MATEMATIKAI KOMPETENCIATERÜLET „C”

Matematika

11. évfolyam

TANULÓK KÖNYVE

Készítette: Kovács Károlyné

A kiadvány KHF/457-7/2009. engedélyszámon 2009.05.21. időponttól
tankönyvi engedélyt kapott
Educatio Kht. Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterv

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült, a suliNova oktatási programcsomag részeként létrejött tanulói információhordozó. A kiadvány sikeres használatához szükséges a teljes oktatási programcsomag ismerete és használata. A teljes programcsomag elérhető: www.educatio.hu címen.

Szakmai vezető: Oláh Vera

Grafika: dr. Fried Katalin

Alkotószerkesztő: Oláh Judit

Lektor: Pálmay Lóránt

Felelős szerkesztő: Teszár Edit

H-CMAT1101

Educatio Kht. 2008.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Tantárgypedagógiai szakértő: Kónya István
Tudományos-szakmai szakértő: dr.Marosváry Erika
Technológiai szakértő: Csonka Vilmosné

TARTALOM

A matematikai kompetenciaterület 11. évfolyamos „C" moduljai feladatmegoldásokon keresztül fejlesztik a tanulók képességeit. A „Tanulók könyve" tanórán kívüli foglalkozásaihoz a tanár a „Tanári útmutatót" használja. Ezek a foglalkozások szorosan kapcsolódnak a tanórák tananyagához, kifejezetten a tanult tananyag elmélyítését, a középszintű érettségire való felkészülést szolgálják.

A nehezebb feladatokat *-gal jelöltük.

1. MODUL

MENNYIRE LEHETSÉGES?

Készítette: Kovács Károlyné

I. ESEMÉNY, ESEMÉNY HÁTÁN

1. Az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}$ törtek mindegyikét egy-egy cédulára írjuk. Az így kapott 19 cédula közül egyet véletlenszerűen kihúzunk.

Az *A* esemény pontosan akkor következik be, ha a kihúzott cédulán lévő szám tizedestört-alakja véges, a *B* esemény pedig pontosan akkor, ha a kihúzott cédulán lévő szám reciproka prímszám.

I. Hányféleképpen következhet be az *A* esemény?

II. Hányféleképpen következhet be a *B* esemény?

III. Fogalmazd meg, hogy milyen eseményeket jelölnek az alábbi események, és számítsd ki, hogy hányféleképpen következhetnek be!

a) AB b) $A+B$ c) $\overline{A}$ d) $A\overline{B}$ e) $\overline{A}+B$ f) $\overline{AB}$

2. Hat pénzérmét dobtunk fel. Válaszd ki a biztos és a lehetetlen eseményeket! Választásodat indokold!

a) A fejek száma több mint az írásoké.

b) Nincs fej köztük.

c) A fejek és az írások száma is páros

d) A fejek és az írások száma is prím.

e) A fejek száma hárommal több az írásokénál.

f) A fejek és írások számának különbsége páros szám.

3. Andrásnak Balázs a következőt ajánlja: Ő mond két játékszabályt, ezek közül András választ, hogy melyik szerint fognak játszani. (Minden játék után van nyertes.)

A szabályok:

Az első szerint mindketten feldobnak egy-egy dobókockát, és András nyer, ha kisebbet dobott, mint Balázs. A másik szabály szerint egyikük három érmét feldob, és András nyer, ha a fejek száma több az írások számánál.

Mit tanácsolnál Andrásnak, melyik szabályt válassza?

4. Kata három barátnőjét, Annát, Borit és Cilit várja látogatóba. Jelölje *A*, *B*, *C* rendre azokat az eseményeket, hogy Anna, Bori illetve Cili meglátogatja Katát!

I. Mit jelentenek az alábbi események: $A+B$, $A\cdot B$, $B\cdot\overline{C}$?

II. Add meg az eseményalgebra jelöléseivel az alábbi eseményeket!

a) Mindhárman meglátogatják Katát.

b) Barátnői közül van Katának látogatója.

c) Legalább két látogatója van Katának.

d) Legfeljebb két látogatója van .

e)* Pontosan egy látogatója van.

Az alábbi tíz feladat mindegyikében 4 válasz van, és közülük pontosan egy igaz. Add meg az általad igaznak vélt választ, és karikázd be a betűjelét!

Minden feladatban ugyanazt az eseményt jelentik a következők:

A: Anna szemüveges; *B*: Bori szemüveges; *C*: Cili szemüveges.

5. Melyik jelöli azt az eseményt, hogy mindhárman szemüvegesek?

a) $A+B+C$ b) $A\cdot B\cdot C$ c) $A\cdot B+C$

d) Az esemény nem írható fel sem az a), sem a b), sem a c) válasz szerint.

6. Melyik jelöli azt az eseményt, hogy Anna szemüveges, de Cili nem?

a) $A\cdot\overline{C}$ b) $\overline{A\cdot C}$ c) $A+\overline{C}$

d) Az esemény nem írható fel sem az a), sem a b), sem a c) válasz szerint.

7. Melyik jelöli azt az eseményt, hogy Anna szemüveges, ám Bori és Cili egyike sem?

a) $A+\overline{B}+\overline{C}$ b) $A\cdot\overline{B\cdot C}$ c) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

d) Az esemény nem írható fel sem az a), sem a b), sem a c) válasz szerint.

8. Mit jelent az $A(B+C)$ esemény?

a) Ha Bori szemüveges, akkor Cili nem.

b) Anna és a másik két lány közül az egyik szemüveges.

c) A lányok között legalább két szemüveges van.

d) Annával együtt legalább ketten szemüvegesek.

9. Mi az $A+B+C$ esemény jelentése?

a) Ha Bori szemüveges, akkor Anna nem.

b) Közülük pontosan egy szemüveges.

c) Legalább az egyikük szemüveges.

d) Vagy csak Anna, vagy csak Bori, vagy csak Cili szemüveges.

10. Mit jelent az $A \cdot \overline{B} \cdot C$ esemény?

a) Anna szemüveges, a többiek nem.

b) csak Anna és Cili szemüveges.

c) Anna szemüveges, és Bori és Cili egyike is.

d) közülük pontosan egy nem szemüveges.

11. Hogyan fogalmaznád meg az $\overline{A \cdot B \cdot C}$ eseményt?

a) egyikük sem szemüveges.

b) pontosan ketten szemüvegesek.

c) pontosan egy szemüveges közülük.

d) a három lány között van olyan, aki nem szemüveges.

12. Az $\overline{A + B + C}$ esemény jelentése:

a) Közülük pontosan egy szemüveges.

b) Közülük senki sem szemüveges.

c) Közülük pontosan ketten szemüvegesek.

d) Nem felel meg sem az a), sem a b), sem a c) válaszoknak.

13. Mit takar az $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ állítás?

a) Van olyan köztük, aki nem szemüveges.

b) Egyikük sem magas.

c) Pontosan egy olyan van, aki nem szemüveges.

d) Nem felel meg sem az a), sem a b), sem a c) válaszoknak.

14. Jelölje *A, B, C, D* a következő eseményeket: *A*: András éhes, *B*: Balázs éhes, *C*: Csaba éhes, *D*: Dani éhes. Ekkor az $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}}$ esemény jelentése:

a) Nincs éhes a fiúk között.

b) Van éhes a fiúk között.

c) Mind a négyen éhesek.

d) Nem felel meg sem az a), sem a b), sem a c) válaszoknak.

II. LOTTÓ ÉS TÁRSAI

„HÚZHATOD!” szerencsejáték leírása: A szelvényen egy 4x5-ös mezőben 1-20-ig vannak feltüntetve a számok. A játékosnak a szelvényen hat számot kell megjelölnie. A sorsoláson a 20 szám közül 6 számot húzunk ki. Nyereményre jogosít az a szelvény, amelyen legalább 2, legfeljebb 6 találatot ért el a fogadó.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

1. Határozd meg, hogy az *n* darab sorsoláson melyik szám milyen gyakorisággal fordult elő!

Szám:	Gyakoriság:	Szám:	Gyakoriság:	Szám:	Gyakoriság:	Szám:	Gyakoriság:
1		**6**		**11**		**16**	
2		**7**		**12**		**17**	
3		**8**		**13**		**18**	
4		**9**		**14**		**19**	
5		**10**		**15**		**20**	

2. Számold ki, hogy hány szelvény kitöltése esetén lenne biztosan 6 találatunk!

3. Ezen a héten egy szelvénnyel játszom. Mekkora a valószínűsége, hogy a találataim száma

a) hat? b) öt? c) négy? d) három? e) kettő? f) egy? g) nulla?

4. Ezen a héten is egy szelvénnyel játszom. Mekkora a valószínűsége, hogy nyertes leszek?

5. Egy baráti társaság külön játékot játszik a „HÚZHATOD!” szelvényeinek felhasználásával. A játékosoknak most is hat számot kell megjelölniük, de az ő játékukban sorsolás a következőképpen történik: Négy szám közül (I, II, III, és IV) húznak ki hatszor visszatevéssel egy-egy számot. A kihúzott római számok a szelvény oszlopait jelölik. Nyertes az a szelvény, amelyen a megjelölt számok éppen azokban az oszlopokban vannak, amelyeket a sorsoláskor kihúztak. Pl. Ha a sorsoláskor kihúzott számok: I, I, IV, III, III, II., ekkor nyertes szelvény például a: 3, 5, 6, 8, 11, 17 számokkal megjátszott, hiszen két szám (az 5 és 17) az I. oszlopban szerepel, kettő(a 3 és 11) a III.-ban, egy szám (a 6-os) a II.-ban és egy szám (a 8-as) a IV.-ben. Ha a sorsoláskor hatszor ugyanazt a számot húzzák ki, a sorsolás érvénytelen, és ekkor újból végrehajtják a sorsolást.

a) A példában szereplő sorsolás esetén (I, I, IV, III, III, II) legfeljebb hány különböző nyertes szelvény lehet?

b)* Ha két érvényes sorsolásban a kisorsolt római számok csak sorrendben különböznek, akkor a két sorsolás azonos. Hányféle lehet az érvényes sorsolások száma?

c)* Ha minden héten egyszer sorsolnak, előfordulhat-e, hogy másfél éven keresztül nincs két olyan sorsolás, amelyen azonos a sorsolás eredménye?

d)* Mekkora a valószínűsége, hogy egy sorsolás érvénytelen lesz?

2. MODUL
CSAK PERMANENSEN!

Készítette: Kovács Károlyné

I. LÁTÓMEZŐNKBEN AZ ÖT AZONOSSÁG

1. Próbáld fejben kiszámolni az alábbi kifejezések tízes számrendszerbeli alakját!

a) $\frac{9^{16}}{3^{30}}$

b) $\frac{6^{24}}{2^{25}\cdot 3^{24}}$

c) $2^7\cdot 5^6$

d) $\frac{2^9\cdot 2^{20}}{8\cdot 4^{13}}$

e) $\frac{27^{13}}{9^{19}}$

f) $\frac{6\cdot 4^{12}}{2^{22}}$

g) $\frac{3^8}{3^7+3^8}$

h) $\frac{4^{10}+4^{10}}{4^9+4^9}$

2. Melyik a nagyobb? Döntésedet indokold!

a) $3\cdot 4^6$ vagy $11\cdot 2^{10}$

b) $12^{12}\cdot 4^{12}$ vagy 7^{24}

c) 24^{23} vagy 5^{46}

d) 90^{40} vagy $9\cdot 9^{79}$

e) $3\cdot 2^{21}+2^{22}$ vagy 8^8

3. Melyik szám 24. hatványával egyezik meg a $\frac{16^6\cdot 25^{12}}{4^{12}}$ kifejezés?

4. A hatványozás azonosságait számozzuk a következőképpen:

I. $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$ **II.** $\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$ **III.** $a^nb^n=(ab)^n$

IV. $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ **V.** $(a^n)^k=a^{nk}$

Az alábbiakban egy-egy kifejezést átalakítottunk a hatványazonosságok felhasználásával. Döntsd el, hogy az egyes esetekben mely azonosságokat használtunk fel, és az alkalmazott azonosság sorszámát írd az egyenlet mellé! (A kitevők egész számokat jelölnek.)

a) $2^{3x}=8^x$ b) $9\cdot 3^x=3^{x+2}$ c) $2^{x+1}\cdot 3^{x+1}=6^{x+1}$

d) $5^{2x+1}=5\cdot 25^x$ e) $4^{3x-1}=\frac{64^x}{4}$ f) $3^{2x-1}\cdot\frac{3^x}{9}=3^{3x-3}$

g) $4^{x+1} \cdot 2^{x} = 2^{3x+2}$

h) $\dfrac{25^{2x}}{5^{x}} = 5^{3x}$

i) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1} = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$

j) $50^{x} \cdot 4^{x+1} = 2^{3x+2} \cdot 5^{2x}$

5. Melyik szám 50-edik hatványával egyezik meg a $32^{10} \cdot 9^{25} \cdot (\sqrt{2})^{100}$ kifejezés?

6. Mivel egyenlő $\dfrac{6^{2x} \cdot 9^{x+4}}{4^{x} \cdot 81^{x+3}}$?

7. Egy apuka a kisfiának szemléltetni szeretné a Naprendszert. A Napot egy kb. 10 cm átmérőjű naranccsal modellezi. Ha ugyanilyen arányban kicsinyítené a Földet is, akkor mekkora átmérőjű tárgyat kellene választania? Mekkora sugarú körpályán kellene mozgatnia a „Földet” a „Nap” körül, ha a Nap–Föld távolságot is ugyanilyen arányban szeretné kicsinyíteni? (A közepes Nap–Föld távolság: $1{,}496 \cdot 10^{8}$ km. A Nap egyenlítőjének átmérője: $1{,}392 \cdot 10^{6}$ km, a Földé: $1{,}2756 \cdot 10^{4}$ km.)

8. Az arany atomjának átmérője kb. $3 \cdot 10^{-8}$ cm.

a) Hányszor érné körbe a Földet az egyenlítő mentén az az „aranyfonal”, amelyet 1 mol mennyiségű arany atomjainak „szoros”, egysoros egymás után illesztésével hoznánk létre? (A Föld sugara kb. 6378 km.)

b) Ha szorosan egymás mellé tekernénk az 1 mol mennyiségű arany atomjaiból készített „aranyfonalat” az egyenlítő köré, milyen széles aranyszalaghoz jutnánk?

9. Ha $2^{x} = a$ és $3^{x} = b$, akkor mivel egyenlő 36^{x}?

10. Ha $2^{x} = a$ és $3^{x} = b$, akkor mivel egyenlő $4^{x} + 2 \cdot 6^{x} + 9^{x}$?

11. Ha $2^{x} = 3$, akkor mivel egyenlő $(8^{x} - 4^{x})(2^{-x} + 1)$?

12. Ha $3^{x} = 2$ és $3^{y} = 5$, akkor mivel egyenlő $3^{y-x} + (3^{3x} - 3^{y})^{x}$?

13. Milyen *x* egész számra igaz az egyenlőség?

a) $2^x \cdot 8^x \cdot 16^x = 4^4$; b) $3^{2010} + 9^{1005} + 27^{670} = 3^x$;

c) $2 \cdot 5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 2^6 \cdot 5^x = 25$.

14. A 2-nek hányadik hatványával egyenlő $\sqrt{2^{100}}$?

15. Az $5^{(5^5)}$ ötödik gyöke mivel egyenlő?

II. TEREMTSÜNK RENDET!

1. Az alábbi 4 állítás mindegyike valós számok hatványaira vonatkozik. Melyik állítás hamis?

A: Negatív számnak értelmezzük a negatív egész kitevőjű hatványát.

B: Negatív szám nulladik hatványa pozitív.

C: Negatív számnak értelmezzük a $\frac{2}{4}$ kitevőjű hatványát.

D: Negatív számnak a negatív páratlan kitevőjű hatványa is negatív.

2. Melyik állítás hamis?

A: Ha egy valós szám megegyezik a (-1)-edik hatványával, akkor a szám abszolútértéke 1.

B: Ha egy valós szám nulladik hatványa 1, akkor a szám nem egyenlő nullával.

C: Ha egy valós szám pozitív kitevőjű hatványa nulla, akkor a szám csak nulla lehet.

D: Ha egy valós szám páros kitevőjű hatványa pozitív, akkor a szám is pozitív.

3. Hány olyan x egész szám van, amelyre az $f(x)=(-5)^{\frac{4}{x}}$ kifejezés értelmezhető?

4. Döntsd el, hogy az alábbi kifejezések közül melyeket nem értelmezzük! Amelyeket értelmeztük, annak add meg a tízes számrendszerbeli alakját!

$$\frac{(-1)^{-3}}{2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3},\ (\sqrt{2})^{-4},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}},\ -\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}},\ \left(2-\frac{7}{3}\right)^{0,1},\ \pi^{0}$$

5. Az alábbi öt egyenlet közül válaszd ki azokat, amelyek minden pozitív valós számra teljesülnek! Döntésedet indokold!

a) $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ b) $(-x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-x}$ c) $x^{x^{2}}=x^{2x}$

d) $(x^{x})^{2}=x^{2x}$ e) $5^{\frac{2}{x}}=\sqrt[x]{25}$

6. Öt kártya mindegyikére egy-egy kifejezést vagy relációjelet írtunk. A kártyák a következők:

x^2 x^3 x^4 $=$ $<$

A kártyákat két dobozba helyezzük el. Az 1. dobozba a kifejezéseket, a 2. dobozba a relációjeleket. Először az 1. dobozból húzunk egy kártyát, lerakjuk az asztalra, majd a 2. dobozból egy kártyát, és az előbbi mellé, jobbra helyezzük. Végül ismét az 1. dobozból húzunk egy kártyát, és azt a relációjeles kártya után rakjuk.

a) Hány különböző egyenletet, illetve egyenlőtlenséget kaphatunk így?

b) Oldd meg az így kapható egyenleteket a valós számok halmazán!

c) Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

I) $x^2 > x^3$; II) $x^3 > x^4$; III) $x^2 < x^4$.

d) Vázold egy koordináta-rendszerben az $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, és $h(x) = x^4$ függvények grafikonját a $[-1,5;1,5]$ intervallumon!

e) Vázold a d) feladatban már felvett koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket is!

$j(x) = \sqrt{x}$, ahol $x \in \left[0; 2\frac{1}{4}\right]$; $k(x) = \sqrt[3]{x}$, ahol $x \in \left[-3\frac{3}{8}; 3\frac{3}{8}\right]$;

$m(x) = \sqrt[4]{x}$, ahol $x \in \left[0; 5\frac{1}{16}\right]$.

Válaszd ki az f, g, h, j, k és m függvények közül az inverzpárokat!

f) Írj fel olyan egyenlőtlenséget az e) feladatban megadott függvények kifejezéseinek felhasználásával, amelynek a megoldáshalmaza:

i) $[0;1]$; ii) $]0;1]$; iii) $\{0\} \cup [1;+\infty[$.

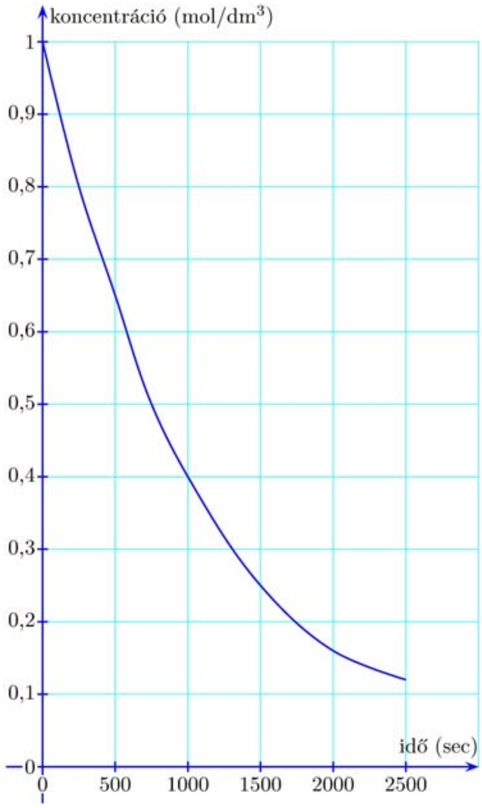
3. MODUL
EXPONENCIÁLISAN NŐ VAGY CSÖKKEN?

Készítette: Kovács Károlyné

I. CSAK EXPONENCIÁLISAN!

A kutatómunka során gyakran előfordul, hogy a mért adatokat egy függvénnyel próbálják közelíteni. Természetesen véges sok adat esetében a feladat nem egyértelmű. Ezen a foglalkozáson ilyen jellegű feladatokkal is foglalkozunk. A megoldás során mód nyílik az exponenciális függvény egyik nagyon fontos tulajdonságának a felismerésére is.

1. A grafikon egy A anyag koncentrációjának időbeli változását mutatja reakció közben, állandó hőmérsékleten.



a) A grafikon alapján lehetséges-e, hogy a folyamat exponenciálisan zajlott le?

Az alábbi táblázat az A anyag koncentrációjának mérésekor készült jegyzőkönyv egy részlete.

Idő (sec)	0	750	1500	2250
Koncentráció $\left(\frac{mol}{dm^3}\right)$	1	0,5	0,25	0,15

b) A jegyzőkönyvi adatok alapján mondható-e, hogy a folyamat időben exponenciálisan zajlott le? Miért?

2. Az alábbi táblázat egy laboratóriumban végzett kísérlet mérési adatait tartalmazza.

A folyamat indulásától eltelt idő (percben):	1	2	3	4	5	6
Mért adatok:	0,601	0,359	0,216	0,130	0,078	0,047

A kísérlet többszöri elvégzése után a kísérletet végző kutató azt sejti, hogy a folyamat időben exponenciálisan zajlik le.

a) A látott adatok mennyiben támasztják alá a laboratórium vezetőjének sejtését?

b) A kísérletet végző kutató úgy gondolta, hogy két exponenciális függvény jöhet számításba: $f(x) = 0{,}6^x$ és $g(x) = 0{,}601^x$. Vizsgáld meg mindkét függvény esetében, hogy ha a folyamatot a megadott függvény írja le, mekkora az eltérés a mért adatok és a függvény értékei között? Az eltérést tízezredekre kerekített függvényértékekkel számold ki!

Az eltérések ismeretében, a kísérletező személy helyében melyik függvényt választanád?

3. Egy kutatóintézetben azt tapasztalták, hogy a K növény hajtásának hosszát az első két napon a $h(t) = 0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}$ (mm) képlet adja meg, ahol t értékét órában mérték.

a) Milyen hosszú volt a hajtás a megfigyelés kezdetekor?

b) Mennyit nőtt az első napon?

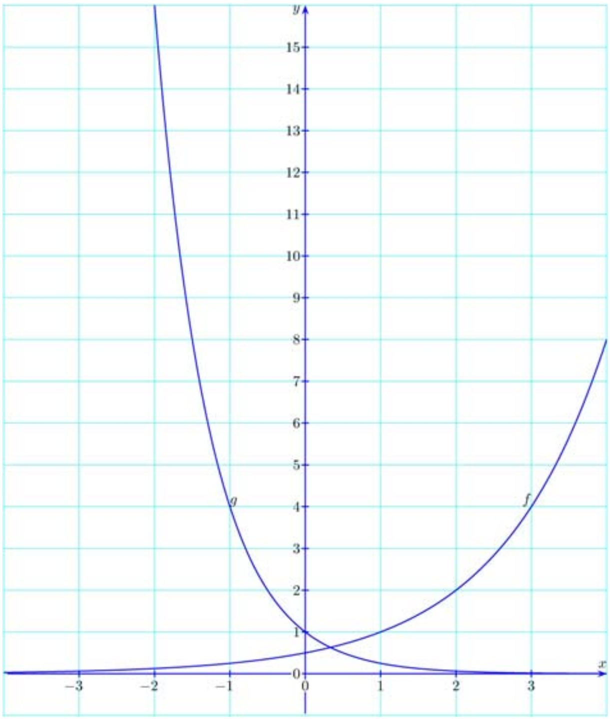
c) A megfigyelés kezdetekor mért magasságnak hányszorosát érte el a növény hajtása a második nap végén?

Ugyanebben az intézetben, a K növény vizsgálatával egy időben egy H növény hajtásának növekedését is mérték. Ennél a növénynél azt tapasztalták, hogy a hajtásának hossza időben a $d(t) = 0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t}$ képlet szerint változik az első két napon (az időt itt is órában, a hosszt mm-ben mérték).

d) Add meg képlettel, hogy t óra múlva hányszorosa a H növény hajtásának hossza a K növényének! ($0 \le t \le 48$)

e) Mikor lesz a két növény azonos magasságú?

4. Ebben a feladatban egyenletet, illetve egyenlőtlenségeket kell gyártani. Minden esetben használd fel mindkét, adott grafikonú függvény képletét!



a) Melyik két exponenciális függvény grafikonja látható az ábrán! A függvényeket add meg képletükkel!

b) Írj fel egy olyan egyenletet, amelynek a megoldáshalmaza a $\{0\}$!

c) Írj fel egy olyan egyenlőtlenséget, amelynek a megoldáshalmaza az **R** halmaz!

d) Írj fel két olyan egyenlőtlenséget, amelyek mindegyike pontosan akkor teljesül, ha $x \in [-2;-1]$!

III. EGYENLŐTLENEK KÜZDELME

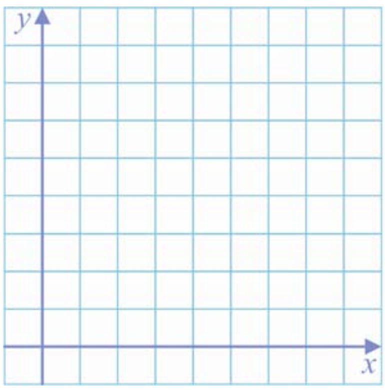
Az egyenlőtlenségek megoldása jó lehetőséget nyújt a különböző tananyagrészekben szerzett ismeretek alkalmazására. Különösen alkalmas az egyes függvények monotonitásáról tanultak hasznosítására és az algebrai ismeretek elmélyítésére. Ezen a foglalkozáson elsősorban exponenciális egyenlőtlenségeket oldunk meg.

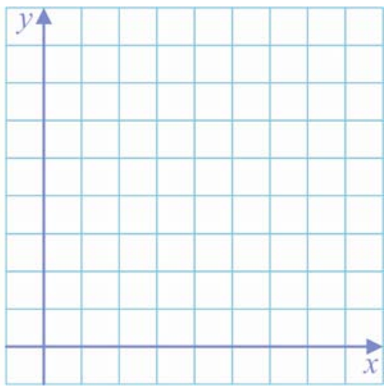
1. Vázold az alábbi egyik koordináta-rendszerben az $f(x) = 0{,}5^x$, a másikban a $g(x) = 3^x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonját! Válassz véletlenszerűen két-két pontot a grafikonok pontjai közül! Jelöld a kiválasztott pontok első koordinátáját x_1-gyel, illetve x_2-vel! Hogyan jelölnéd a pontok második koordinátáját az egyik, illetve a másik esetben? Fejezd be a következő megkezdett mondatokat:

„Ha $x_1 < x_2$, akkor …”

„$0{,}5^{x_1} > 0{,}5^{x_2}$ pontosan akkor, ha …”

„Ha $3^{x_1} > 3^{x_2}$, akkor….”





2. Mekkora a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk egymás után két kifejezést az alábbiak közül, akkor az elsőnek választott kifejezés értéke kisebb minden negatív *x* szám esetén, mint a másodiknak választott kifejezés értéke?

$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad 2^x \quad$ 1 $\quad 4^x$

3. Egy előző foglalkozáson már „találkoztunk” egy K növény hajtásának hosszát megadó képlettel: $h(t) = 0{,}02 \cdot 10^{0{,}06 \cdot t}$, és egy H növény hajtásának hosszát megadóéval:

$d(t) = 0{,}4 \cdot 10^{0{,}03 \cdot t}$. Mindkettőben a hosszat mm-ben, az idő t értékét órában mérték. A megfigyelést két napon keresztül végezték.

a) A megfigyelés kezdetétől számítva melyik növény hajtása hány teljes órán keresztül volt rövidebb a másikénál?

b)* A megfigyelés kezdetétől számított hányadik órában volt a növények hajtáshosszának különbsége kb. $\frac{7}{8}$ mm?

4. Oldd meg a valós számok halmazán a $5 \cdot 0{,}2^{x} < 0{,}04^{2x^2-2x}$ egyenlőtlenséget!

(Segítség: $0{,}04 = 0{,}2^2$)

5. Oldd meg a valós számok halmazán a $0{,}04^{x-1} - 0{,}2^{x-1} + 5^{1-x} \le 625$ egyenlőtlenséget!

(Segítség: $0{,}04 = 0{,}2^2$ és $5 = 0{,}2^{-1}$ vagy $0{,}2 = 5^{-1}$, $0{,}04 = 5^{-2}$.)

6. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{1 - 0{,}75^{x+1}} \cdot \left(2^{x-3} - 0{,}25\right) \le 0$ egyenlőtlenséget!

4. MODUL
MINDIG CSAK A KITEVŐ?

Készítette: Kovács Károlyné

II. EGYENLET ITT IS, OTT IS

1. Az alábbi táblázat bal oldali oszlopában található egyenleteknek, egyenlőtlenségeknek keresd meg a megoldáshalmazát a táblázat jobb oldali oszlopában! Választásodat indokold!

A: $\lg x + \lg 2 = -1$	**a:** $\{16\}$
B: $\lg 4 + \lg 25 = \lg x^2$	**b:** $\{-1\}$
C: $\log_4 (x+2) - \log_4 2 = 2$	**c:** $\{\ \}$
D: $\log_2 x^2 + \log_2 x^4 \ge 0$	**d:** $\mathbf{R}$
E: $\dfrac{\log_{0,5}(x+16) + \log_{0,5} 8}{\log_{0,5} x} = 2$	**e:** $\{30\}$
F: $\log_{\frac{1}{7}} x \le \log_8 x$	**f:** $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$
G: $\log_3 (2^x - 4^x) = x \cdot \log_3 4$	**g:** $\left\{\dfrac{1}{20}\right\}$
H: $\lg(x^2+1) - \lg x^2 \ge 1$	**h:** $[1;+\infty[$
I : $\lg(x^2+2) + \lg(x^2+1) \le \lg(x^4+3x^2+2)$	**i:** $\left[-\dfrac{1}{3};0\right[\cup \left]0;\dfrac{1}{3}\right]$
J: $9^{\log_3 x} + 2x + 1 = 0$	**j:** $\{10;-10\}$

2. Kapcsold össze az első két kifejezést a négy alapművelet valamelyikével, s az így kapott kifejezést tedd egyenlővé 1-gyel! Oldd meg az összes így kapható egyenletet a valós számok halmazán!

$\mathbf{lg\,(x+3)}$ $\mathbf{lg\,x}$ $\mathbf{1}$

3. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenséget!

a) $\log_5 \log_{32} x + \log_{25} \log_{32} x + 1{,}5 = 0$;

b) $\frac{1}{2}\lg^2 x - \lg 2\sqrt{x^7} + 2 + \lg 20 = 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (2^{2x-1} + 2 \cdot 4^{x-1}) \ge 0$;

d)* $x^{2-lg\frac{x}{2}} \ge 4$;

e)* Határozd meg a koordinátasíkon azon $(x;y)$ koordinátájú pontok halmazát, amelyekre $x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 2$ teljesül!

III. ALKALMAZZUK AZ ISMERETEINKET!

1. András a számítógép számológépével végzett kísérleteket. Beírt egy pozitív számot, majd egymás után annyiszor nyomta be a számológép *log* gombját, amíg a gép ki nem írta, hogy „A bevitt adat érvénytelen”. Minden egyes szám esetén feljegyezte, hogy hányadik lépésben jutott az „érvénytelen” kiíráshoz.

a) Végezz ilyen kísérleteket a saját számológépeden! Mit tapasztaltál?

b) András beírta a 10^{10} számot. Ezzel a számmal végrehajtva a kísérletet, hányadik lépésben jutott először az érvénytelen kiíráshoz?

András azután egy elég sokjegyű számot a következőképpen hozott létre: sorban, egymás után beírta 1-től 20-ig az összes egész számot. Az így kapott számot jelöljük *n*-nel.

c) Hány számjegyű az n szám?

d) Ezzel a számmal milyen eredménnyel végződött a kísérlet?

e) Melyik az a legnagyobb n szám, amelyre lg lg lg lg *n* értelmezhető, de lg lg lg lg lg *n* már nem?

2. Hány számjegyből áll a 3^{100} tízes számrendszerbeli alakja? Mi a szám utolsó számjegye?

3. András testvérének születésekor szüleik 500 000Ft-ot lekötöttek egy banknál. Feltételezve, hogy 18 éven keresztül nem változtatja meg a bank az éves kamatlábat, évi hány százalékos kamat esetén kétszereződik meg a betett összeg 18 év elteltével? (Minden év leteltekor az éves kamatot a tőkéhez csatolják.

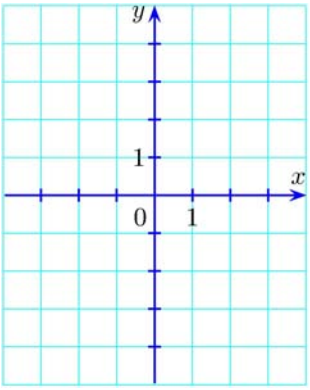
4. Ha a pozitív számoknak csak a pozitív kitevőjű hatványait értelmeztük volna, akkor milyen számoknak nem lenne 10-es alapú logaritmusa? Ekkor milyen számoknak lenne 0,5 alapú logaritmusa?

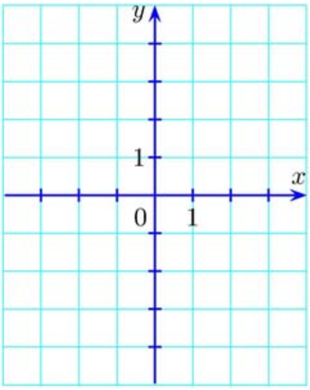
5. Az *ABC* háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(\lg 8; \lg 2)$, $B(\lg 4; \lg 2)$ és $C(\lg 4; \lg 16)$ Mekkora a háromszög területe?

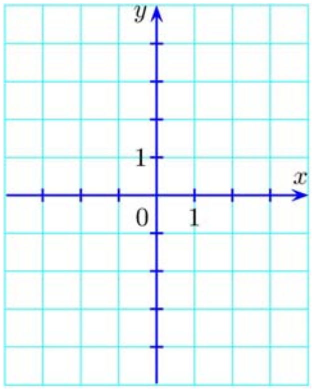
6. Határozd meg a $[-3\ ;\ 3]$ intervallum legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhetők az alábbi kifejezések!

a) $f(x)=10^{\lg x}$; b) $g(x)=\lg 10^{x}$; c) $h(x)=10^{\frac{1}{2}\cdot\lg x^2}$.

A kapott halmazon értelmezett *f*, *g* és *h* függvényeket ábrázold egy-egy derékszögű koordináta-rendszerben!







7. Fejezd ki az alábbi képletekből az *A* változót! (*A*, *B* és *t* pozitív számot jelölnek)

a) $\lg t=\dfrac{\lg A-\lg B}{2}$ b) $\dfrac{\lg(A-B)}{\lg t}=2$ c) $10^{2\lg B+\frac{1}{2}\lg A}=t$

Ha $B=2$, akkor a *t* változó milyen értéke esetén lesz a három képlet közül az elsőben a legnagyobb az *A* értéke?

8. Számológép használata nélkül döntsd el, hogy melyik szám a nagyobb! Döntésedet indokold!

a) $\log_2 5$ vagy $\log_5 16$

b) $\log_3 \pi-1$ vagy $1-\log_\pi 3$

5. MODUL
ARRA, ANNYIVAL!

Készítette: Kovács Károlyné

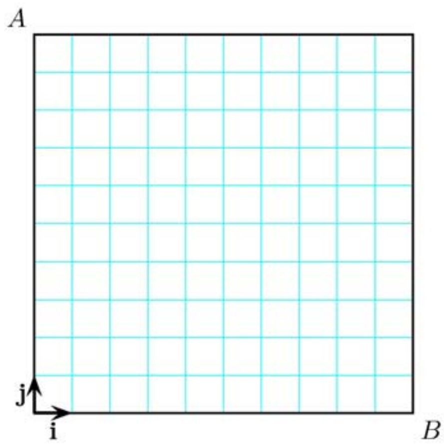
I. MERRE?

1. Jelölje A és B egy 10x10-es négyzet két átellenes csúcsát! Told el az A pontot egymás után valamilyen sorrendben az alábbi vektorokkal!

$\mathbf{a}(6;-2)$, $\mathbf{b}(-7;-1)$, $\mathbf{c}(0;-8)$, $\mathbf{d}(4;2)$, $\mathbf{e}(-3;1)$, $\mathbf{f}(7;-1)$, $\mathbf{g}(3;-1)$

a) Az eltolásoknak van-e olyan sorrendje, amely az A pontot nem a B pontba viszi?

b) Megadható-e az eltolásoknak olyan sorrendje, amelyek során az A pont nem hagyja el egyszer sem a négyzetlapot?



2. Az $ABCDEFGH$ téglatest A csúcsából induló élvektorokat jelöljük a következőképpen:

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$.

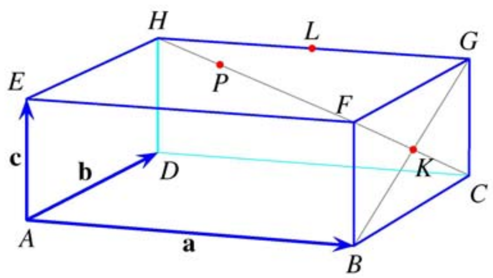
Told el az A csúcsot

a) a $BCGF$ oldallap K középpontjába!

b) a HG él L felezőpontjába!

c) a HF lapátló H-hoz közelebbi P harmadoló pontjába!

Add meg mindhárom esetben az eltolás vektorát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal!

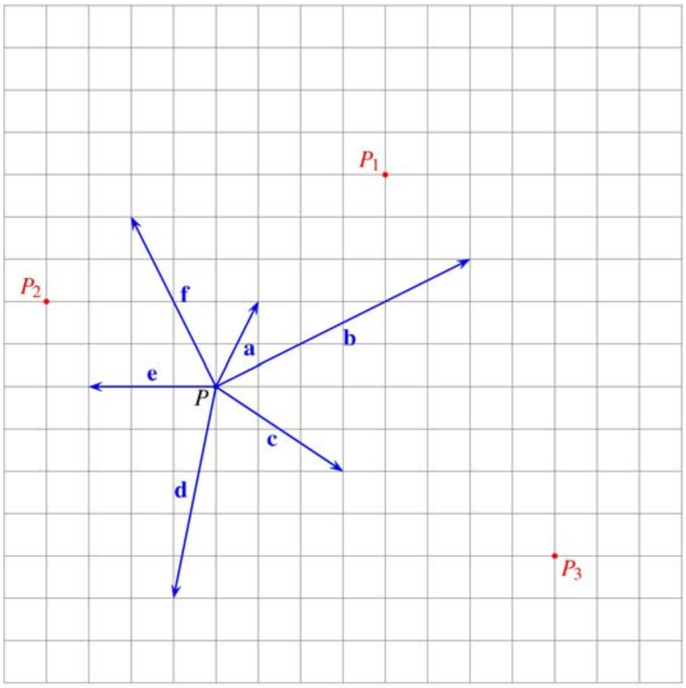


3. Az ábrán látható hat vektorral megadott eltolások közül választhatunk-e olyanokat (bármelyiket legfeljebb egyszer), amelyek egymás utáni végrehajtása a P pontot

a) a P_1 pontba viszi?

b) a P_2 pontba viszi?

c) a P_3 pontba viszi?



4. Az $\mathbf{a}(2;0)$ vektorhoz adj meg koordinátáival egy olyan $\mathbf{b}$ vektort, amelynek a hossza 2 egység, továbbá a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=0$ b) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=0$ c) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=2$ d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2$ e) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=5$

5. Egy hangya sétáját követjük nyomon. Az egyszerűség kedvéért koordinátasíkon adjuk meg a mozgását. Először az origóból a $P_1(6;8)$ pontba mászott el egy egyenes szakasz mentén. Itt a menetirányához képest $+90^\circ$-kal elfordult, és ebben az irányban fele akkora hosszú szakasznyi távolságot ment, mint az előzőben. Így a P_2 pontba jutott. Itt ismét elfordult a menetirányához képest $+90^\circ$-kal, és ebbe az irányba a P_1P_2 szakasz hosszának felével megegyező távolságot megtéve a P_3 pontba jutott. Még egyszer elfordult $+90^\circ$-kal, ismét az előző szakaszban megtett távolság felével egyenes úton haladt, és így a P_4 pontba érkezett.

a) Mennyi utat tett meg összesen a hangya, amíg az origóból a P_4 pontba eljutott?

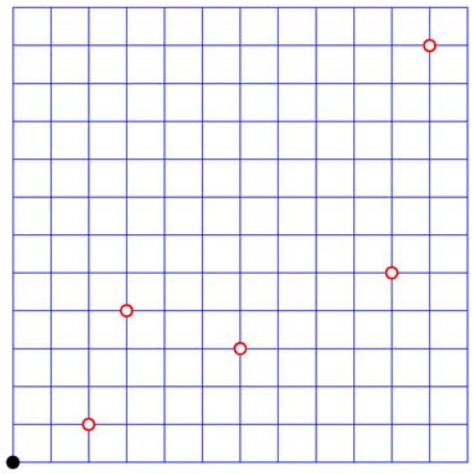
b) Határozd meg az egyes fordulópontok koordinátáit!

c) A hangya végül kiindulópontjához képest mennyit mozdult el?

6. Egy négyzet két szomszédos csúcsa: $A(-1;4)$, $B(5;2)$. Határozd meg a négyzet további két csúcsának (C és D) koordinátáit!

7. Egy, a DÁMA játékhoz hasonló játékot négyzethálós papíron játszanak. Az egyik játékos bábui feketék, a másiké pirosak. A bábuk csak a nagy négyzet oldalán és a belsejében lévő rácspontokon állhatnak, vagy azokra léphetnek. A bábuk a játékmezőből nem léphetnek ki. Az egyik játékos (pl. a fekete bábuval játszó) a másik játékos piros bábuját leveheti, ha a fekete bábuval tud úgy ugrani, hogy a kiindulási pont és az érkezés pont által meghatározott szakasz felezőpontjában van az ellenfél piros bábuja. Innen a fekete bábu tovább is ugorhat, ha az új helyzetben ismét talál egy olyan piros bábut, amelyet az előbb megadott módon át tud ugrani. (Természetesen ugyanilyen szabály szerint veheti le a piros bábus játékos is a másik játékos fekete bábuját.

Az alábbi ábrán látható helyzetben már csak egyetlen fekete bábu van és 5 piros. Most a fekete bábu lépése következik. Találd meg a fekete bábunak azt a lépéssorozatát, amely során minden piros bábut le tud szedni!



II. KÉT VEKTORBÓL EGY SZÁM

Gyűjtsük össze két vektor skaláris szorzatával kapcsolatos ismereteinket!

1. Jelölje $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a bázisvektorokat!

a) Számítsd ki háromféle módon a $(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}$ skaláris szorzatot!

b) Ha $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ és $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$, akkor $\mathbf{ab}=?$

c) Az $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ és $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ vektoroknak mekkora a hossza?

d) Mekkora a hajlásszöge a $\mathbf{c}(5;-12)$ és $\mathbf{d}(2;4)$ vektoroknak?

e) Ha az E pont helyvektora $\mathbf{e}(3;-4)$, az F pont helyvektora pedig $\mathbf{f}(-1;-8)$. Mekkora az $\overrightarrow{EF}$ vektor és az $\mathbf{i}$ bázisvektor hajlásszöge?

2. Matematika órán a tanár 4 cédula mindegyikére felírt egy-egy koordinátáival megadott vektort, és a cédulákat egy dobozba tette. A dobozból a csoport minden tagja kihúzott visszatevéssel két cédulát. (Azaz a második cédula húzása előtt minden tanulónak vissza kellett rakni a dobozba az elsőként kihúzott cédulát.)

a*) A végén kiderült, hogy nem volt két olyan húzás, amikor ugyanakkora szám lett volna a skaláris szorzat. Legfeljebb hány tagja lehetett a csoportnak?

b) Egy alkalommal a cédulákon a következő vektorok voltak. Ekkor legfeljebb hány tagja lehetett a csoportnak?

$\boxed{\mathbf{a}(-6;\,4)}$ $\boxed{\mathbf{b}(-2;\,3)}$ $\boxed{\mathbf{c}(-8;\,-12)}$ $\boxed{\mathbf{d}(1;\,4)}$

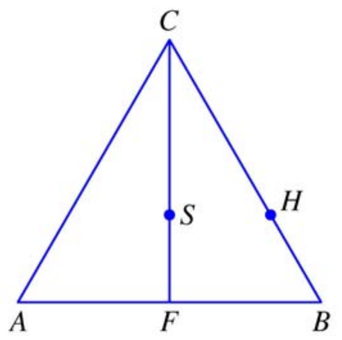
c) A b) feladatban megadott vektorok esetén hány húzás esetén kaphatunk olyan vektorokat, amelyek hajlásszöge
- 0°-os?
- hegyesszög?
- derékszög?
- tompaszög?

Nehezebb feladatok

3. Döntsd el, hogy az alábbi vektorok közül melyek merőlegesek egymásra!

$\mathbf{a}(\sqrt{2};-4)$, $\mathbf{b}(\cos 30°;\sin 30°)$, $\mathbf{c}(-\sqrt{48};-\sqrt{6})$, $\mathbf{d}(\sqrt{32};2)$, $\mathbf{e}(-4\sqrt{3};12)$.

4. Az ábrán látható szabályos háromszög oldalának hossza 2 egység, *S* a háromszög súlypontja, *H* a *BC* oldal *B* csúcshoz közelebbi harmadoló pontja, *F* pedig az *AB* oldal felezőpontja.



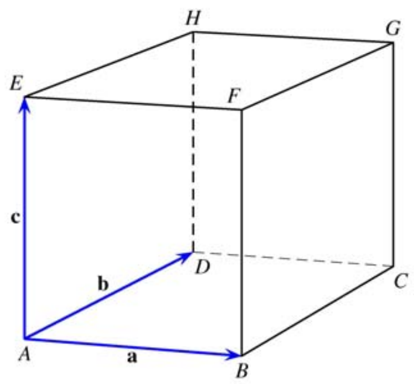
Határozd meg az alábbi módon megadott számok pontos értékét!

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CS}$; c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$;

d) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}$; e*) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$.

5. Az ábrán látható kocka éleinek hossza 10 egység. A kocka *A* csúcsából induló három élvektor: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE}=\mathbf{c}$. Számítsd ki az alábbi skaláris szorzatokat!

a) $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{DG}\cdot\mathbf{a}$; c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FC}$; d) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}$.



6. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egysíkú vektorokról a következőket tudjuk:

- Az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{3}$ egység, a $\mathbf{b}$ vektoré 3 egység;
- egy nullvektortól különböző $\mathbf{c}$ vektor hajlásszöge az $\mathbf{a}$ vektorral 30°, a $\mathbf{b}$ vektorral pedig 120°-os szöget zár be.

Bizonyítsd be, hogy az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor merőleges a $\mathbf{c}$ vektorra!

7. Rajzold fel a koordinátasíkon azt az *e* egyenest, amely átmegy az $A(1;-4)$ ponton, és merőleges az $\mathbf{n}(3;2)$ vektorra!

Milyen módszerrel döntenéd el, hogy rajta van-e a $B(1001;-1504)$, illetve $C\left(\frac{5}{3};-\frac{9}{2}\right)$ pont az *e* egyenesen?

6. MODUL
EGYENESEN ELŐRE!

Készítette: Kovács Károlyné

I. ALAKZAT ÉS EGYENLET

1. Keress a koordinátasíkon legalább 8 olyan pontot, amelyeknek

a) legalább az egyik koordinátája nulla!

b) az ordinátája (második koordinátája) (-3)-szorosa az abszcisszájának (első koordinátájának)!

c) a két koordinátájuk abszolútértéke megegyezik!

d) az abszcisszájuk 2-vel nagyobb az ordinátájuknál!

Mit gondolsz, ha mindegyik esetben a sík összes megadott tulajdonságú pontját meg tudnád keresni, akkor a kapott ponthalmaz milyen alakzatot alkotna?

2. Keress olyan $(x; y)$ koordinátájú pontokat, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenletet! a) $(x-2)(y+3)=0$; b) $xy = xy^2$.

3. Pista a következő feladatot kapta: Határozd meg, hogy milyen alakzatot alkot az olyan $(x; y)$ koordinátájú pontok halmaza, amelyek koordinátáira igaz az $y^2x = 3x^2y$ egyenlőség!

Pista a következőképpen járt el: Elosztotta az egyenlet mindkét oldalát xy-nal. Így az $y = 3x$ egyenlethez jutott. Azt állította, hogy a keresett ponthalmaz azon pontok halmaza, amelyeknek második koordinátája 3-szorosa az első koordinátájuknak. Ezek a pontok egy olyan egyenest alkotnak, amely áthalad az origón és a meredeksége 3. Tehát ez az egyenes a keresett ponthalmaz.

Kati szerint Pista nem helyesen oldotta-e meg a feladatot.

Döntsd el, hogy igaza van-e Katinak! Döntésedet indokold!

Hogyan oldottad volna meg Pista feladatát?

4. Milyen alakzatot alkot a sík összes olyan pontja, amelyek $(x; y)$ koordinátáit behelyettesítve az alábbi egyenletbe, fennáll az egyenlőség!

a) $\frac{2}{x} = \frac{2}{y}$; b) $y^2 = 2xy$; c) $x^2 - 2xy + y^2 = 9$;

d) $\frac{(x^2-4)(y-2x)(y-4)}{y-1} = 0$; e) $\sqrt{y} = \sqrt{2-3x}$.

5. Rajta van-e a P pont a következő egyenlettel megadott alakzaton?

a) $x^2 - xy = 2^x$ és $P\left(3;\frac{1}{3}\right)$; b) $y = x^3 - x$ és $P(2;6)$;

c) $\sqrt{y - x^2} = x - 4$ és $P(2;8)$.

6. Van-e az y tengelyen pontja a következő egyenlettel megadott alakzatnak? Ha igen, add meg a pontot a koordinátáival!

a) $3x - 2(y + 3x) = 4$; b) $y^2 + y(x - 1) = x^2 + 2$.

7. A következő egyenlettel megadott alakzatnak van-e pontja az x tengelyen? Ha igen, add meg a pontot koordinátáival!

a) $3x - 2(y + 3x) = 4$; b) $(1 - x)\cos y = x^2 + y^2 - 1$.

II. ITT IS, OTT IS EGYENES

1. Válaszd ki a megadott vektorok közül azokat, amelyek normálvektorai az egyenletével megadott *e*, *f*, illetve *g* egyenesnek! Döntésedet indokold!

a(1,2); **b**(4,–2); **c**(–2,1); **d**(–1,2); **h**(–2,–4); **k**(2,1); **p**(0,2,–0,1); **q**(2π,π).

e: $y=\frac{4x-1}{2}$; *f*: $\frac{x-1}{2}=\frac{5-3y}{3}$; *g*: $6(1-x)-3(y+4)=0$.

2. Mennyi az $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3$ egyenletű egyenes meredeksége?

3. Döntsd el, hogy igazak-e az alábbi állítások! Döntésedet indokold!

a) Az *ABC* háromszög *C* csúcspontján átmenő magasságvonalának egyenlete $4x-2y=-3$, ha $A(1;7)$, $B(-1;8)$ és $C(5;-9)$.

b) Az *ABC* háromszög egyik oldalának felezőpontja $K(5;-2)$, ha $A(6;3)$, $B(1;5)$ és $C(4;-7)$.

c) Az $y=2x-4$ és $3y+6x=-4$ egyenletek egy paralelogramma szemközti oldalegyeneseinek egyenletei.

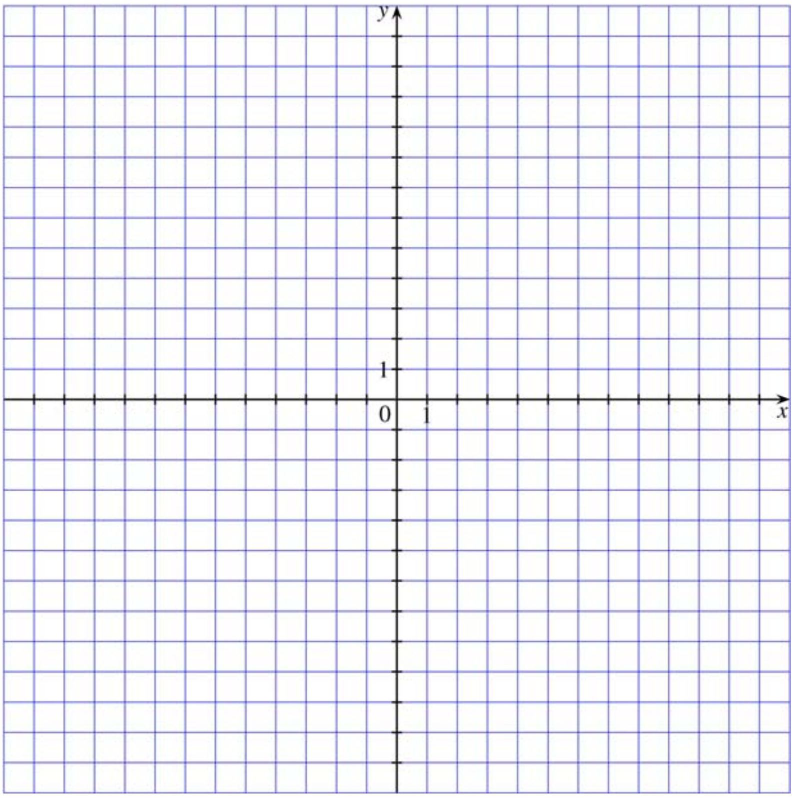
d) Az *ABC* háromszög egyik oldalegyenesének egyenlete $2x-7y=4$, ha $A(3;-1)$, $B(2;0)$ és $C(-4;-3)$.

e) Az *ABC* háromszög egyik oldalfelező merőlegesének egyenlete $5x-6y=-113$, ha $A(-100;5)$, $B(2;73)$ és $C(62;1)$.

4. Egy rombusz átlóinak metszéspontja: $K(-3;2)$; egyik csúcspontja $A(2;4)$.

a) Ennyi adatból a rombusz milyen további adatai határozhatók meg egyértelműen?

b) Eláruljuk a rombusz *A* csúcsán átmenő egyik oldalegyenesének egy pontját is: $P(11;-4)$. Mekkora a rombusz területe?



5. Tükrözd az x tengelyre és az y tengelyre is

a) a $P(3;-2)$ pontot; b) az AB szakaszt, ha $A(2;-1)$ és $B(6;2)$;

c) az $y = 2x + 3$ egyenletű e egyenest; d) a $4x + 3y = 8$ egyenletű f egyenest!

Írd fel az e, illetve f egyenes tükörképeinek egyenletét!

Az AB szakasz egyenlete: $3x - 4y = 10$, ahol $2 \le x \le 6$. Írd fel az AB szakasz tükörképeinek egyenletét!

6. Told el a $3x - 4y + 8 = 0$ egyenletű e egyenest

a) a $\mathbf{k}(3;2)$ vektorral; b) a $\mathbf{p}(8;6)$ vektorral;

c) az e egyenesre merőlegesen 6 egységgel!

Írd fel az eltolással kapott alakzat egyenletét!

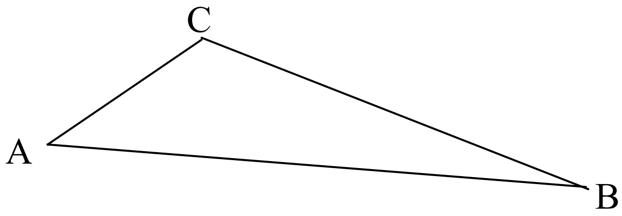
7. MODUL
KÖRBE, KÖRBE, KARIKÁBA

Készítette: Kovács Károlyné

I. SEGÍTSÉG

1. Derékszögű háromszög befogói 5 cm és 12 cm hosszúak. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

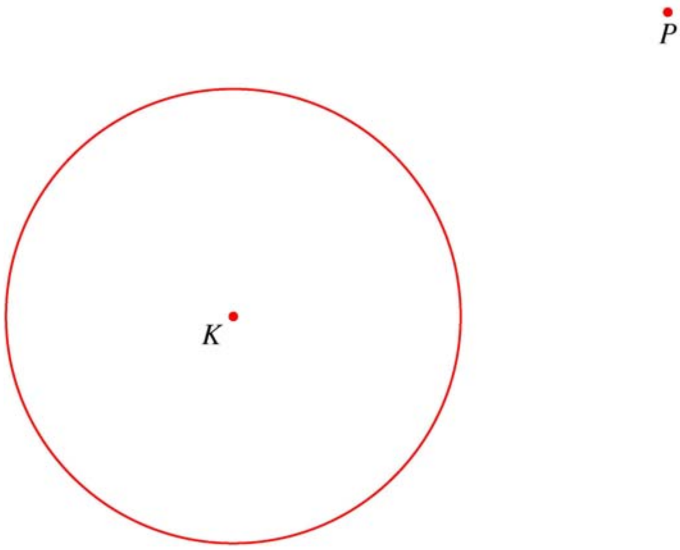
2. Szerkeszd meg az *ABC* háromszög körülírt körét!



3. Szerkeszd meg a kör

a) egy tetszőleges *H* pontjában a kör érintőjét;

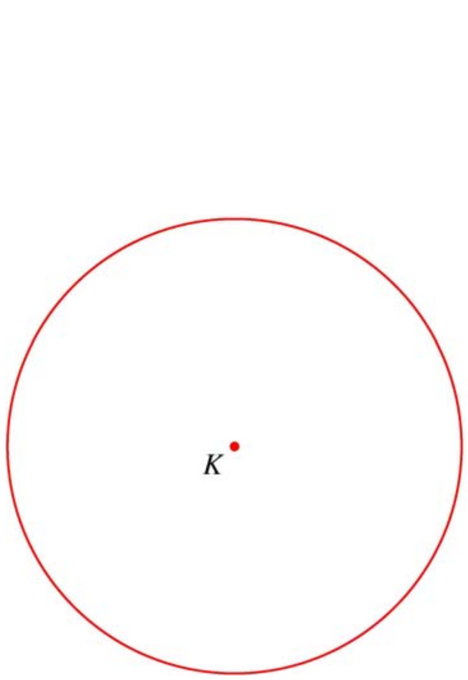
b) *P* ponton átmenő érintőit!



4. A 8 cm sugarú kör *K* középpontjától 17 cm távolságra megjelölt *P* pontból milyen hosszú érintőszakasz húzható?

5. Ismét adott az előző feladat *K* középpontú köre és a *P* pont. Forgassuk a *PK* egyenest pozitív irányba! Jelöljük az ε szöggel elforgatott egyenest *e*-vel. ($0^\circ \le \varepsilon < 180^\circ$, hiszen 180°-os elforgatásnál már az elforgatott egyenes újra a *PK* egyenessel esik egybe.) Az ε milyen értéke esetén a) metszi; b) érinti; c) kerüli el az *e* egyenes a kört?
A hajlásszöget egész fokra kerekítve add meg!

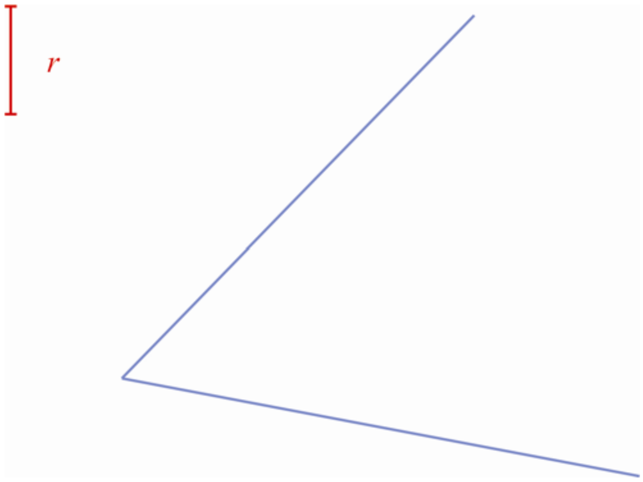
6. Adott egy K középpontú kör, és annak külső tartományában egy P pont. Szerkeszd meg azt az egyenlőszárú ABP háromszöget, amelyben $AP = BP$, és az adott kör a háromszög beírt köre!



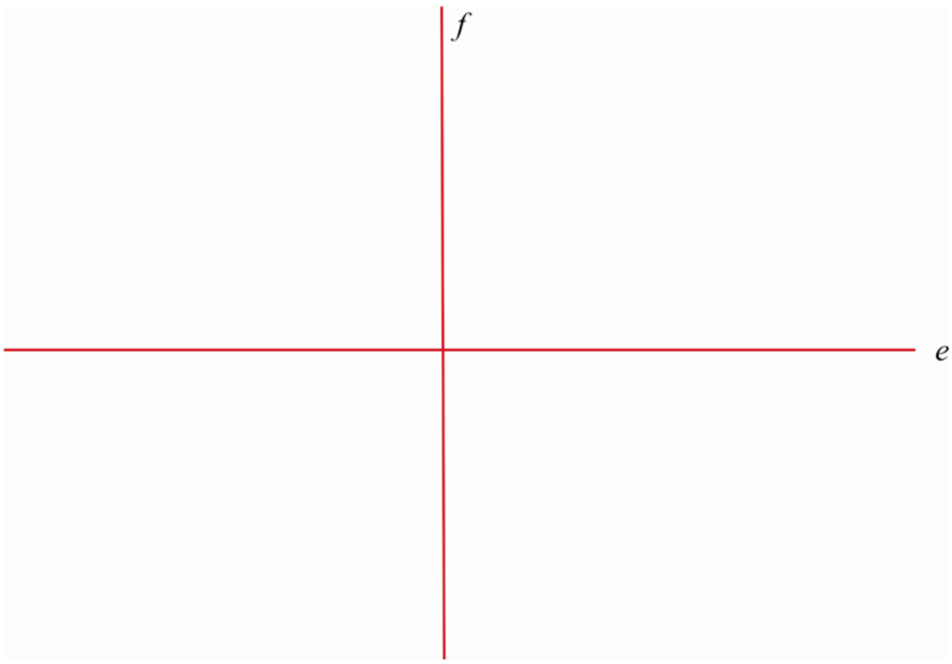
7. Számítsd ki, hogy milyen hosszú az előző feladatban megszerkesztett ABP egyenlőszárú háromszög AB alapja, ha az adott kör sugara 5 cm és $PK = 13$ cm!

8. Tekintsük azokat a köröket, amelyek átmennek az A és B (különböző) pontokon. Milyen alakzatot alkot e körök középpontjainak halmaza?

9. Az adott szögtartományba szerkessz olyan adott r sugarú kört, amely érinti a szög szárait!



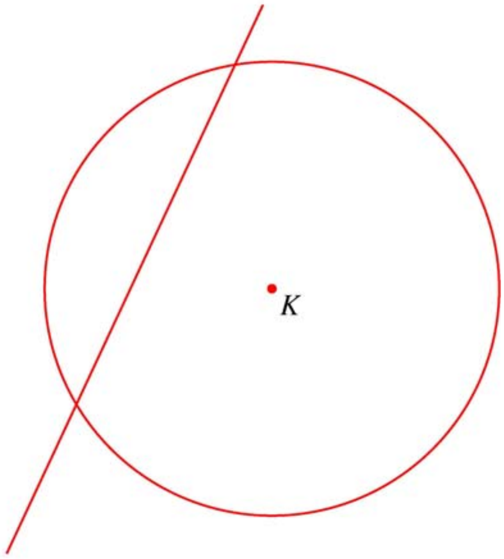
10. Mi azon 2 cm sugarú körök középpontjainak halmaza, amelyek az egymásra merőleges e és f egyenes közül legalább az egyiket érintik?



11. Adott az ábrán látható kör és egyenes. Szerkeszd meg a kör azon érintőit, amelyek

a) párhuzamosak az adott egyenessel!

b) merőlegesek az adott egyenesre!



II. LÁTÓMEZŐNKBEN A KÖR

1. Határozd meg azt az alakzatot, amelynek az egyenlete (Vigyázz!):

a) $x^2 + y^2 = 10x - 6y + 2$; b) $x^2 + y^2 = 6x$; c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0$;

d) $4x^2 - (2y-1)^2 = 0$; e) $\frac{y+4}{2-x} = \frac{x}{y}$.

2. Határozd meg az $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus, feleakkora sugarú kör egyenletét!

3. Tükrözd az $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ egyenletű kört az x tengelyre, majd annak képét az y tengelyre! Végül az így kapott kört az $y = -x$ egyenletű egyenesre! Írd fel az egyes transzformációk végrehajtásával kapott alakzat egyenletét!

4. Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik az x tengelyt a $(2;0)$ koordinátájú pontban, és 3 a középpontjuk második koordinátájának abszolútértéke!

5. Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik mindkét koordinátatengelyt, és a sugaruk 4 egység!

6. Hol metszi az $y = x$ egyenletű egyenes az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű kört?

7. Írd fel az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű körnek a koordináta-rendszer origóján átmenő érintőjének egyenletét!

8. Kicsinyítsd az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű kört a $(0;0)$ pontból $\frac{1}{5}$ arányban. Írd fel a kapott alakzat egyenletét! A transzformáció végrehajtásával hányszorosára változott a kör területe?

9. Az *ABC* háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;3)$, $B(-4;0)$ és $C(0;0)$. Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

III. ÉRINTI?

1. Hány közös pontja van az $x^2 + y^2 = 8x$ egyenletű körnek az $y = 2x$ egyenletű egyenessel?

2. Írd fel annak az origó középpontú körnek az egyenletét, amely érinti a $2x - y + 5 = 0$ egyenletű egyenest!

3. A g egyenes merőleges a $3x - 2y + 20 = 0$ egyenletű e egyenesre. A két egyenes metszéspontja $P(-2;7)$. A $K(-1;2)$ középpontú kör érinti mind a két egyenest.

a) Írd fel a g egyenes egyenletét!

b) Határozd meg az e és g egyenesek által alkotott szögek szögfelezőinek egyenletét!

c) Határozd meg az adott középpontú kör egyenletét!

4. Ha az x tengelyt forgatnád a koordináta-rendszer origója körül, az elforgatott egyenesek közül melyek kerülik el, érintik, illetve metszik az $(x-10)^2 + (y-5)^2 = 25$ egyenletű kört? Add meg egyenletével a kérdezett tulajdonságú egyeneseket!

5.* Határozd meg annak az x tengelyt érintő körnek az egyenletét, amelyik áthalad az $A(-9;5)$ és $B(-1;9)$ pontokon!

6. Írd fel az $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$ egyenletű körnek a $4x + 3y = -40$ egyenletű

a) egyenessel párhuzamos érintőit!

b) egyenesre merőleges érintőit!

7.* Mi az egyenlete annak a körnek, amely belülről érinti az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $P(-4;3)$ pontban, és érinti az y tengelyt!

8. Mi azon pontok halmaza a koordináta síkon, amelyekből az $(x+7)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű körhöz húzott érintőszakaszok hossza 12 egység?

IV. PONTHALMAZOK

1. Az ABC derékszögű háromszög két csúcsa rögzített: $A(-2;3)$ és $B(4;1)$. Határozd meg egyenletével azon pontok halmazát, amelyek bármelyike a háromszög harmadik C csúcsa lehet!

2. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szárának végpontjai $A(4;2)$ és $B(-1;6)$. A háromszög harmadik csúcsát jelöljük C-vel. Határozd meg a lehetséges C pontok halmazát! Add meg a ponthalmaz egyenletét!

3. Egy háromszög két csúcsa $A(1;\ 0)$ és $B(5;\ 0)$. A háromszög harmadik csúcsa az $y = x$ egyenletű egyenesen mozog.

a) Válassz ki a lehetséges háromszögek közül hármat, és határozd meg a kiválasztott háromszögek súlypontjának koordinátáit!

b) Határozd meg egyenletével az összes ilyen háromszög súlypontjának halmazát!

4. Az $A(0;0)$ ponton át rajzolj egy tetszőleges $m \neq 0$ iránytangensű egyenest, a $B(6;0)$ ponton át pedig egy $2m$ iránytangensűt. Jelölje C a két egyenes metszéspontját.

a) Töltsd ki az alábbi táblázat hiányzó helyeit!

***m* értéke**	-2	$-0{,}5$		$1{,}5$	2	$\sqrt{3}$
***C* pont koordinátái**			$(12;-4)$			

b) Határozd meg egyenletével a C pontok halmazát!

5*. Egy 10 dm hosszú, vékony, elhanyagolható tömegű madzag két végére egy-egy azonos tömegű kis tárgyat erősítünk. Az egyik kis tárgyat (tömegpontot) egy sima asztalra helyezzük. A madzagot kicsi csigán átvetve, annak másik vége szabadon mozoghat. Kezdetben az asztalon lévő tömegpont a lehető legtávolabb (10 dm-re) van a kis csigától.

Határozd meg a két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának pályáját, miközben a tömegpont lecsúszik az asztalról!

6. Adott az $A(0;0)$ és $B(6;0)$ pont. Mi azon pontok halmaza a koordinátasíkon, amelyeknek az *A* ponttól mért távolsága kétszerese a *B* ponttól mért távolságának?

7. Jelöld meg a koordinátasíkon az $A(1;0)$ pontot és az $x = 1$ egyenletű *e* egyenest! Határozd meg azon pontok halmazát a koordinátasíkon, amelyeknek az *A* ponttól mért távolságuk négyzetének számértéke megegyezik az *e* egyenestől mért távolságukkal!

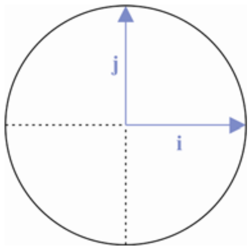
8. MODUL
GONIOMETRIA

Készítette: Kovács Károlyné

I. VEKTOROK ÉS SZÖGFÜGGVÉNYEK?

1. Adottak az **i** és **j** bázisvektorok ($|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$). Forgasd el az **i** vektort a megadott szöggel! Az elforgatott vektor melyik síknegyedbe kerül? Milyen előjelű a kapott egységvektor első koordinátája?

a) 1610°; b) -400°; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) -3; e) 13.

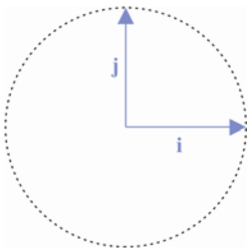


2. Értelmezd a következő kifejezéseket!

$\cos 253^\circ$; $\cos(-93^\circ)$; $\sin 1224^\circ$; $\sin 180^\circ$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; $\mathrm{tg}(135^\circ - 3\cdot 360^\circ)$; $\cos 1{,}5$.

3. Szerkeszd meg a következő 3 vektort!

$\mathbf{e}(1;-3)$; $\mathbf{g} = (\cos 210^\circ)\mathbf{i} + (\sin 210^\circ)\mathbf{j}$; $\mathbf{k}(\cos(-330^\circ); 2\cdot\sin(-330^\circ))$.



4. A szögfüggvények definíciójának felhasználásával (zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül) állapítsd meg a következő számok előjelét!

a) $\sin(-97^\circ)$ c) $\mathrm{tg}(-4)$ e) $\sin 3 - \cos 3$

b) $\cos(2 + 3\pi)$ d) $\mathrm{ctg} 512^\circ$ f) $\sin^2 3 + \cos^2 3$

5. Mekkora az $\mathbf{a}(-2;3)$ vektor legkisebb pozitív irányszöge?

6. a) Az **e** egységvektor első koordinátája $\cos 130^\circ$. Add meg az **e** vektor összes irányszögét!

b)* Egy **k** egységvektor első koordinátája $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Mekkora szöggel forgatható el az **i** bázisvektor, hogy az elforgatott vektor a **k** vektor legyen?

7. Döntsd el, hogy az alábbi egyenlőségek közül melyek teljesülnek tetszőleges *k* egész szám esetén!

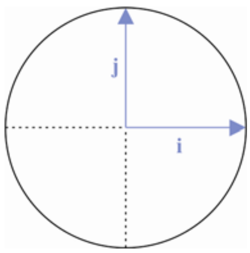
a) $\sin(-150^\circ + k \cdot 360^\circ) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ha } k \text{ 3-mal osztható.} \\ -\frac{1}{2}, \text{ha } k \text{ páratlan szám.} \\ -1, \text{ha } k \text{ páros szám.} \end{cases}$

c) $\sin^2(135^\circ + k \cdot 180^\circ) = \frac{1}{2}$

d) $\mathrm{tg}\, 20^\circ = \mathrm{ctg}(-160^\circ + k \cdot 360^\circ)$

8. a) Szerkeszd meg azokat az egységvektorokat, amelyek második koordinátája $\left(-\frac{2}{3}\right)$!



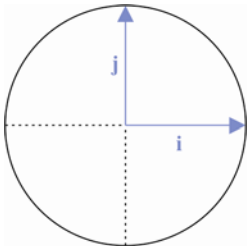
b) Értelmezd a $\sin x = -\frac{2}{3}$ egyenletet, ahol *x* fokokban mért szöget jelöl!

c) Add meg az egyenlet megoldásait a $[2000^\circ; 2300^\circ]$ intervallumon!

d) Add meg a $[-560^\circ; -200^\circ]$ intervallumon a megoldásokat!

9. a) Értelmezd a $\cos x + 0{,}5 = 0$ egyenletet, ahol x radiánban mért szöget jelöl!

b) Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

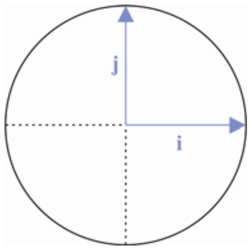


10. Ha $\cos x = \cos 160^\circ$, akkor van-e olyan x szög, amelyre:

A: $\cos x = \cos 20^\circ$ B: $\sin x = \sin(-20^\circ)$ C: $\cos x = \cos(-20^\circ)$

D: $\cos x = \cos 380^\circ$ E: Egyik eddigi válasz sem helyes.

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)



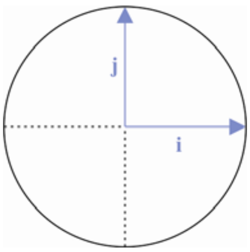
11.* A $\sin x = \cos 20°$ egyenlet megoldáshalmaza ($k, n \in \mathbf{Z}$):

A: $\{70° + k \cdot 360°\}$ B: $\{-20° + k \cdot 360°\}$

C: $\{70° + k \cdot 360°$ vagy $-70° + n \cdot 360°\}$ D: $\{70° + k \cdot 360°$ vagy $110° + n \cdot 360°\}$

E: $\{20° + k \cdot 360°$ vagy $-20° + n \cdot 360°\}$

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)



II. CSAK SZÖGFÜGGVÉNYEK

1. Az *ABCD* téglalap *AB* oldala 4 cm hosszú, az *A* csúcsból induló átló 5° os szöget zár be ezzel az oldallal.

a) Mekkora a téglalap területe?

b) A téglalap *AB*, és a vele párhuzamos oldalának hosszát nem változtatjuk, de az *A* csúcsból húzott átló hajlásszögét folyamatosan növeljük. Jelöljük az *A* csúcsból induló átló, és az *AB* oldal hajlásszögét α -val. Hogyan függ a téglalap területe az α szögtől?

c) Az α mekkora értéke esetén lesz a téglalap területe 32 cm^2?

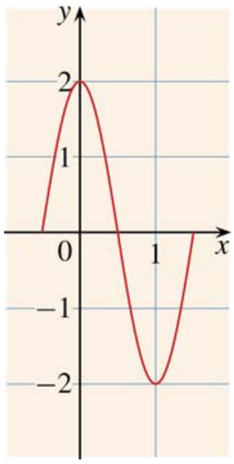
d) Válaszd ki a téglalapok közül azt a téglalapot, amelynek a *BC* oldala 2 cm hosszú (az *AB* oldala 4 cm)! Forgassuk el a *BC*, és a vele párhuzamos *AD* oldalt a *B*, illetve az *A* csúcs körül negatív irányba $\beta = 20^\circ$ szöggel! Mekkora a keletkezett paralelogramma területe?

e) Hozz létre a d) kérdésben megadott módon paralelogrammákat különböző β szögű, negatív irányú forgatással ($0^\circ < \beta < 90^\circ$)! Hogyan függ e paralelogrammák területe a β szög mértékétől? Add meg a függvényt képlettel, és ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben!

2. Egy egyenlőszárú háromszög szárai 2 cm hosszúak, a szárszöge γ. Hogyan függ a háromszög alapjának hossza a γ szögtől? Add meg a függvényt képlettel! Mi lesz a függvény lehető legbővebb értelmezési tartománya? Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a függvényt!

3. Vizsgáljuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ függvényt! A függvény milyen egész értékeket vehet föl? Vázold értéktáblázat alapján a függvény grafikonját! Mekkora a függvény periódushossza?

4. Az ábrán egy koszinuszfüggvény teljes periódusa látható. Melyik képlettel adható meg a függvény?



A: $f(x) = \cos 2x$ B: $f(x) = 2\cos \frac{\pi}{2} x$ C: $f(x) = 2\cos \frac{x}{\pi}$

D: $f(x) = \cos \pi x$ E: $f(x) = 2\cos \pi x$

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)

5. Adj meg grafikonjával a valós számok halmazán értelmezett olyan függvényt, amelynek az értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum, a periódushossza π, a 0 helyen maximuma van, és nullához a függvény 1-et rendel!

6. Adj meg grafikonjával és képletével is egy olyan trigonometrikus függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $[0;2]$ intervallum, periódushossza 2π, és nullához 1-et rendel!

7. Adj meg grafikonjával és képletével is egy olyan trigonometrikus függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $[0;2]$ intervallum, periódushossza π, és nullához 2-t rendel!

8. Határozd meg a valós számok halmazán értelmezett *f*, *g* és *h* függvények szélsőértékeit, és azok helyét!

a) $f(x) = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $g(x) = \cos(x + 2)$ c) $h(x) = \cos x + 2$

9. A $\left[-100;\,100\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbf{Z}\right\}\to\mathbf{R}, x\mapsto \mathrm{tg}x$ függvény az adott zárt intervallumon hányszor veszi föl a 8 értéket?

10. Az $y=\frac{1}{100}x$ egyenletű egyenesnek hány közös pontja van a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\sin x$ függvény grafikonjával?

11. Told el az $f(x)=\cos x$ (ahol $x\in\mathbf{R}$) függvény grafikonját a $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ koordinátájú vektorral! Add meg kétféleképpen is a kapott grafikonú függvény hozzárendelési szabályát!

12. Ábrázold függvénytranszformációval a valós számok halmazán értelmezett $g(x)=1-2\cos(x+\pi)$ függvény grafikonját a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon!

a) Add meg a valós számok halmazán értelmezett függvény értékkészletét!

b) Vizsgáld a valós számok halmazán értelmezett g függvény paritását és állapítsd meg a függvény zérushelyeit, szélsőértékeit, és azok helyét!

III. EGY EGYENLET, SOK GYÖK

1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2x+1=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $2\sin x+1=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

2. Hány megoldása van a $\sin|x|=0{,}5$ egyenletnek a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon? Sorold fel a megoldásokat!

3. Add meg a következő egyenletek 3-3 megoldását, majd az összes valós megoldásukat is!

a) $\mathrm{tg}x=-\sqrt{3}$; b) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$; c) $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Keresd meg a $\mathrm{ctg}\frac{\pi\cdot x}{4}=1$ egyenlet valós megoldásai közül a legnagyobb negatív számot!

5. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(\sin x-\cos x)^2+(\cos x+\sin x)^2=3\sin x-1$; b) $2\cos^2 x-\mathrm{tg}x\cdot\cos x-1=0$;

c) $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+2=0$.

6. Bizonyítsd be, hogy a

$$\cos^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

egyenletnek minden valós szám megoldása!

7. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs valós megoldása!

a) $\mathrm{tg}x\cdot\cos x=1$; b) $\frac{2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}=0$.

8. Ha $(\sin x-2\cos x)^2+(\cos x-2\sin x)^2=5$, akkor mennyi a $\sin^2 x$?

9. Bizonyítsd be, hogy az $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$ (ahol $x\in\mathbf{R}$) függvény konstans függvény!

10.* Hány megoldása van a

$$\left.\begin{array}{l}\sin x\cdot\cos y=0\\ |\cos x|+|\sin y|=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$$

egyenletrendszernek, ha mindkét változó értéke a $[-\pi;\pi]$ intervallumnak eleme?

Sorold fel a megoldásokat!

9. MODUL
HÁROMSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Készítette: Kovács Károlyné

I. HEGYESSZÖGEKRŐL

1. Egy derékszögű háromszög befogói a és b, az ezekkel szemközti szögei rendre α és β, átfogója c. Hány igaz állítás van az alábbiak között?

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

b) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$

c) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \dfrac{c^2}{ab}$

d) $b\sin\alpha = a\sin\beta$

2. Egy derékszögű háromszög átfogója 8 cm, egyik befogója 6 cm hosszú. Mekkora a háromszög kisebbik hegyesszöge?

3. Egy háromszög belső szögei: 40°, 60° és 80°-osak. A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság 4 cm hosszú. Mekkorák a háromszög oldalai?

4. Egy téglalap átlói 42°-os szöget zárnak be egymással, és a rövidebb oldala 6 cm hosszú. Milyen hosszúak az átlói?

5. Egy kikötő világítótornyából – a tenger szintje fölött 40 m magasságból – egy hajó 8°-os depressziószög alatt látszik. Milyen távol van a hajó a toronytól?

6. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza sin75° egységgel egyenlő. Mekkora a háromszög egyik hegyesszöge? Döntsd el, melyik válasz a helyes! Döntésedet indokold!

A: 75° B: Tetszőleges lehet. C: 15° D: A többi válasz nem helyes.

Megjegyzés: Itt és a többi „választásos" megoldások közül csak egy válasz megfelelő.

7. Ha egy derékszögű háromszög egyik befogója $\sin 75°$ egység, a másik $\sin 15°$ egység hosszú, akkor az átfogó hossza hány egység?

A: 0,98 B: $\mathrm{tg}75°$ C: $\mathrm{tg}15°$ D: 1

8. Egy egyenlőszárú háromszög szárainak hossza 10 cm, a szárak által bezárt szög 30°-os. Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

9. Egy egyenlőszárú háromszög szárainak hossza 8 cm, egyik belső szöge $120°$. Mekkora a háromszög harmadik oldalának hossza?

10. Egy turista β emelkedési szögű, *b* km hosszú egyenes úton jutott fel a *B* csúcsra, onnan γ emelkedési szögű ($\gamma > \beta$), *c* km hosszú egyenes úton feljutott a *C* csúcsra. Mennyi a szintkülönbség a kiindulási pont és a C csúcs között?

A: $b\cos\beta + c\cos\gamma$

B: $\dfrac{b}{\sin\beta} + \dfrac{c}{\sin\gamma}$

C: $b\sin\beta + c\sin\gamma$

D: $(b+c)\sin(\beta+\gamma)$

11. Egy szimmetrikus trapéz szára kétszerese a trapéz magasságának. Mekkorák a trapéz szögei?

12. Mekkora a hegyesszöge annak a paralelogrammának, amelynek oldalai 5 cm és 8 cm hosszúak, területe pedig $20\,\text{cm}^2$?

13. Egy ház első emeleti ablakának felső párkánya 10 m-re van az utcaszinttől. Az utca egy pontjából ez a felső párkány 35°- os emelkedési szög alatt, a ház teteje 70°-os emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a ház?

14. Egy cég emblémája tömör fából készült négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla. A gúla alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.

a) Milyen magas a gúla?

b) Mekkora szöget zár be a gúla két szemközti oldaléle?

II. ISMERI ÖN A KOSZINUSZTÉTELT?

A háromszöget két oldala és az általuk közbezárt szöge egyértelműen meghatározza, tehát ezeknek az adatoknak az ismeretében kiszámítható a háromszög többi adata, pl. a háromszög harmadik oldalának hossza, a többi szöge. A háromszög három oldala és egy szöge közötti kapcsolatot a koszinusztétel írja le az algebra nyelvén. Segítségével a három oldal ismeretében könnyen megtudhatjuk, hogy szögei szerint milyen a háromszög, mekkora a legnagyobb szöge stb. Ezt a tételt sokszor alkalmazzuk geometriai számítások során, ezért célszerű több időt szánni a tétel mélyebb megismerésére.

1. Egy háromszög egyik szögének koszinusza negatív szám. Szögei szerint milyen a háromszög?

2. Egy háromszög a, b és c oldalairól tudjuk, hogy $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$. Szögei szerint milyen a háromszög?

3. Egy háromszög mindhárom szögének szinusza pozitív szám. Szögei szerint milyen a háromszög?

4. Létezhet-e olyan háromszög, és ha igen, szögei szerint milyen, ha α, β és γ szögeire:

a) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le -0{,}25$; b) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 0$.

5. Egy háromszög két szögéről (α és β) tudjuk, hogy $\alpha:\beta = 1:2$. Melyik kifejezés egyezik meg biztosan a szögekkel szemközti oldalak arányával?

A: $1:2$; B: $\sin\alpha:\sin\beta$; C: $\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}$; D: $\cos\alpha:\cos 2\alpha$.

(A megadott válaszok közül pontosan egy helyes.)

6. Egy háromszög oldalai 3 cm, 4 cm és 6 cm hosszúak. Mekkora a legnagyobb szögének koszinusza?

7. Egy háromszög egyik szöge 120°-os, két oldalának hossza 4 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

8. Egy háromszög egyik szöge 150°-os, két oldalának hossza 6 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög területe?

9. Egy háromszög egyik oldala 4-szerese egy másik oldalnak, s e két oldal által közrefogott szög 120°-os. A háromszög leghosszabb oldala hányszorosa a legrövidebbnek?

10. Egy háromszög két oldala *a* és *b*, a velük szemközti szögek rendre α és β, tudjuk továbbá, hogy $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{a}{b}$.

a) Mekkora a $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}$?

b) Oldalai szerint milyen a háromszög?

11. Milyen határok között lehet a háromszög *b* oldalának hossza, ha az *a, b, c* oldalú háromszög hegyesszögű, $b < a$ és $a = 7$, $c = 9$?

12. Milyen határok között lehet a háromszög *b* oldalának hossza, ha az *a, b, c* oldalú háromszög tompaszögű, $b < a$ és $a = 5$, $c = 7$?

13. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha *a*, *b*, *c* oldalaira: $c^2 - \sqrt{2}ab = a^2 + b^2$?

III. KIRÁNDULUNK

1. Barátainkkal többnapos kirándulásra mentünk. Szállásunk az *A* faluban volt. Első nap felfedeztük a környéket. Szálláshelyünktől nyugatra, onnan 5 km távolságra volt *B* falu. Ha ebből a faluból északi irányban haladtunk 2 km-t, egy várromhoz (*C*) érkeztünk. Innen tovább a menetiránytól jobbra, azzal kb. 70°-os szöget bezáró egyenes úton haladtunk tovább, és *C*-től 3 km-re a *D* vadászházhoz érkeztünk.

a) Rajzold le az első napi túra útvonaltervét!

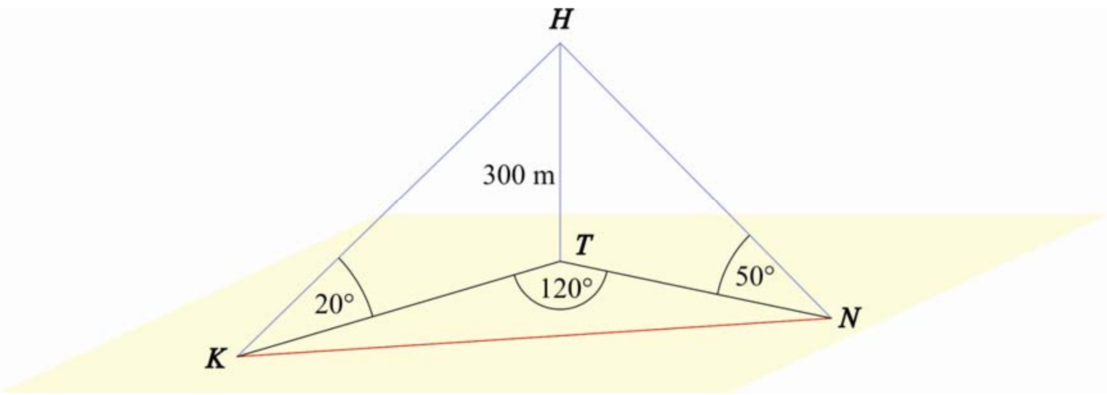
b) Számítsd ki, hogy milyen távol van légvonalban a szálláshelyünk a vadászháztól?

2. Másnap újabb túraútvonalat terveztünk. A térkép szerint, ha az *A* szálláshelyünkről dél felé indulunk el egy egyenes műúton, majd nemsokára a műútról jobbra, kb. 30°-os szögben leágazó mellékúton haladunk tovább, úgy 5 km megtétele után a *C* faluba jutunk el. Ha viszont tovább haladunk még a műúton 3 km-t, és itt (*D* pontban) egy, a műútról balra kb. 20°-os szögben leágazó úton haladunk 4 km-t, egy régi kápolnához jutunk. A társaság egyik része a *C* faluba, a másik része a *K* kápolnához ment.

a) Rajzold le a második napi túra útvonaltervét!

b) Milyen távol került egymástól légvonalban a társaság két fele?

3. Harmadik napra hagytuk a legnehezebb túrát. A szálláshelyünktől kelet felé egy kb. 300 m magas hegy látszott, tetején egy kilátóval. Elhatároztuk, hogy a hegyet „toronyiránt” másszuk meg. A társaság ismét két részre szakadt, mert egy *K* helyről lankásabbnak tűnt a hegyoldal, kb. 20°-os emelkedési szögben lehetett haladni, míg a vízszintes talajon ezzel 120°-os szöget bezáró *N* helyről meredekebb volt, kb. 50°-os emelkedési szögű. Számítsd ki a *K* és *N* pontok távolságát!



4. Egymással 60°-os szöget bezáró két egyenes útszakaszon egy-egy gépkocsi (*A* és *B*) közeledik az *M* útelágazás felé. Jelenleg *A* és *B* távolsága 600 m. *B*-ből nézve az *AM* útszakasz 45°-os szög alatt látszik. A gépkocsik állandó sebességének nagysága: $v(A) = 18$ m/sec, $v(B) = 25$ m/sec. Melyik gépkocsi, és mennyi idővel érkezik előbb az elágazáshoz?

5.* Három középiskolás diák egy folyó partján sátorozott. A folyó túlsó partján volt egy domb. Úgy becsülték, hogy a dombtető a sátorhelyükből 45°-os emelkedési szög alatt látszik. Kíváncsiságból, a sátorhelyüktől jobbra és balra is kimértek 100-100 métert, és ezekről a helyekről is megbecsülték a dombtető emelkedési szögét. A becsült szögek: az egyik pontból 60°, a másikból 30°. Becslésed szerint, milyen magas a domb? Számítsd is ki!

6. A tó egy szigetén lévő két torony (*A* és *B*) távolságát szeretnénk meghatározni. E célból a tó partján kitűzünk két olyan pontot (*C* és *D*), amelyek távolsága 300 m, továbbá lemérjük az alábbi szögeket: $DCB\angle = 90°$, $DCB\angle = 40°$, $CDA\angle = 25°$ és $CDB\angle = 70°$. Mekkora a két torony távolsága?

7. A Gellérthegy magassága tengerszint felett 235 m. A tetejéről a pesti oldal fele nézve két kis park (*A* és *B*) 40°-os és 56°-os depressziószög alatt látszik (A pesti oldal tengerszínt feletti magassága kb. 110 m). A két depressziószög mérése között a mérőeszközt 80°-kal kellett elforgatni. Milyen távol van egymástól légvonalban a két kis park?

10. MODUL
EZT MÁR MIND TUDJUK?

Készítette: Kovács Károlyné

I. CSAK VEGYESEN!

1. Add meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát!

a) $f(x)=2^{\sin x}$ b) $g(x)=\lg\cos^2 x$ c) $h(x)=\log_{0,5}\left(2^{2x}-2^x\right)$

2. a) Add meg az $\mathbf{a}(\sqrt{3}\cdot\cos 150°;2\cdot\sin 150°)$ és $\mathbf{b}(4\,;4\cos(-60)^\circ)$ vektorok koordinátáinak tízes számrendszerszerbeli alakját!

b) Számítsd ki a két vektor skaláris szorzatát!

c) Mekkora a két vektor hajlásszöge?

3. Írd fel az $A(-2;3)$ és $B(4;1)$ pontok által meghatározott *AB* szakasz

a) felezőpontjának koordinátáit!

b) tartóegyenesének egyenletét!

c) felezőmerőlegesének egyenletét!

d) Thalész-körének egyenletét!

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^{x+2}=\sqrt[x+1]{9^{8-x}}$

b) $\log_2\sin^2 x+\log_2\cos^2 x+\log_2 4=0$

c) $\sin^2 x+\sin x\cos x-1=0$

d) $2^{\sin^2 x}\cdot 2^{2\cos^2 x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$

5. Egy konvex négyszög egyik szöge derékszög, a közrefogó két oldal mindegyike *a* hosszú. A derékszöggel szemközti szög 120°-os, és e szöget közrefogó mindkét oldal *b* hosszú. Hányszorosa az *a* oldal a *b*-nek?

6. Az alábbi idézetek egy-egy iskolai dolgozatból valók. Keresd meg, és javítsd ki a hibákat!

I. „Az $e:3y-2x=5$ egyenletű egyenes egy pontja $P(1;-1)$. Ezen a ponton átmenő, az *e* egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $2x+3y+1=0$."

II. „A $\log_3 x^2-\log_3(x+2)-1=0$ egyenlet alaphalmaza azok az *x* valós számok, amelyekre $-2<x$ teljesül. Mivel $1=\log_3 3$, az egyenlet:

$\log_3 x^2-\log_3(x+2)-\log_3 3=0$.

A logaritmus azonosságait alkalmazva: $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x+2}{3} = 0$, azaz $\log_3 \frac{3x^2}{x+2} = 0$.

A logaritmus definíciója szerint: $\frac{3x^2}{x+2} = 1$."

III. „Ha a háromszög oldalainak hossza: $a = 6\,cm$, $b = 4\,cm$, és a b oldallal szemközti szöge $\beta = 30^\circ$, akkor $\frac{6}{4} = \frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ}$, így $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, és ebből $\alpha \approx 49^\circ$. A háromszög harmadik szöge kb. $101{,}4^\circ$."

7. Egy urnában 7 piros, 8 fehér és 9 zöld golyó van. Kihúzunk egymás után három golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a három kihúzott golyó fehér, ha
a) a kihúzott golyót nem tesszük vissza
b) a kihúzott golyót visszatesszük?

8. Matematikaórán a tanár röpdolgozatot íratott. Két feladatot tűzött ki. Az elsőt a tanulók 70%-a, a másodikat pedig a tanulók 60%-a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és kilencen mindkét feladatot megoldották.
a) Hány diák írta meg a dolgozatot?
b) Az iskolába ellátogatott a matematika szaktanácsadó. A kijavított röpdolgozatok közül kettőt véletlenszerűen kihúzott. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott dolgozatok egyike egy mindkét, a másik pedig csak az első feladatot megoldó tanulóé?

9. Állapítsd meg, hogy mi azon körök középpontjainak halmaza, amelyek az $e: 2x - y + 5 = 0$ és $f: 2x - y = 3$ egyenletű egyenesek mindegyikét érintik!

10. Egy szabályos tizenkétszög oldalának hossza 4 cm. Milyen hosszú a sokszög legrövidebb átlója?