.

Ez a feldolgozás abban segíti a tanárt, hogy megismerje, milyen ismereteket hoztak magukkal a tanulók az általános iskolából. Továbbá fel is elevenítik a tanulók elhalványult, vagy feledésbe merült ismereteit!

Fontos! A tulajdonságok igazak, de nem definíciók. Ezt tudatosítani kell! A definíció szükséges és elégséges feltételt ad meg. Az itt leírt tulajdonságokra ez általában nem igaz.

A kijelentések:

Egyenlőszárú háromszög: Ennek a síkidomnak három szögéből kettő egyenlő. Olyan háromszög, amelynek egyik magassága felezi az egyik oldalt. Oldalai: egy alap és két szár. Olyan háromszög, amelynek egyik szögfelezője felezi az egyik oldalt.

Derékszögű háromszög: Van két befogója és egy átfogója. Érvényes rá a Pitagorasz-tétel. a, b és c oldalára fennáll az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés. Olyan háromszög, amelynek egyik szöge egyenlő a másik kettő összegével.

Kör: Egy adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza. Van érintője, átmérője, sugara. Ez a síkidom szoros kapcsolatban áll egy ókori görög tudóssal és egy görög betűvel. Ha ez a síkidom háromszög köré rajzolható, akkor a síkidom egy nevezetes pontját a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja adja.

Trapéz: Két szára és két alapja van. Olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja. (Általános esetben csak egy párhuzamos oldalpárja van.) Ha egy háromszöget elmetszünk egy olyan egyenessel, amelyik az egyik oldalával párhuzamos, akkor ilyen négyszöget kapunk. Ha szimmetrikus ez a négyszög, akkor az egy-egy alapon fekvő szögei egyenlők.

Paralelogramma: Olyan négyszög, amelynek van két párhuzamos oldalpárja, és általános esetben a szögei nem derékszögek. Átlói felezik egymást, de nem minden esetben felezik a négyszög szögeit, és szögei nem minden esetben derékszögek. Olyan négyszög, amelynek két-két szemközti oldala egyenlő, és szögei nem minden esetben derékszögek. Olyan szimmetrikus trapéz, amelynek alapjai egyenlő hosszúak, de a szögei nem biztos, hogy derékszögek.

Rombusz: Olyan négyszög, amelynek oldalai egyenlők, de szögei nem biztos, hogy derékszögek. Noha ennek a négyszögnek minden oldala egyenlő, nem biztos, hogy rajzolható köré kör (amelyik minden csúcsán átmegy). Ez a négyszög olyan paralelogramma, amelynek az egymás melletti oldalai egyenlő hosszúak. Ez a négyszög olyan deltoid, amelynek a szomszédos oldalai egyenlő hosszúak.

Négyzet: Ennek a négyszögnek egyenlők az oldalai és a szögei. Ez a négyszög derékszögű rombusz. Olyan téglalap, amelynek szomszédos oldalai egyenlő hosszúak. Olyan négyszög, amelynek átlói egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra.

Téglalap: Olyan négyszög, amelynek minden szöge derékszög, de nem biztos, hogy egyenlők az oldalai. Derékszögű paralelogramma, de nem okvetlenül rombusz. Ha ennek a négyszögnek az oldalai egyenlők lennének, négyzetnek hívnák. Ennek a négyszögnek az átlói egyenlők és felezik egymást, de oldalai nem biztos, hogy egyenlők.

Szabályos hatszög: Olyan konvex hatszög, amelynek oldalai egyenlők. Az átlóival ez a sokszög hat egybevágó szabályos háromszögre bontható. Megszerkeszthetjük úgy, hogy egy körvonalra a sugarát hatszor rámérjük. Ennek a konvex hatszögnek minden szöge egyenlő.

Módszertani megjegyzés: Füllentős feladat következik. Minden csoport megmondja egy másiknak, hogy neki milyen síkidomot kellett kitalálni, így a már átgondolt síkidom helyett egy másikra kell összpontosítaniuk. A feladat két igaz és egy hamis állítás megfogalmazása. A csoportok választanak egy szóvivőt, aki az állításokat felolvassa, és a többi csoport eldönti, hogy a háromból hányas számú volt a hamis, és a szóvivők a tanár jelére egyszerre, felemelt kézzel mutatják a hamis állítás számát. A tanár minden választ értékel (pontrendszer), megbeszélik a helyes választ, és a végén összesítik a pontverseny eredményét. Jobb képességű tanulókkal a definíció és bizonyított tétel közötti különbséget is megemlíthetjük. Ez azért fontos, mert a tények és vélemények különbözőségére is rávilágít, és segíti például a jogszabályok értelmezését – az értelmező rendelkezések részben definiálják a törvényben szereplő fogalmakat.

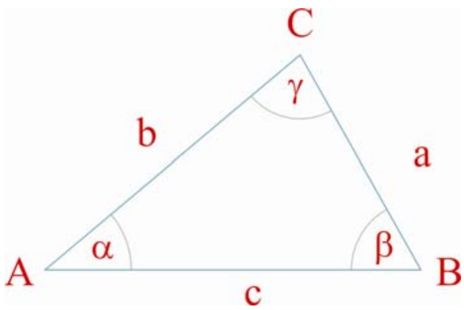
A síkidomok és tulajdonságaik a mindennapokban fontos szerepet játszanak. Például a házak és terek építése, burkolása során, szabásminta elkészítésekor, a megtervezett bútor anyagköltségének megbecsüléséhez szükséges, hogy a síkidomokat meg tudjuk tervezni, a kerületüket és területüket ki tudjuk számítani, és ismerjük a legfontosabb tulajdonságaikat.

Módszertani megjegyzés: Első lépésként a síkidomokat meg kell tudnunk különböztetni egymástól. A következő feladatok a síkidomok különböző csoportosítására összpontosítanak, hogy a tanulók ezáltal is pontosítsák ismereteiket.

A sokszögeket szakaszok határolják. Sokszög: a háromszög, négyszög, ötszög stb.

Foglaljuk össze azokat a legfontosabb ismereteket, amelyeket a háromszögekről korábban tanultunk.

A szakaszokat, így az ABC háromszög oldalait is az ábécé kisbetűivel jelöljük (a, b, c). A pontokat, így a háromszög csúcsait is az ábécé nagybetűivel jelöljük (A, B, C). A szögek jelölésére görög betűket használunk (α, β, γ). (Az A csúcsnál az α szög, vele szemben az a oldal található.)



A szögeket a csúcspontjuk és a száraikon lévő egy-egy pont betűjelével is megadhatjuk. Például az α szöget így is jelölhetjük: CAB szög.

A háromszög szögeire vonatkozó állítások közül a legfontosabb:

A háromszög belső szögeinek összege 180°.

A háromszögek oldalainak és szögeinek kapcsolatára fennáll a következő két állítás:

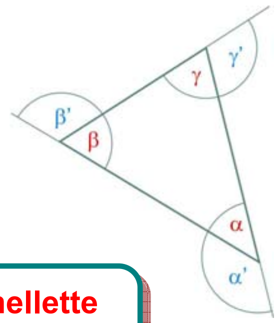
Egy háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak (egyenlőszárú háromszög).

A háromszögben hosszabb oldallal szemben nagyobb szög található, mint a rövidebb oldallal szemben.

Minden háromszög oldalaira teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

A háromszögek külső szögeire teljesül, hogy:



A háromszög külső szögeinek összege 360°.

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

A háromszög bármely külső szöge megegyezik a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

$$\alpha' = \beta + \gamma;\ \beta' = \alpha + \gamma;\ \gamma' = \alpha + \beta.$$

Háromszögek csoportosítása

Szögeik szerint:

hegyesszögű háromszögek (minden szögük hegyesszög),

derékszögű háromszögek (egyik szögük derékszög, a többi hegyesszög),

tompaszögű háromszögek (egyik szögük tompaszög, a többi hegyesszög).

Oldalaik szerint:

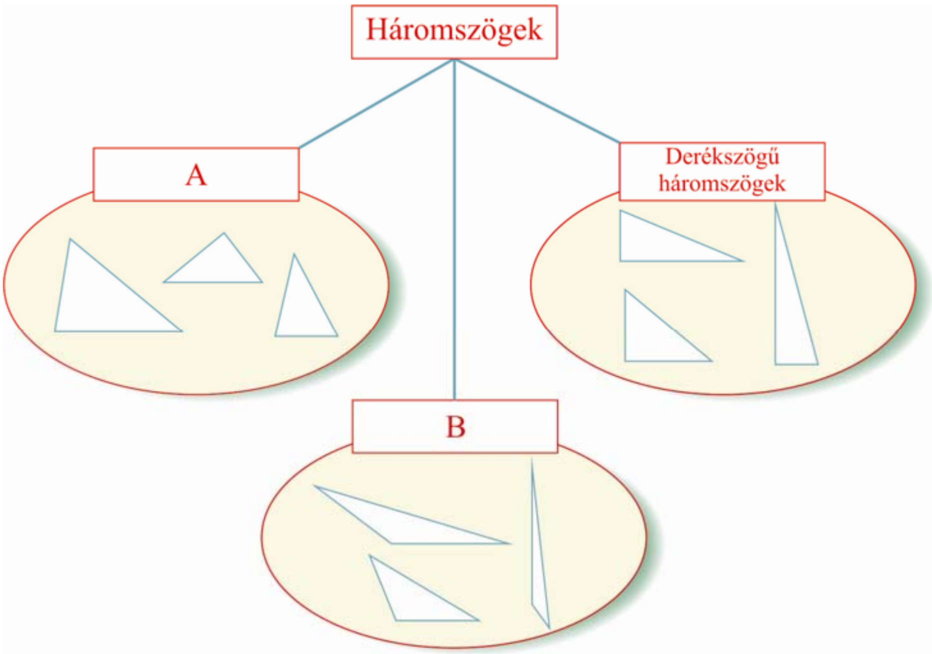
egyenlő oldalú háromszögek (minden oldaluk egyenlő),

egyenlőszárú háromszögek (két oldaluk egyenlő),

általános háromszögek (minden oldaluk különböző).

Feladatok

11. Mit írhatnánk A, illetve B helyére?



Megoldás: A: hegyesszögű háromszögek; B: tompaszögű háromszögek.

12. Derékszögű háromszögben hogyan nevezzük a derékszöggel szemben levő oldalt?

Megoldás: Átfogónak.

13. Egy derékszögű háromszögben az α szög 48°-os. Mit mondhatunk az α-val szemközti oldal hosszáról?

Megoldás: Az oldal befogó, a háromszög második leghosszabb oldala.

14. Fejezd be a mondatokat!

a) Azt a háromszöget, amelynek minden szöge különböző, ……………… háromszögnek nevezzük.

b) A két egyenlő szöggel rendelkező háromszöget ……………… háromszögnek nevezzük.

c) Egy háromszög akkor és csakis akkor szabályos, ………………………………………

Megoldás: a) általános; b) egyenlőszárú; c) nyitott kérdés, a válasz többféle lehet, például „három egyenlő szöge van”, „három egyenlő oldala van”, „ a köré- és a beleírt kör középpontja megegyezik” stb.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatot házi feladatnak javasoljuk. A tanulók fogalmazási készségét egyéni gyakorlással javíthatjuk a leghatásosabban. Próbáljuk arra ösztönözni tanítványainkat, hogy élőszóban, a tanult szakkifejezéseket használva adjanak választ a kérdésekre. Az ellenőrzést mindenképpen javasolt végrehajtani.

15. Keress olyan tulajdonságokat, amelyek igazak az egyes síkidomokra!

a) egyenlőszárú háromszög; b) szabályos háromszög; c) derékszögű háromszög.

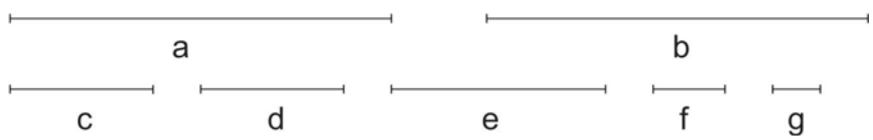
16. Derékszögű háromszögben az egyik szög 35°-os. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás: 90°, 35°, 55°.

17. Egyenlőszárú háromszögben az egyik szög 42°-os. Mekkorák lehetnek a háromszög hiányzó szögei?

Megoldás: 42° és 96°, vagy 69° és 69°.

18. Adj meg legalább 5 olyan szakaszhármast az alábbiak közül, amelyekből (mint oldalakból) lehet háromszöget szerkeszteni!



Megoldás.

Olyanokat kell választani, amelyekben 2 szakasz hosszának öszege nagyobb a harmadik szakasznál.

19. Egy háromszögben az oldalak aránya $b : a : c = 2 : 3 : 5$. Melyik a leghosszabb oldala?

Megoldás:

Egyik sem, mert nincs ilyen háromszög – nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség az oldalakra.

20. Mekkorák a háromszög szögei, ha két külső szöge:

a) 130° és 174°; b) 87° és 116°; c) 136° és 98°?

Megoldás: a) 50°, 6°, 124°; b) 93°, 64°, 23°; c) 44°, 82°, 54°.

21. Adott egy háromszög egyik szöge és a másik két külső szög aránya. Számítsd ki a hiányzó szögeket! a) 70° és 2 : 3; b) 30°, 8 : 13.

Megoldás: a) 80° és 30°; b) 100° és 50°.

22. Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala (a és b), és az *a* oldallal szemközti α szög.

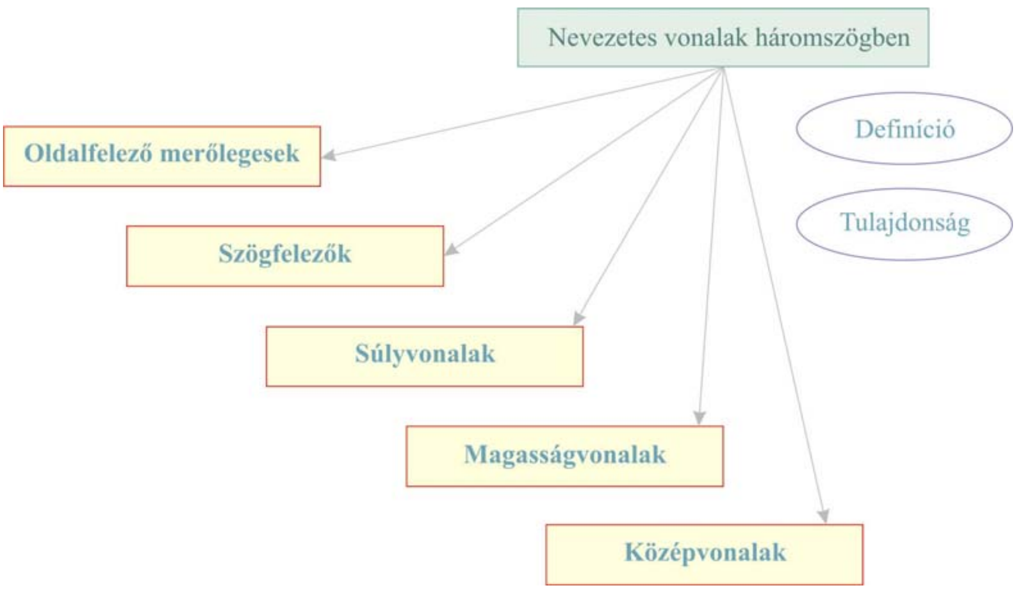
a) $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $\alpha = 45°$; b) $a = 4$ cm, $b = 10$ cm, $\alpha = 45°$;

c) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 60°$.

Megjegyzés: b)-nek nincs megoldása, az a) és a c) egyértelmű. Beszéljük meg a tanulókkal, hogy egy háromszög megadása mikor egyértelmű: ha adott 3 oldala, vagy 2 oldala és a közbezárt szög, vagy 1 oldala és a rajtuk fekvő 2 szög, vagy 2 oldala, és a nagyobbikkal szemközti szög. Ez készíti elő majd azt, hogy a 4 esetet a gyerekek könnyebben megjegyezzék a háromszögek egybevágóságának és a hasonlóságnak a tanításakor.

A háromszög nevezetes vonalai, pontjai

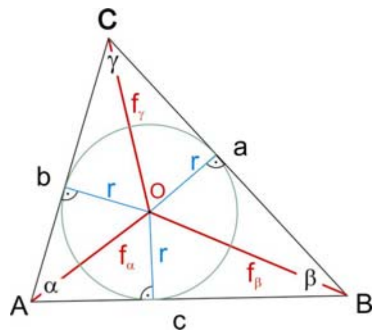
A következő ábra áttekinti, hogy a háromszög milyen nevezetes vonalaival foglalkozunk. Minden vonalhoz tartozik egy definíció (meghatározás) és egy tétel (tulajdonság), amelyet feladatmegoldásokban is használhatunk.

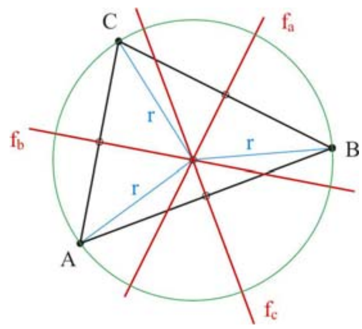


Módszertani megjegyzés: A nevezetes vonalak megszerkesztése a tanulók számára az alapfeladatok közé tartozik. Célszerű erre plusz gyakorlóórákat beiktatni a modul kidolgozott óráin kívül. Mérésekkel jobb képességű tanulók esetén egyéb tulajdonságokat is felfedeztethetünk (pl. szögfelezőtétel, vagy hogy egy oldal Thalész-köre a másik két oldalt a hozzájuk tartozó magasságok talppontjaiban metszi).

A **szögfelező** olyan egyenes, amely felezi a háromszög belső szögét. Jelölése: f_α , f_β, , f_γ .

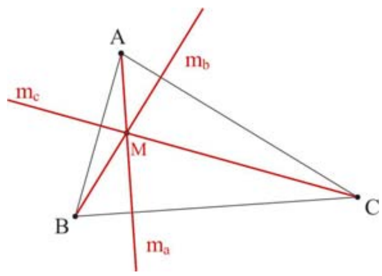
A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a **háromszögbe írható kör középpontja**.



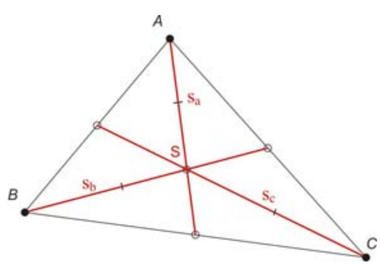


Az **oldalfelező merőleges** olyan egyenes, amely átmegy az oldal felezőpontján és merőleges az oldalra. Jelölése: f_a , f_b , f_c.
A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a pont a **háromszög köré írható kör középpontja**.

A **magasságvonal** a háromszög csúcspontjából a szemközti oldal egyenesére állított merőleges egyenes.
Jelölése: m_a , m_b , m_c.
A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, ez a háromszög **magasságpontja**.

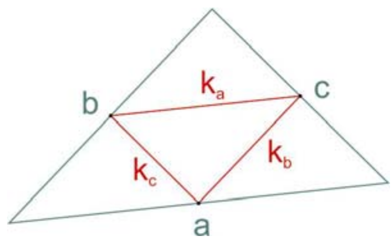


A **súlyvonal** a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Jelölése: s_a, s_b, s_c .
A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ez a háromszög **súlypontja**. **A súlyvonalak harmadolják egymást** úgy, hogy a csúcs felé esik a súlyvonal kétharmad része.



A háromszög **középvonala** két oldalának felezőpontját összekötő szakasz.

A háromszög középvonala **párhuzamos és feleakkora**, mint a harmadik (nem felezett) oldal.



$$k_a \parallel a,\ k_b \parallel b,\ k_c \parallel c;\ \ k_a = \frac{a}{2},\ k_b = \frac{b}{2},\ k_c = \frac{c}{2}.$$

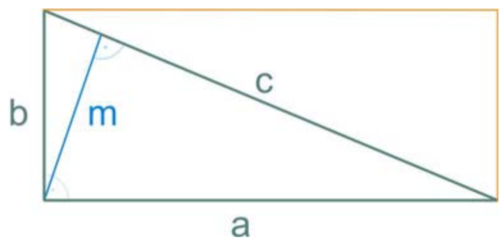
A háromszög **kerülete** az oldalak hosszának összege. **Területét** úgy számoljuk ki, hogy bármelyik oldal hosszának mérőszámát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszának mérőszámával, és a szorzatot kettővel osztjuk.

Módszertani megjegyzés:

Javítsuk ki a hibás, „alapszor magasság" szóhasználatot a gyerekeknél. Alapja csak az egyenlő szárú háromszögnek van.

$$K = a + b + c \qquad T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}.$$

A **derékszögű háromszög területét** kétféleképpen is fel lehet írni: $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m}{2}$.



A **derékszögű háromszög oldalaira érvényes a Pitagorasz-tétel.**

Pitagorasz-tétel: a derékszögű háromszögben a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével:

$c^2 = a^2 + b^2$ *; a és b: befogók, c: átfogó.*

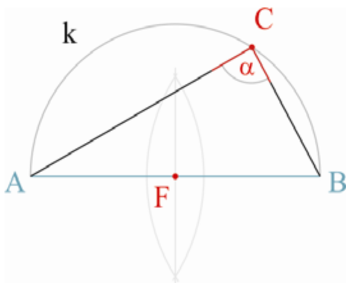
Módszertani megjegyzés:

Érvényes a Pitagorasz-tétel megfordítása is, azonban mind a tétellel kapcsolatos számítások, mind a megfordítása a 10. évfolyam tananyaga. Ezen a helyen csak megemlítés szintjén fordul elő, hogy a háromszöggel kapcsolatos ismereteket összefogva lássák a tanulók. A tételt általános iskolai tanulmányaikból ismerik.

Módszertani megjegyzés: A következő mintapéldában a tétel és megfordítása közötti különbséget éreztethetjük meg a gyerekekkel. Jobb képességű tanulók számára ajánlott, csoportmunkában feldolgozva, részfeladatonkénti megbeszéléssel.

A **Thalész-tételt** is régóta ismerjük:

Ha egy kör átmérőjének két végpontját a körvonal bármely másik pontjával összekötjük, akkor derékszögű háromszöget kapunk. Az átmérő a derékszögű háromszög átfogója.



A Thalész-tétel megfordítása:

Egy derékszögű háromszög köré írt kör középpontja mindig az átfogójának felezőpontja lesz. Az átfogó a kör átmérője.

Feladatok

23. A következő táblázat háromszögek oldalainak hosszát adja meg. Melyik adat-oszlop ad meg derékszögű háromszöget?

	A	B	C	D	E	F	G	H
a	7	3	7	5	8	8	20	6
b	6	4	13	12	15	8	21	7
c	8	5	11	13	17	8	29	6

Megoldás: B; D, E; G.

24. Egy súlyvonal a háromszöget két részre osztja. Mit mondhatunk, ha ezek területeit összehasonlítjuk?

Megoldás: Egyenlők, mert a keletkező háromszögek magasságai megegyeznek, és így egyenlők, a magassághoz tartozó oldalak szintén egyenlők (a háromszög oldalának fele).

Módszertani megjegyzés: A szerkesztéses feladatok az alapszerkesztésekre épülnek, azokat a modul átvétele előtt javasoljuk gyakoroltatni. Lehetséges, hogy a 25 – 29. feladatok nehéznek bizonyulnak, közülük annyit használjunk fel az órán, amennyit érdemesnek látunk.

25. Szerkessz háromszöget, ha adottak a következő adatok (a szokásos jelölésekkel):

a) $a = 3\,\text{cm},\ b = 5\,\text{cm},\ \gamma = 60°$; b) $b = 5\,\text{cm},\ c = 3{,}7\,\text{cm},\ \beta = 47°$;

c) $a = 7\,\text{cm},\ \beta = 48°,\ \gamma = 45°$; d) $b = 6{,}4\,\text{cm},\ \alpha = 30°,\ \gamma = 60°$;

e) $a = 4\,\text{cm},\ m_a = 5\,\text{cm},\ \beta = 45°$; f) $a = 6\,\text{cm},\ s_a = 3{,}2\,\text{cm},\ b = 3{,}7\,\text{cm}$;

g) $b = 4{,}8\,\text{cm},\ m_b = 3\,\text{cm},\ \alpha = 30°$; h) $c = 4{,}8\,\text{cm},\ s_c = 5{,}2\,\text{cm},\ \alpha = 70°$.

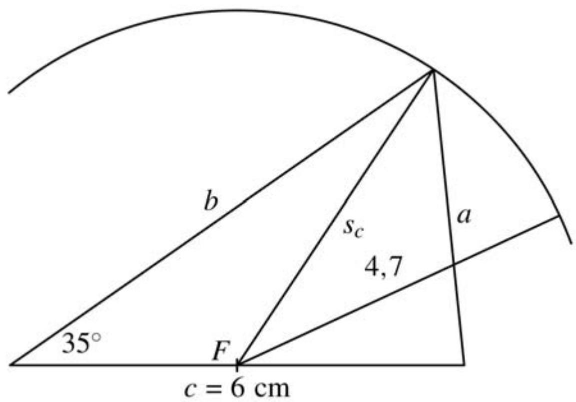
Megoldás: A c) és d), továbbá az e) és g), illetve az f) és h) megoldása hasonló.

26. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott az átfogó (8 cm) és az átfogóhoz tartozó magasság (3,5 cm)! Hány megoldás van?

Megoldás: két, egybevágó megoldás van:

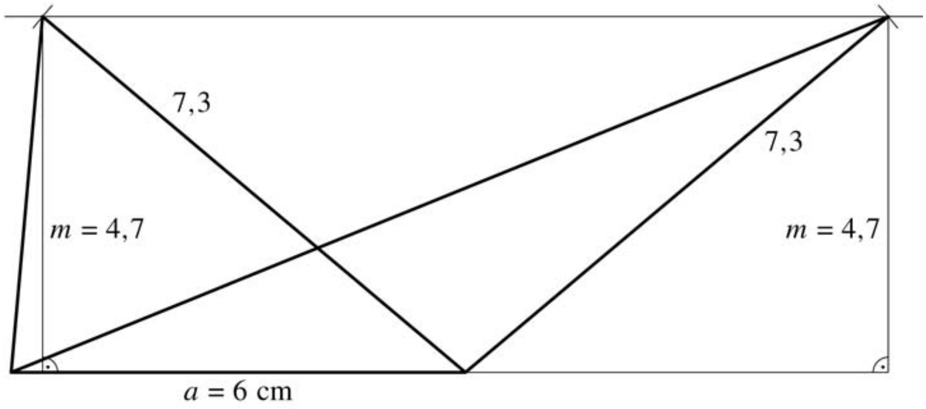
27. Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $c = 6$ cm, $s_c = 4{,}7$ cm, $\alpha = 35°$.

Megoldás:



28. Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6$ cm, $m_a = 4{,}7$ cm, $b = 7{,}3$ cm.

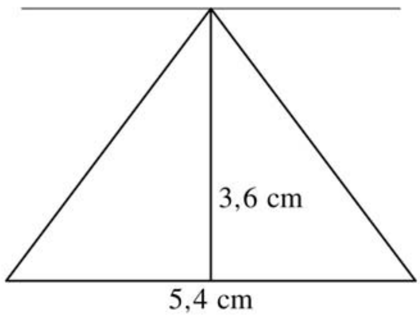
Megoldás:



2 különböző megoldás adódik

29. Egy egyenlőszárú háromszög alakú padláshomlokzat méretei: a padlás magassága 3,6 m, a ház szélessége 5,4 m. Szerkeszd meg a homlokzat 1:100 arányban kicsinyített rajzát!

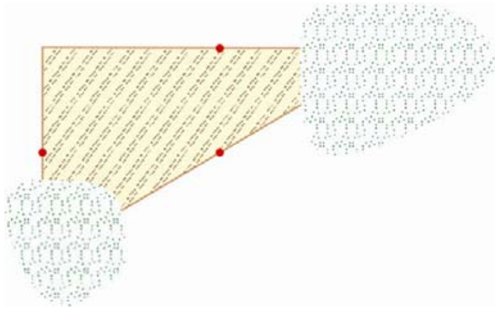
Megoldás:



30. Igaz vagy hamis a következő állítás: ha a derékszögű háromszögben az átfogó felezőpontját összekötjük a derékszögű csúccsal, akkor két egyenlőszárú háromszög keletkezik?

Megoldás: Igaz, mert a háromszög oldalait alkotó szakaszok hossza a köré írható kör sugarával egyenlő.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatban a síkidomot téglalapba foglaljuk, és a téglalap területéből kivonjuk a négyzetrács segítségével megkapható derékszögű háromszögek területét. Ha nehezen megy a tanulóknak, célszerű az elsőt mintapéldaként közösen megoldani. A részfeladatokat csoportmunkában oldják meg a tanulók.



31. Petinek egy derékszögű háromszög alakú földterület kerületét és területét kell meghatároznia, azonban a mérést áthatolhatatlan bokros részek nehezítik. Szerencséjére a háromszög oldalfelező pontjait korábban meghatározták és egy-egy karóval megjelölték. Peti megmérte ezeknek a karóknak a távolságát egymástól: 13 m, 22 m és kb. 25,55 m. Hogyan határozhatók meg ezekből a keresett adatok, és mekkora a földterület kerülete?

Megoldás: A középvonalak hosszát mérte meg, amelynek hossza az oldalak fele.

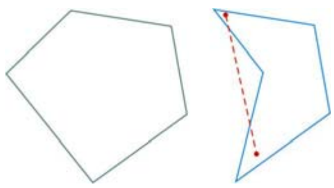
A terület a befogókból: $T=\dfrac{a\cdot b}{2}=\dfrac{2\cdot 13\cdot 2\cdot 22}{2}=572\ \mathrm{m}^2$.

A kerület az oldalakból: $K=2\cdot(13+22+25{,}55)=121{,}1$ m.

IV. Sokszögek és négyszögek

Már általános iskolában megismerkedtünk a négyszögekkel, sokszögekkel. Tekintsük át ezeket!

Konvex sokszög: bármely két belső pontját összekötő szakasz a sokszögön belül halad. A nem konvex, azaz **konkáv sokszögben** van két olyan pont, melynek összekötő szakasza a sokszögön kívül is halad.



Azokat a konvex sokszögeket, amelyeknek minden szöge és oldala egyenlő, **szabályos sokszögeknek** nevezzük. A szabályos sokszög egyik fontos tulajdonsága, hogy kör írható köré (azaz olyan kör, amely a sokszög minden csúcsán áthalad), és bele is (azaz olyan kör, amelynek a sokszög minden oldalegyenese az érintője).

Speciális négyszögek definíciói

Trapéz: olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.
Paralelogramma: olyan trapéz, amelynek van két párhuzamos oldalpárja.
Rombusz: olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő.
Téglalap: olyan paralelogramma, amelynek minden szöge derékszög.
Négyzet: olyan paralelogramma, amelynek minden oldala és szöge egyenlő.
Deltoid: olyan négyszög, amelynek van két egyenlő szomszédos oldalpárja.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladat megoldása diák-kvartett módszerrel javasolt.

32. Válaszd ki az igaz állításokat:

a) Minden paralelogramma trapéz is.

b) Minden téglalap rombusz is.

c) A rombuszok paralelogrammák is.

d) Minden rombusz deltoid.

e) Minden téglalap paralelogramma.

f) A négyzetek a téglalapok és a rombuszok halmazának metszetében helyezkednek el.

g) A négyszögben a belső szögek összege 360°.

h) Minden sokszögben a belső szögek összege 360°.

i) Minden konvex sokszögben a külső szögek összege 360°.

j) Van olyan trapéz, amelyik deltoid is.

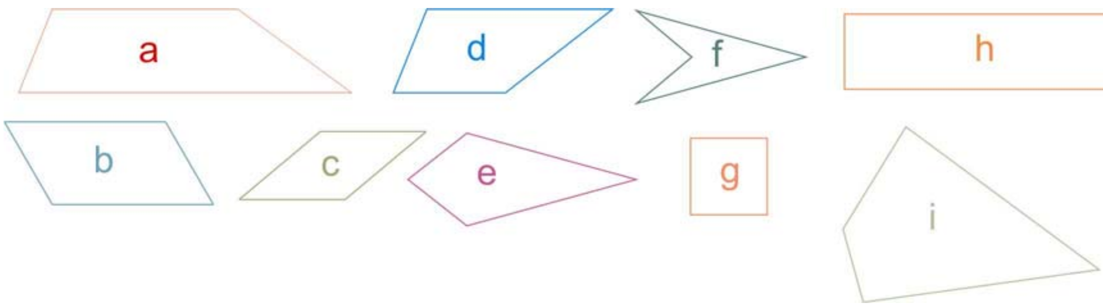
k) Van olyan rombusz, amelyik nem trapéz.

l) Minden trapézba írható (mind a négy oldalát érintő) kör.

m) Minden négyszögbe írható mind a négy oldalát érintő kör.

Megoldás: Igazak: a), c), d), e), f), g), i), j).

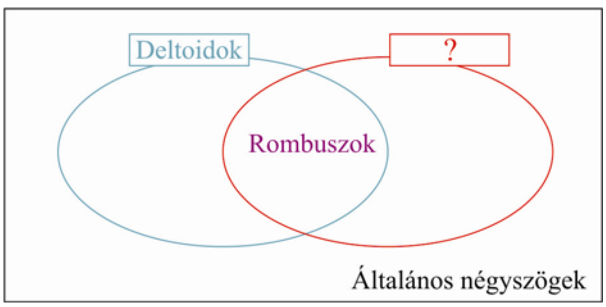
33. Milyen betűjelű négyszög deltoid, trapéz, paralelogramma, rombusz, illetve téglalap?



Megoldás:

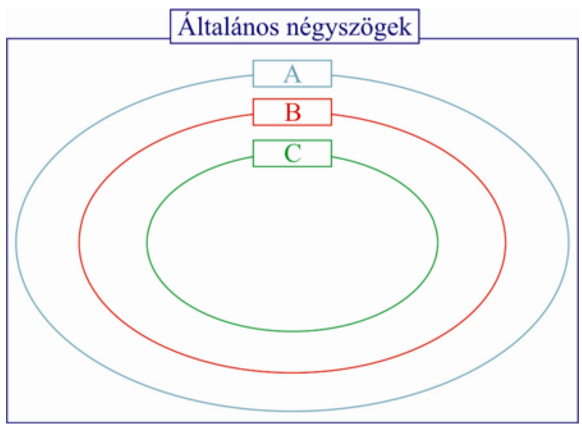
Deltoid: e,f,c,g; trapéz: a,b,c,d,g,h; paralelogramma: b,c,g,h; rombusz: c,g; téglalap: g,h.

34. A következő ábrán a négyszögeket csoportosítottuk az oldalak egyenlősége szerint. Mit írhatunk a ? helyére?



Megoldás: Paralelogrammák.

35. A következő ábrán a négyszögeket csoportosítottuk az oldalak párhuzamossága szerint. Mit írhatunk A, B és C helyére?



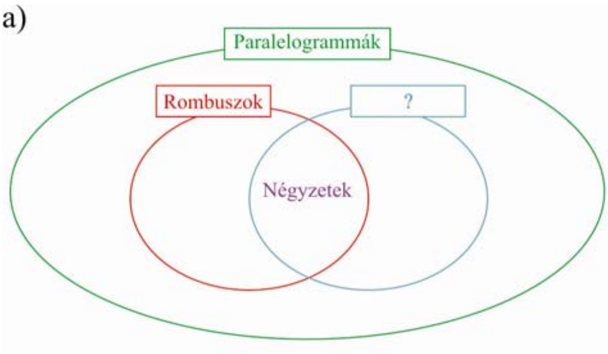
Megoldás:

A: trapézok, B: paralelogrammák, C: téglalapok.

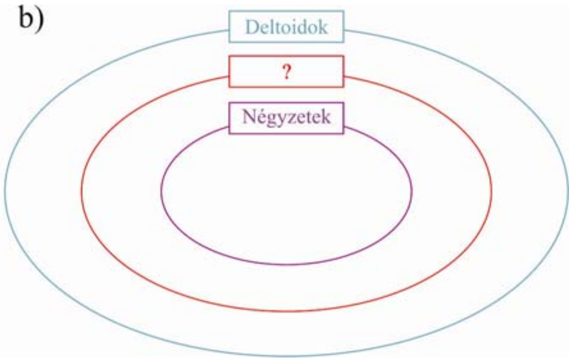
Módszertani megjegyzés: A kérdést más variációkban is feltehetjük (például nem kötjük ki, hogy az oldalak párhuzamossága szerint csoportosítunk). Ekkor több lehetőség is adódik megoldásként, a feladat nyílt kérdéssé válik.

36. A következő ábrán a négyszögeket csoportosítottuk. Mit írhatunk a ?-ek helyére?

a)



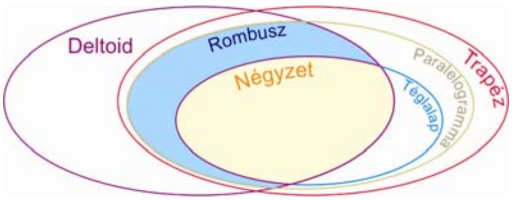
b)



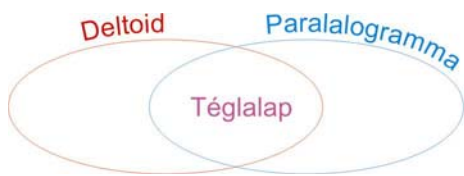
Megoldás: a) téglalapok; b) rombuszok.

37. Mi a véleményed a következő halmazábrákról?

a)



b)



Megoldás:

a) az ábra helyes, ábrázolja a speciális négyszögek összes csoportját; a Venn-diagram jelenlegi formájában a trapéznak az a része, amelyik deltoid, de nem paralelogramma, üres halmaz, vagyis a deltoidok és trapézok metszete kellene, hogy rombusz legyen;

b) nem jó, mert nem minden téglalap deltoid, ide a rombuszokat írhatnánk.

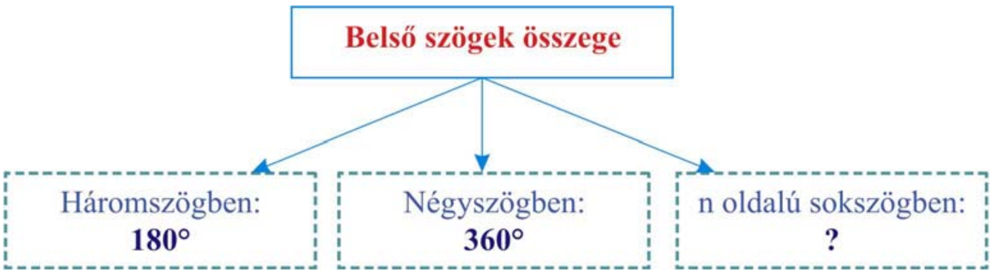
38. A speciális négyszögek közül melyik lehet, és melyik nem lehet konkáv négyszög? Válaszodat indokold!

Megoldás: Csak a deltoid lehet konkáv, mert csak annak lehet homorúszöge.

39. Igaz-e, hogy egy háromszög minden csúcsa egy síkban helyezkedik el? És egy négyszögé vagy ötszögé?

Megoldás: 3 pont egyértelműen meghatározza a síkot, de 2 még nem. Ezért a háromszög három csúcsa kijelöl egy síkot. 4 vagy több pont a térben már több síkot is kijelölhet. Ezek már nem feltétlenül síkidomok, hanem térbeli alakzatok is lehetnek.

A sokszögek szögei

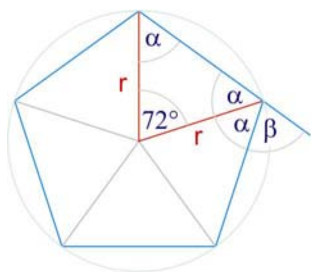


Mintapélda₁

Számítsuk ki a szabályos ötszög belső és külső szögeit, valamint ezek összegét!

Megoldás:

5 egybevágó, egyenlőszárú háromszög található az ötszög köré írható kör középpontjánál, így egy középponti szög nagysága $\frac{360°}{5} = 72°$. A belső szög $2 \cdot \alpha = 180° - 72° = 108°$. A külső szög $180° - 108° = 72°$. A belső szögek összege így $5 \cdot 108° = 540°$, a külső szögek összege $5 \cdot 72° = 360°$.

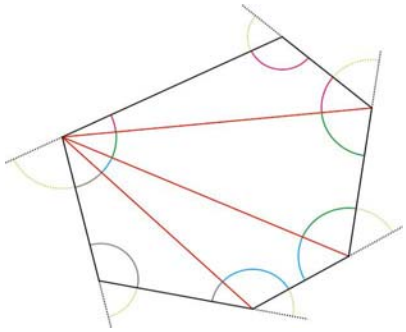


Mintapélda₂

Mennyi a hatszög belső szögeinek összege?

Hány átló húzható egy 6 oldalú sokszög egy csúcsából?

Megoldás:



Bontsuk háromszögekre a hatszöget.

Húzzunk egy csúcsból átlókat a hatszög csúcsaiba!

A hatszögnek 6 csúcsa van.

Az 6 csúcs közül 1 csúcsból indulnak ki az átlók.

A 2 szomszédos csúcshoz nem húzható átló, hiszen azokat egy-egy oldal köti össze azzal a csúccsal, amelyből az átlók indulnak. Tehát a hatszögben egy csúcsból (6 – 3) = 3 átló húzható. Ez a 3 átló (6 – 2) = 4 háromszögre bontja a hatszöget. Minden háromszög szögeinek összege 180°. Ezért a hatszög belső szögeinek az összege $4 \cdot 180° = 720°$.

Általánosan is igaz: egy n oldalú sokszög egy csúcsából $n-3$ átló húzható, ami a sokszöget $n-2$ kis háromszögre bontja. A sokszög szögösszege épp ezen kis háromszögek belső szögeinek összege.

Az *n* oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$.

A belső és a külső szögek 180°-ra egészítik ki egymást. A külső szögek összegét úgy kapjuk, hogy $n \cdot 180°$-ból kivonjuk a belső szögek összegét: $n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°$.

Az *n* oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege: 360°.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következő feladatokban a szögek számításával kapcsolatos alapfeladatokat oldják meg a tanulók. Ajánlott módszer a diák-kvartett: javasolt a feladatok első részét feladni tanórán, a többit pedig egyéni feldolgozásra kijelölni.

40. Számítsd ki a szabályos sokszög szögeit és szögösszegét, ha csúcsainak száma:

a) 8; b) 10; c) 15.

Megoldás: a) 135° és 1080°; b) 144° és 1440°; c) 156° és 2340°.

41. Egészítsd ki a szabályos sokszögre vonatkozó táblázatot!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
csúcsok száma	6	10	n					
egy belső szög nagysága				150°	160°			
egykülső szög nagysága						40°		α
belső szögek összege							540°	

Megoldás:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
csúcsok száma	6	10	n	12	18	9	5	$360/\alpha$ *
egy belső szög nagysága	120°	144°	$180° - 360°/n$	150°	160°	140°	108°	$180° - \alpha$
egy külső szög nagysága	60°	36°	$360°/n$	30°	20°	40°	72°	α
belső szögek összege	720°	1440°	$(n-2)\cdot 180°$	1800°	2880°	1260°	540°	$(360/\alpha - 2)\cdot 180°$

* Mivel a csúcsok száma $n \geq 3$egész, ezért α osztója 360-nak: $\alpha \in$ {1°; 2°; 3°; 4°; 5°; 6°; 8°; 9°; 10°; 12°; 15°; 18°; 20°; 24°; 30°; 36°; 40°; 45°; 60°; 72°; 90°; 120°}

42. Mekkorák a trapéz hiányzó szögei, ha két szemközti szöge

a) 70° és 100°; b) 30° és 120°; c) 40° és 90°?

Megoldás: a) 110° és 80°; b) 150° és 60°; c) 140° és 90°.

43. A rombusz egyik szöge 42°-os. Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?

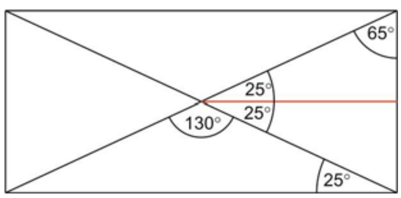
Megoldás: 21° és 69°.

44. A téglalap oldala és az átló 21°-os szöget zárnak be. Mekkora a két átló által bezárt szög?

Megoldás: A téglalap adott oldallal párhuzamos középvonalát behúzva a keletkező váltószögek miatt 42°.

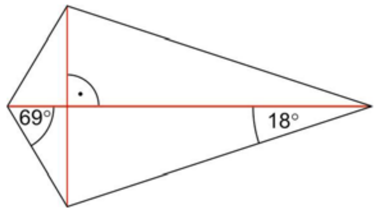
45. Egy téglalapban az átlók 50°-os szöget zárnak be egymással. Mekkorák az átló és az oldalak hajlásszögei?

Megoldás: 65° és 25°.



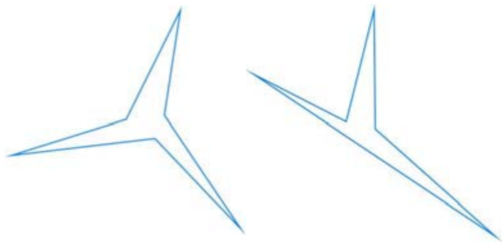
46. Egy deltoidban a két szemközti szög 36° és 138°. Mekkora a többi szög, és mekkora szögeket zárnak be az átlók az oldalakkal?

Megoldás: Az ábra elkészítése után a derékszögű háromszögek szögeivel számolva a következő eredményeket kapjuk: 93°, 93°, 18°, 69°, 72°, 21°.



47. Egy ötszögben legfeljebb hány konkáv szög lehet? És egy hatszögben? Készíts rajzot is!

Megoldás: A konvex sokszögek belső szögösszegére vonatkozó tételt a konkáv sokszögek esetén is használhatjuk. Három konkáv szög összege 540°-nál több, de egy ötszögben a belső szögek összege $(n-2)\cdot 180° = 540°$. Ezért legfeljebb két konkáv szög lehet egy ötszögben.



Hatszögben már lehet három konkáv szög is, annál több nem.

Mintapélda$_3$

Válaszoljunk a következő kérdésekre!

a) Melyik négyszögben felezik az átlók a szögeket?

b) Melyik négyszögben felezik egymást merőlegesen az átlók?

c) Melyik négyszögekben felezik egymást az átlók?

Megoldások:

a) Deltoidban a szimmetriaátló; rombuszban, négyzetben mindkét átló.

b) Deltoidban, és mindenben, ami deltoid: rombuszban, négyzetben.

c) Mindenben, ami paralelogramma: általános paralelogrammában, téglalapban, rombuszban, négyzetben. Azaz a középpontosan szimmetrikus négyszögekben.

Módszertani megjegyzés:

Típushiba, hogy a trapézt mondják. Pedig ott az alapok arányában osztják egymást az átlók.

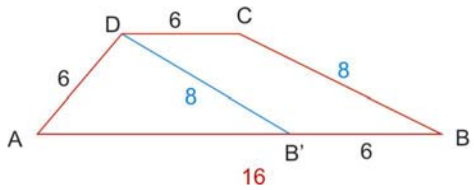
Mintapélda$_4$

Szerkesszünk trapézt, ha adottak az oldalai: az alapok 16 cm és 6 cm, a szárak 6 cm és 8 cm.

Megoldás:

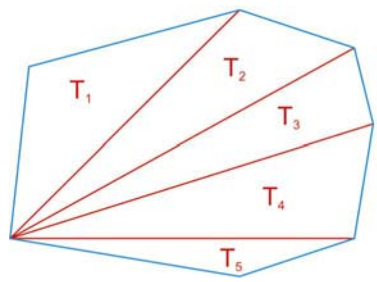
Először rajzoljuk meg azt a háromszöget, ($AB'D\Delta$) amelynek alapja 16 – 6 = 10 (cm) és oldala a trapéz két szárával egyezik meg!

Ezután hoszabbítsuk meg a háromszög alapját 16 cm hosszúra (B pont), majd húzzunk ezzel párhuzamost a D ponton keresztül, és mérjünk fel erre 6 cm-t (C pont). Az $ABCD$ négyszög a keresett trapéz.



A konvex sokszögek területe

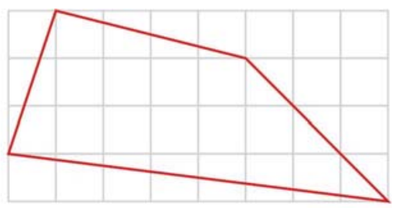
A konvex sokszögek területének kiszámítását visszavezetjük a háromszögek területének kiszámítására: egy csúcsából kiinduló átlókkal háromszögekre bontjuk a sokszöget, ezeknek a területeit kiszámoljuk, majd összeadjuk.



$$\boxed{T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5}$$

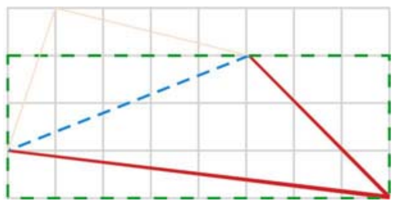
Mintapélda$_5$

Számítsuk ki az ábrán található négyszög területét, ha a négyzetrács egységnyi oldalú négyzetekből áll!



Megoldás:

Két háromszögre bontjuk a négyszöget, és külön számoljuk a területeket:



$$T_1 = 5\cdot 3 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\right),$$

$$T_1 = 15 - \frac{1}{2}\cdot (3+4+10) = 6{,}5.$$

$$T_2 = 8\cdot 3 - \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8\right),$$

$$T_2 = 24 - \frac{1}{2}\cdot (10+9+8) = 10{,}5.$$

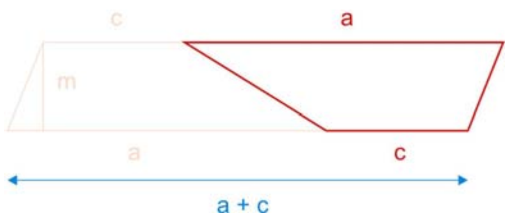
$T = T_1 + T_2 = 17$ területegység.

A speciális négyszögek területei

- **Deltoid** területe: a két átló szorzatának a fele: $T = \dfrac{e\cdot f}{2}$, ahol e és f a deltoid átlói.

  Hasonlóan számíthatjuk ki a rombusz és a négyzet területét, hisz azok is deltoidok.

- **Trapéz** területe: a párhuzamos oldalak összegének a felét szorozzuk a trapéz magasságával: $T = \dfrac{a+c}{2}\cdot m$.

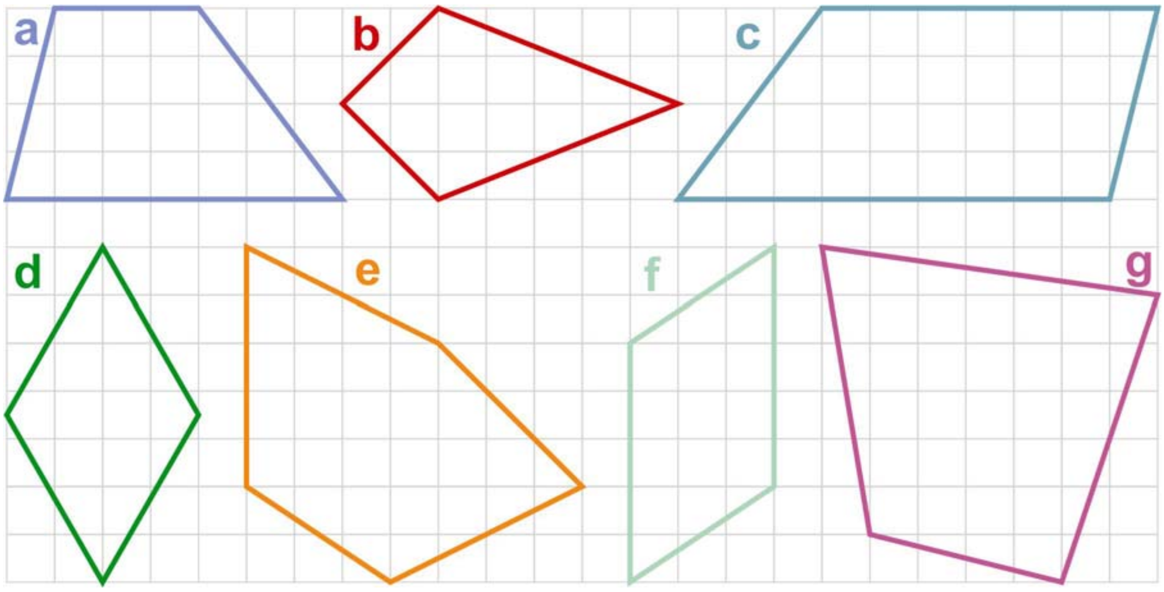


- **Paralelogramma területe**: az oldal és a hozzá tartozó magasság szorzata: $T = a\cdot m_a$

- **Téglalap** területe:, vagyis két szomszédos oldalának szorzata: $T = a\cdot b$.

- **Négyzet területe**: a két oldal hosszának szorzata: $T = a^2$. (Kiszámítható $T = \dfrac{d^2}{2}$ képlettel is, ahol d a négyzet átlója.)

48. Számítsd ki az ábrán látható sokszögek területeit rácsegységben(a kis négyzetek oldalhossza 1 egység)!



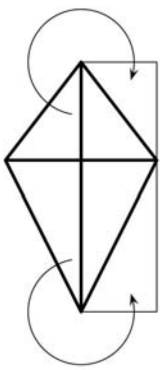
Megoldás: a) 20; b) 14; c) 32; d) 14; e) 27,5; f) 15; g) 33,5.

49. Rajzold le, hogyan lehet átdarabolással készíteni

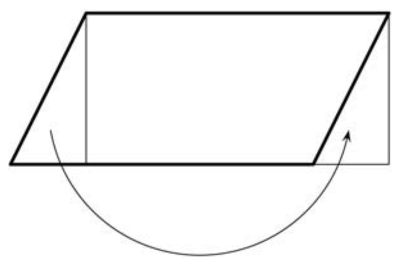
a) deltoidból téglalapot; b) paralelogrammából téglalapot;

c) trapézból téglalapot; d) trapézból paralelogrammát.

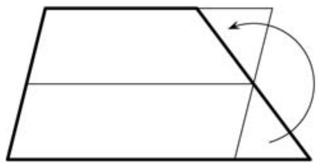
Megoldás:



a)



b)

c)  d) 

50. Határozd meg a deltoid területét, ha a hosszabb átlója 20 cm, amit a 8 cm-es másik átló 1 : 3 arányban oszt!

Megoldás: 80 cm^2.

51. Töltsd ki a táblázatot, amelyben *a* és *b* a téglalap szomszédos oldalai, *K* a kerülete, *T* a területe!

a	*b*	*K*	*T*
3 cm	5 cm		
400 cm		20 m	
	0,03 m	11,3 cm	
430 cm			25,37 m^2

Megoldás:

a	*b*	*K*	*T*
3 cm	5 cm	16 cm	15 cm^2
400 cm	6 m	20 m	24 m^2
2,6 cm	0,03 m	11,2 cm	7,8 cm^2
430 cm	5,9 m	20,4 m	25,37 m^2

52. Egy trapéz alapjai 14,6 cm, illetve 63 mm, a magassága 5 cm. Mekkora a területe?

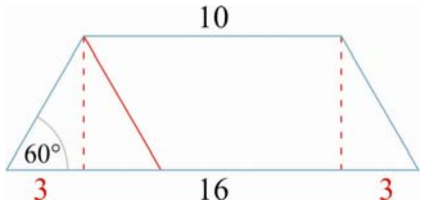
Megoldás: 52,25 cm^2.

53. Egy trapéz területe 40 cm^2, magassága 40 mm, egyik alapja 12 cm. Mekkora a másik alapja?

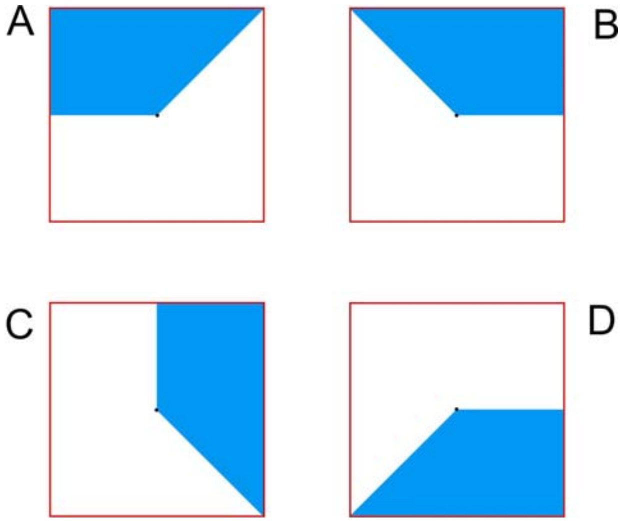
Megoldás: 8 cm.

54. Egy trapéz alapjai 10 cm, illetve 16 cm. A hosszabb alapon fekvő szögei 60°-osak. Mekkora a kerülete?

Megoldás: A magasságot behúzva a kapott háromszög kiegészíthető szabályos háromszöggé, amelynek oldalhossza 6 cm. Így a kerület az oldalak összegéből 38 cm.

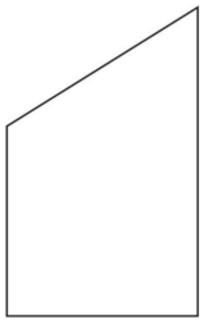


55. Az ábrán látható négyzetet 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányba elforgatjuk a középpontja körül. Melyik ábra mutatja az elforgatás eredményét?



Megoldás: B.

56. Egy trapéz alakú terem méretei: derékszögű szára 6 m, alapjai 8 m és 14 m.



a) Számítsd ki, hány méter szőnyegpadlót kell vásárolni a terem lefedéséhez, ha a szőnyegpadlót 3 méter szélességben árulják!

b) Hány csomag parkettát kell vásárolni, ha a termet parkettázni akarják? A parketta szálának méretei 1380 mm · 195 mm, továbbá 10 szál van egy csomagban, és a parkettaszálakat az alapokkal párhuzamosan rakják le, továbbá +10%-ot akarnak vásárolni tartalékba.

Megoldás:

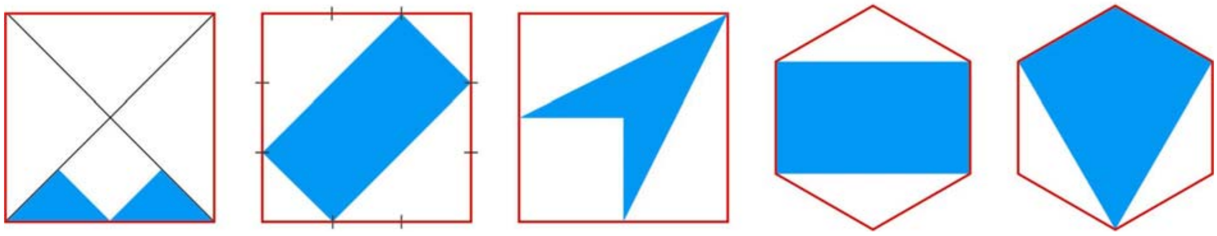
a) A szobába az adatok alapján a szőnyegpadló két csíkban helyezhető el, így a teljes lefedéshez $2k = 22$, azaz 22 m hosszú szőnyegre van szükség.

b) A parkettát az egyszerűség kedvéért érdemes területtel számolni, ezt a +10% is megengedi. A terem területe $\frac{14+8}{2} \cdot 6 = 66\,\mathrm{m}^2$, egy szál területe 1,38 · 0,195 = 0,2691 m^2. A kettő hányadosa 245,26, ami azt jelenti, hogy 24,6 · 1,1 = 27 csomaggal vásároljunk parkettát.

Megjegyzés: ha nem területtel számolunk, marad a sorozattal vagy a próbálgatással való megoldás.

57. Hány százaléka a színezett rész területe a nem színezett rész területének, illetve az egész síkidom területének?

a) b) c) d) e)



Megoldás:

A kék és az egész területének aránya: a) 12,5% $\left(\frac{1}{8}\right)$; b) 44,4% $\left(\frac{4}{9}\right)$; c) 25% $\left(\frac{1}{4}\right)$; d) 66,7 % $\left(\frac{2}{3}\right)$; e) 66,7% $\left(\frac{2}{3}\right)$. A kék és a fehér aránya: a) 14,3% $\left(\frac{1}{7}\right)$; b) 80% $\left(\frac{4}{5}\right)$; c) 33,3% $\left(\frac{1}{3}\right)$ d) 200% (2); e) 200% (2).

Módszertani megjegyzés: A sokszögek feldolgozását a speciális négyszögekkel kapcsolatos ***15.4 feladatlappal*** zárjuk. Minden csoport kap egy tesztet. A teszt értékelése az idő és a találatok alapján történik.

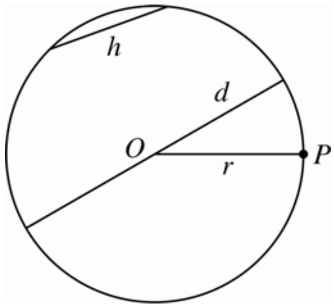
15. 4 feladatlap:

Egészítsd ki a meghatározást a megfelelő speciális négyszög nevével!

1.	Olyan **négyszög**,	amelynek **van párhuzamos oldalpárja**:	
2.	Olyan **négyszög**,	amelynek **legalább 1 átlója szimmetriatengely**:	
3.	Olyan **trapéz**,	amelynek **van derékszöge**:	
4.	Olyan **trapéz**,	melynek **alapokon fekvő szögei páronként egyenlők**	
5.	Olyan **négyszög**,	amelynek **van oldalfelező szimmetriatengelye**:	
6.	Olyan **trapéz**,	amelynek **másik oldalpárja is párhuzamos**:	
7.	Olyan **négyszög**,	amelynek **van szimmetria-középpontja**:	
8.	Olyan **derékszögű trapéz**,	amelynek **másik oldalpárja is párhuzamos**:	
9.	Olyan **húrtrapéz**	amelynek **másik oldalpárja is párhuzamos**:	
10.	Olyan **paralelogramma**,	amelynek **van derékszöge**:	
11.	Olyan **trapéz**,	amelynek **legalább 1 átlója szimmetriatengely**:	
12.	Olyan **paralelogramma**,	amelynek **szomszédos oldalai egyenlők**:	
13.	Olyan **négyszög**,	amelynek **oldalai egyenlők**:	
14.	Olyan **deltoid**,	amelynek **van párhuzamos oldalpárja**:	
15.	Olyan **derékszögű trapéz**,	amelynek **legalább 1 átlója szimmetriatengely**:	
16.	Olyan **téglalap**,	amelynek **szomszédos oldalai egyenlők**:	
17.	Olyan **húrtrapéz**	amelynek **legalább 1 átlója szimmetriatengely**:	
18.	Olyan **rombusz**,	amelynek **van derékszöge**:	
19.	Olyan **deltoid**,	amelynek **van 2 szomszédos derékszöge**:	

Megoldások: 1: trapéz; 2: deltoid; 3: derékszögű trapéz; 4 – 5: szimmetrikus trapéz; 6 – 7: paralelogramma; 8 – 10: téglalap; 11 – 14: rombusz; 15 – 19: négyzet.

V. A kör és részei



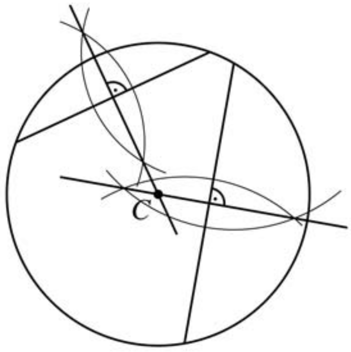
Foglaljuk össze, mit tudunk a körről!

A körvonal minden pontja egyenlő távol van a kör középpontjától. Ez a távolság a sugár, jele: *r*.

A körvonal két pontját összekötő szakasz a kör húrja (*h*).

A kör leghosszabb húrja a kör átmérője, jele: *d*.

Mintapélda$_6$

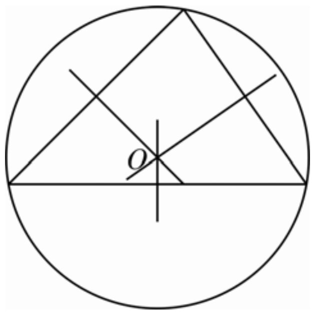


Szerkesszük meg egy kör két húrjának felezőmerőlegesét! Mit tapasztalunk?

Megoldás:

A két húr felezőmerőlegesei a kör középpontjában metszik egymást.

Ez általánosan is igaz: a kör két egymással nem párhuzamos húrjának felezőmerőlegese a kör középpontjában metszi egymást.



Ezzel a módszerrel meg tudjuk keresni bármely kör középpontját. Innen következik az is, hogy minden háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban, a köré írható kör középpontjában találkoznak.

A kör kerülete a körvonal hossza,

a kör területe a körvonal által határolt síkrész területe.

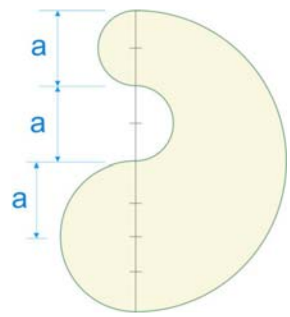
A jól ismert képletek szerint:

A kör kerülete: $K = 2r\pi$.

A kör területe: $T = r^2\pi$.

Mintapélda₇

Számítsuk ki a következő síkidom területét és kerületét, ha a = 12 cm!



Megoldás:

A síkidom különböző sugarú, 6 cm, 12 cm és 24 cm sugarú félkörökből tevődik össze. A terület kiszámításakor figyelembe vesszük, hogy átdarabolással a legnagyobb félkör kiegészíthető a legkisebbel, vagyis a síkidom területe:

$$T = \frac{24^2\pi}{2} + \frac{12^2\pi}{2} \approx 1131\,\text{cm}^2.$$

A kerületnél félkörívek hosszával számolunk: $K = \frac{2\cdot 24\cdot\pi}{2} + 2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot\pi}{2} + \frac{2\cdot 12\cdot\pi}{2} =$

$= 150{,}8$ cm.

58. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek kerülete

a) 628 cm; b) 100 cm; c) 893 m; d) 75 dm ?

Megoldás: a) 100 cm; b) 15,92 cm; c) 142,19 m; d) 11,94 dm.

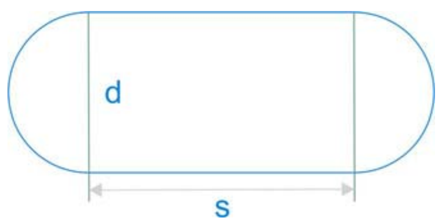
59. Mekkora a kör kerülete, ha területe

a) 200 cm^2; b) 2,85 dm^2; c) 300 m^2; d) 0,256 m^2 ?

Megoldás: a) 50,1 cm; b) 5,98 dm; c) 61,4 m; d) 1,79 m.

60. Számítsd ki az ábrán látható síkidom hiányzó adatait! Egy téglalapot félkörökkel egészítettek ki. T jelenti az egész síkidom területét, K az egész kerületét.

	K	***T***	***d***	***s***
a)			5 cm	15 cm
b)		300 cm^2	10 cm	
c)	170 m			25 m
d)	400 m			100 m

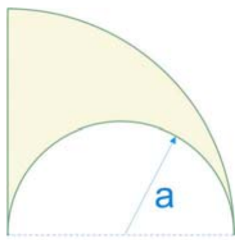


Megoldás:

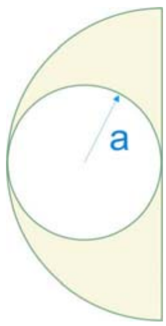
	K	*T*	*d*	*s*
a)	*45,7* cm	*94,6* cm^2	5 cm	15 cm
b)	*75,7* cm	300 cm^2	10 cm	*22,2* cm
c)	170 m	*2100* m^2	*38,2* m	25 m
d)	400 m	*9550* m^2	63,69 m	100 m

61. Számítsd ki a színezett részek területét és kerületét (a = 30 mm)!

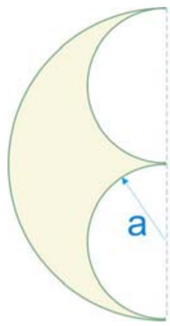
a)



b)



c)



Megoldás: a) T=1413,7 mm^2, K=248,50 mm; b) T=2827,4 mm^2, K=496,99 mm;
c) T=2827,4 mm^2, K=376,99 mm.

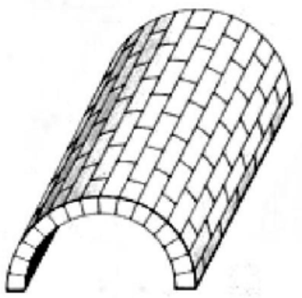
62. Egy kör alakú udvar közepére egy szobrot akarnak állítani. Hogyan keressék meg az udvar középpontját?

Megoldás:

Kihasználjuk, hogy a húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Kijelölünk 3 pontot az udvar határán, ezeket összekötjük egy kötéllel, úgy, hogy megkapjuk a kör két húrját. Ezek felezőpontjában leszúrunk egy-egy cöveket ezekhez is kötünk egy-egy kötelet. Ezeket a húrokra merőlegesen kifeszítjük. (A derékszöget egy téglalap alakú doboz segítségével közelítően meghatározhatjuk) Ahol a két kötél vonala metszi egymást, ott lesz a kör középpontja

A kör részeinek elnevezése

A következő ábrák a kör részeinek gyakorlati felhasználásából mutatnak példákat.

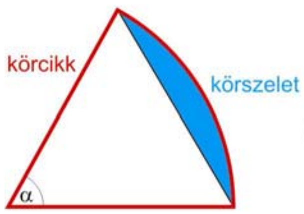


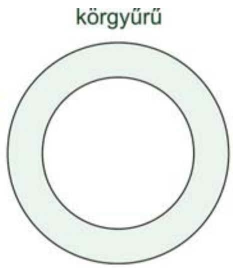
A hétköznapi életben sok helyen alkalmazzák a kör részeit:

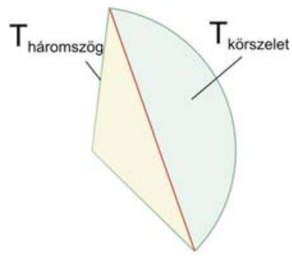
- a gumi- és betongyűrűk, csövek keresztmetszete **körgyűrű** alakú;
- a **körgyűrűcikket** az építészetben: a megfelelően faragott kövekből összeállított boltozat akár kötőanyag nélkül is megtart falakat (például korai gótikus épületekben), hidakat, födémeket.

A kör részeivel kapcsolatban az alábbi elnevezéseket használjuk:

- középponti szög (α),
- körcikk (i a körív hossza),
- körgyűrű (R_1 a belső, R_2 a külső kör sugara),
- körgyűrűcikk,
- körszelet.







$$T_{körcikk} = \frac{i \cdot r}{2}$$

$$T_{\text{körgyűrű}} = \left(R_2^2 - R_1^2\right)\pi$$

$$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{háromszög}}$$