

MATEMATIKA „C”
6. évfolyam

9. modul
A BULIBAN

Készítette: Köves Gabriella

A modul célja	<p>Tapasztalatszerzés struktúrák különböző megjelenítésére, megmutatni a kapcsolatot a relációk, gráfok és kombinatorikai feladatok között.</p> <p>A tudatos észlelés, a megfigyelés és a figyelem fejlesztése.</p> <p>Csoportban való tevékenykedés gyakorlása, együttműködés, egymásra való figyelés.</p> <p>Kombinatorikai ismeretek alapozása:</p> <ul style="list-style-type: none"> Kiválasztások gyakorlása kevés számú elemszámmal, majd általánosítás Modell készítése a probléma megoldásához <p>Geometriai ismeretek alapozása:</p> <ul style="list-style-type: none"> Tájékozódás a síkon, gráf értelmezése, megrajzolása <p>Halmazelmélet, logikai ismeretek alapozása:</p> <ul style="list-style-type: none"> Egy, illetve több feltételnek eleget tevő tevékenység végrehajtása Következtetések, tapasztalatszerzés az implikációra és az ekvivalenciára Venn-diagramm értelmezése, megrajzolása <p>Relációk, függvények</p> <ul style="list-style-type: none"> Binér relációk értelmezése, vizsgálata Tapasztalatszerzés reflexív, tranzitív, szimmetrikus tulajdonságokra <p>Gráfelméleti ismeretek alapozása: tapasztalatszerzés a gráf, él, hurok, kör stb. fogalmakra.</p>
Időkeret	3×45 perc
Ajánlott korosztály	12–13 évesek; 6. osztály; tetszőleges időben.
Modulkapcsolódási pontok	6. évfolyam C 3. modul

A képességfejlesztés fókuszai	<p>Megismerési képességek alapozása: az érzékszervek tudatos működtetése; az összehasonlítás, (megkülönböztetés, azonosítás) általánosítás képességének fejlesztése a megadott reláció tulajdonságainak vizsgálata feltételeknek megfelelő modellek készítése, elemzése, összehasonlítása</p> <p>Gondolkodási képességek: az analóg gondolkodás fejlesztése analízis, szintézis, absztrahálás, általánosítás rendszerezés következtetések, az induktív és deduktív lépések gyakorlása</p> <p>Kommunikációs képességek: kooperatív tanulási formák gyakorlása az elemi kommunikációs képesség fejlesztése; párban, csoportban való működtetése</p> <p>Tudásszerző képességek: problémaérzékenység fokozása kreativitás fejlesztése</p>
--------------------------------------	---

AJÁNLÁS

Ennek a modulnak a célja megmutatni a matematika különböző területeinek a kapcsolatát, a modellalkotás fontosságát, az analógiák felismerését tapasztalati szinten.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Gráfelméleti alapok : <http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/graf03/alapok.htm>*

Surányi László: *Gráfelmélet*: <http://home.fazekas.hu/~lsuranyi/Grafok/1graf0.htm>*

Dr. Hámori Miklós: *Relációk* (Általános iskolai szakköri füzetek sorozat, Tankönyvkiadó, Budapest 1979).

A gráfelmélet himnusza: <http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/humor/himnusz.html>*

ÉRTÉKELÉS

A modulban **folyamatos megfigyeléssel** követjük: az észlelés pontosságát; a feladatmegoldásokban a próbálkozások alakulását, a következtetések, általánosítások pontosságát, az együttműködés és a kommunikáció képességének alakulását; Az értékelés megerősítő legyen, mindenkinek saját fejlődéséhez, fejlettségi szintjéhez mért.

* 2007. augusztusában a honlap elérhető

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, melléletek
1.	Csoportalakítás	Csoportkohézió, kooperatív tanulás gyakorlása, fejlesztése az egész modul során.	
2.	Tapasztalatszerzés 1, 2, 3, ..., 8, ..., n elem ismétlés nélküli másodosztályú variációjáról, modellkészítésről; elemek táblázattal, Venn-diagrammal, nyíldiagrammal történő ábrázolásáról. Munkaforma: csoportos	Tervszerű próbálgatás, logikai következtetés, összefüggések felfedezése, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás.	1. melléklet
3.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	
4.	Tapasztalatszerzés 1, 2, 3, ... 8, ..., n elem ismétlés nélküli másodosztályú kombinációjára, modellkészítésről, összefüggések gráffal, nyíldiagrammal Venn-diagrammal, koordináta-rendszerben, táblázattal történő ábrázolásáról. Elemek felsorolása. Munkaforma: csoportos	Tervszerű próbálgatás, logikai következtetés, összefüggések felfedezése, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás.	2. melléklet
5.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	
6.	Tapasztalatszerzés arról, hogy a feltétel módosítása hogyan változtatja meg a modellt. Munkaforma: frontális, csoportos, egyéni	A gondolkodás rugalmasságának fejlesztése.	2. melléklet utolsó ábrája.
7.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
8–11.	Ismétlés nélküli másodosztályú variáció, illetve kombináció felismerése problémahelyzetben. Összefüggések ábrázolása gráffal, nyíldiagrammal Venn-diagrammal, koordináta-rendszerben, táblázattal. Elemek felsorolása. Munkaforma: frontális, csoportos, egyéni	Analóg gondolkodás fejlesztése. Logikai következtetés, összefüggések felfedezése, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás.	
12.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	
13.	Tapasztalatszerzés arról, hogy a feltétel módosítása hogyan változtatja meg a feladat megoldását, a feladathoz kapcsolható modellt. Munkaforma: frontális, csoportos, egyéni	A gondolkodás rugalmasságának fejlesztése.	3. melléklet
14.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	
15.	Gráffal adott reláció vizsgálata. Gráffal adott reláció elemeinek felírása, konvertálása táblázatba. Munkaforma: egyéni	Összefüggések leolvasása.	4. melléklet
16.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	
17.	Elempárokkel adott szimmetrikus binér reláció vizsgálata. Munkaforma: önálló vagy páros	Összefüggések leolvasása, elemzése.	

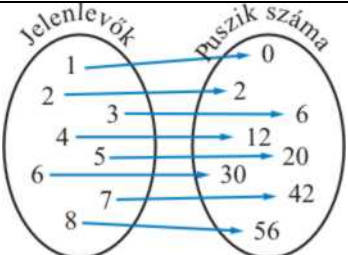
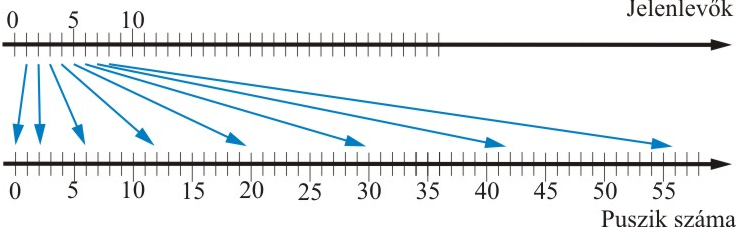
	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, melléletek
18–19.	Binér reláció ábrázolása gráffal, táblázattal. Munkaforma: csoportos, egyéni	A gondolkodás rugalmasságának fejlesztése. Különböző modellek összehasonlítása.	5. melléklet
20–22.	Szimmetrikus binér relációk keresése, elemzése, a modellek készítése, összehasonlítása. Tapasztalatszerzés az ekvivalencia és a szimmetrikus binér reláció közötti kapcsolatáról. Munkaforma: csoportos, egyéni	Analóg gondolkodás fejlesztése.	
23–24.	Nem szimmetrikus binér relációk keresése, elemzése, a modellek készítése, összehasonlítása. Tapasztalatszerzés az antiszimmetrikus és aszimmetrikus relációkról. Munkaforma: csoportos, egyéni	Analóg gondolkodás fejlesztése.	
25–27.	Reflexív binér reláció ábrázolása gráffal (a hurok), táblázattal. Munkaforma: csoportos, egyéni	A gondolkodás rugalmasságának fejlesztése. Különböző modellek összehasonlítása.	6. melléklet
28–30. 31–32.	Reflexív binér relációk keresése, elemzése, a modellek készítése, összehasonlítása. Munkaforma: csoportos, egyéni	Analóg gondolkodás fejlesztése.	

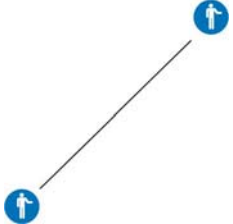
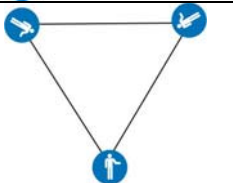
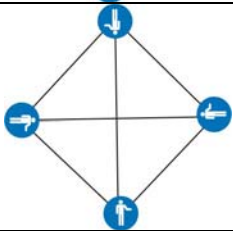
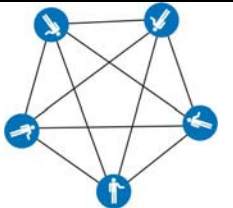
	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, melléletek
33–37.	Szöveggel adott reláció vizsgálata, ábrázolása gráffal. Az adott reláció elemeinek felírása rendezett elempárokkal, ábrázolása koordináta-rendszerben, nyíldiagrammal, táblázattal. Munkaforma: egyéni	Összefüggések leolvasása, elemzése.	7. melléklet
38.	Értékelés	Csoportkohézió fejlesztése	
39–42.	Kör keresése az adott gráfban – tapasztalatszerzés. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések leolvasása, elemzése.	
43.	A tranzitív relációfogalmának bevezetése. Munkaforma: csoportos, egyéni		
44–47.	Oszlopdiagrammal adott reláció tranzitivitásának vizsgálata. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések felfedezése, ábrázolása, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás.	8. melléklet
48.	Adott relációk tranzitivitásának vizsgálata. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések felfedezése, ábrázolása, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás.	



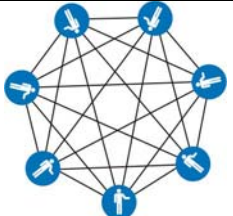
	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, mellékletek
49.	Konkrét problémához kapcsolódóan tapasztalatszerzés az „Egy véges egyszerű gráfban (véges, többszörös él és hurokél nélküli gráfban) mindig van két olyan pont, amelyek fokszáma megegyezik.” tételre. A tétel bizonyítása konkrét elemszámra. A tétel bizonyítása általánosan. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések felfedezése, ábrázolása, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás	
50-52.	Az előző tétel bizonyításának elmélyítése, a mindennapi élethez kapcsolódó feladatokon keresztül. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések felfedezése, ábrázolása, általánosítás, analízis, szintézis, absztrahálás	
53.	Konkrét problémához kapcsolódóan tapasztalatszerzés az ellenpélda szerepére, valamint arra, hogy a feltételek megváltoztatásával hogyan változik egy állítás igazsághalmaza. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések felfedezése, absztrahálás	
	A témához kapcsolódó feladatok. Munkaforma: csoportos, egyéni	Összefüggések felfedezése, absztrahálás	

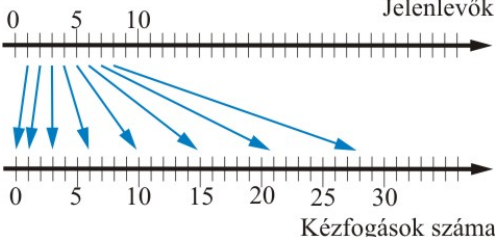
FELDOLGOZÁS MENETE

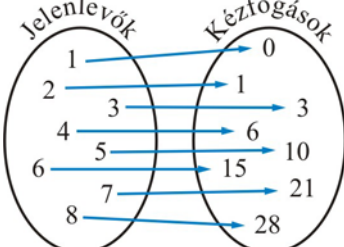
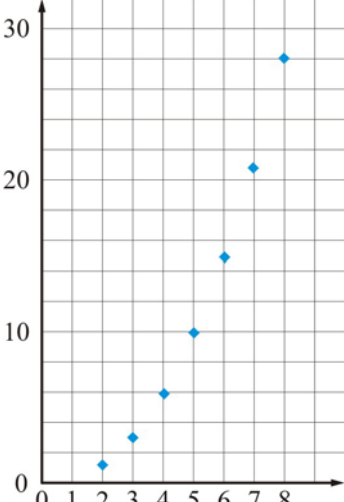
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																				
1. Alakítsunk négyfős csoportokat! Mindegyik csoport közösen használjon egy-egy táblázatot! Kedvezőbbnek véljük a tudásuk szerint inhomogén csoport alakítását, ezzel is megteremtve a kooperatív tanulás feltételét.																					
2. Egy társaságban szilveszterezésre érkezéskor mindenki ad mindenkinek egy puszit. Hány puszit adnak, ha 1, 2, ... 8, ..., n tagja van a társaságnak?	Problémamegoldás, amelyik csoportban szükséges, játsszák el 2, 3, 4 taggal a feladat megoldását!																				
Töltsd ki a táblázatot! (1. melléklet)	<p>Saját magának senki sem ad puszit, de mindenki másnak igen. Így a társaság bármely tagja eggyel kevesebb puszit ad, mint a tagok száma.</p> <p>2 tag esetén 1 ember 1 puszit ad, 2 ember $2 \cdot 1$ puszit ad. 3 tag esetén 1 ember 2 puszit ad, 3 ember $3 \cdot 2$ puszit ad. . . . 7 tag esetén 1 ember 6 puszit ad, 7 ember $7 \cdot 6$ puszit ad. 8 tag esetén 1 ember 7 puszit ad, 8 ember $8 \cdot 7$ puszit ad. n tag esetén 1 ember $n - 1$ puszit ad, n ember $n(n - 1)$ puszit ad.</p> <table border="1" data-bbox="1133 1070 2047 1190"> <tbody> <tr> <td data-bbox="1133 1070 1480 1145">Ennyien vannak a társaságban</td> <td data-bbox="1480 1070 1525 1145">1</td> <td data-bbox="1525 1070 1570 1145">2</td> <td data-bbox="1570 1070 1615 1145">3</td> <td data-bbox="1615 1070 1659 1145">4</td> <td data-bbox="1659 1070 1704 1145">5</td> <td data-bbox="1704 1070 1749 1145">6</td> <td data-bbox="1749 1070 1794 1145">7</td> <td data-bbox="1794 1070 1839 1145">8</td> <td data-bbox="1839 1070 2047 1145">N</td> </tr> <tr> <td data-bbox="1133 1145 1480 1190">Ennyi puszit adnak</td> <td data-bbox="1480 1145 1525 1190">0</td> <td data-bbox="1525 1145 1570 1190">2</td> <td data-bbox="1570 1145 1615 1190">6</td> <td data-bbox="1615 1145 1659 1190">12</td> <td data-bbox="1659 1145 1704 1190">20</td> <td data-bbox="1704 1145 1749 1190">30</td> <td data-bbox="1749 1145 1794 1190">42</td> <td data-bbox="1794 1145 1839 1190">56</td> <td data-bbox="1839 1145 2047 1190">$n(n - 1)$</td> </tr> </tbody> </table>	Ennyien vannak a társaságban	1	2	3	4	5	6	7	8	N	Ennyi puszit adnak	0	2	6	12	20	30	42	56	$n(n - 1)$
Ennyien vannak a társaságban	1	2	3	4	5	6	7	8	N												
Ennyi puszit adnak	0	2	6	12	20	30	42	56	$n(n - 1)$												

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>Ábrázold Venn-diagrammal! (1. melléklet)</p>	
<p>Ábrázold nyíldiagrammal! (1. melléklet)</p>	
<p>3. Értékelés: Csoportonként értékeljük. Helyes megoldások 1-1 pont, helyes indoklás 2 pont.</p>	
<p>4. Egy társaságban szilveszterezésre érkezéskor mindenki kezét fog mindenkivel. Hány kézfogás történik, ha 1, 2, ... 8, ..., n tagja van a társaságnak?</p>	<p>Problémamegoldás, amelyik csoportnak szüksége van rá, játssza el 2, 3, 4 taggal a feladat megoldását!</p>

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység		
Kézfogások ábrázolása, és számuk meghatározása. (2. melléklet)	Jelenlevők	Kézfogások	
	1		0
	2		1
	3		3
	4		6
	5		10

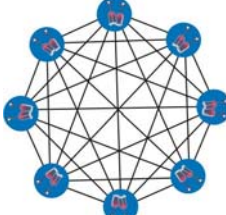
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység		
<p>Kézfogások ábrázolása, és számuk meghatározása. (Folytatás.)</p>	6		15
			21
	8		28


Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>Kézfogások ábrázolása, és számuk meghatározása. (Folytatás.)</p>	<p>Saját magával senki sem fog kezét, de mindenki mással igen. Így a társaság bármely tagja eggyel kevesebb emberrel fog kezét, mint a jelenlevők száma. Ez így $n(n - 1)$ kézfogás lenne, de ha A kezét fog B-vel, akkor B is kezét fog A-val. Így a kézfogások száma $\frac{n(n - 1)}{2}$.</p> <p>2 tag esetén 1 ember 1 másikkal fog kezét, 2 ember $\frac{2 \cdot 1}{2}$ -vel.</p> <p>3 tag esetén 1 ember 2 másikkal fog kezét, 3 ember $\frac{3 \cdot 2}{2}$ -vel.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>7 tag esetén 1 ember 6 másikkal fog kezét, 7 ember $\frac{7 \cdot 6}{2}$ -vel.</p> <p>8 tag esetén 1 ember 7 másikkal fog kezét, 8 ember $\frac{8 \cdot 7}{2}$ -vel.</p> <p>n tag esetén 1 ember $n - 1$ másikkal fog kezét, n ember $\frac{n(n - 1)}{2}$ -vel.</p>
<p>Ábrázold nyíldiagrammal! (2. melléklet)</p>	

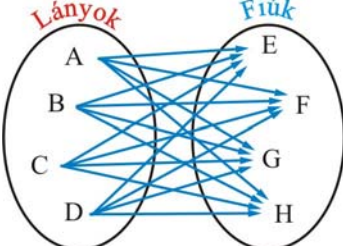
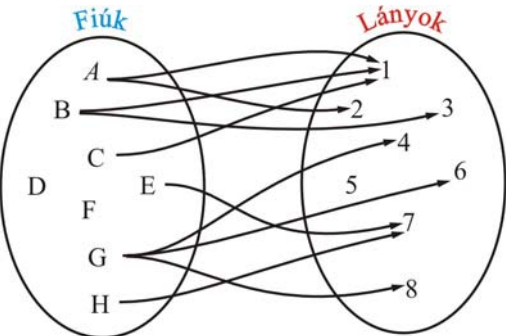
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>Ábrázold Venn-diagrammal! (2. melléklet)</p>	
<p>Ábrázold az adatokat koordináta-rendszerben! (2. melléklet)</p>	
<p><i>A, B, C, D, E, F, G, H</i> a társaság tagjai. Mindenki mindenkivel kezet fogott. Sorold fel, ki kivel fogott kezet! (2. melléklet)</p>	<p><i>AB</i> <i>AC BC</i> <i>AD BD CD</i> <i>AE BE CE DE</i> <i>AF BF CF DF EF</i> <i>AG BG CG DG EG FG</i> <i>AH BH CH DH EH FH GH</i></p>

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																																																																																	
<p>Jelöld X-el a táblázatban, hogy ki kivel fogott kezét! (2. melléklet)</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> <th>H</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>C</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>E</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>F</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>G</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>H</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A		X	X	X	X	X	X	X	B			X	X	X	X	X	X	C				X	X	X	X	X	D					X	X	X	X	E						X	X	X	F							X	X	G								X	H								
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																										
A		X	X	X	X	X	X	X																																																																										
B			X	X	X	X	X	X																																																																										
C				X	X	X	X	X																																																																										
D					X	X	X	X																																																																										
E						X	X	X																																																																										
F							X	X																																																																										
G								X																																																																										
H																																																																																		
<p>5. Értékelés: Csoportonként értékeljük! Helyes megoldásokért 1-1 pontot, helyes indoklásért 2 pontot adjunk!</p>																																																																																		
<p>6. Szilveszterkor egy társaságba 4 fiú és 4 lány érkezik. Ezek üdvözlik egymást. A lányok mindenkinek pusztit adnak, amikor megérkeznek, a fiúk a lányoknak pusztit adnak, viszont a fiúkkal kezét fognak. Hány pusztit adnak, illetve hány kézfogás történik érkezéskor? Készíts modellt! (2. melléklet)</p> <p>Figyeltessük meg, hogy az előző táblázathoz képest hogyan változott meg itt a táblázatunk!</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> <th>H</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td>P</td> <td></td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>P</td> <td>P</td> <td></td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td></td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> </tr> <tr> <th>E</th> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td></td> <td>K</td> <td>K</td> <td>K</td> </tr> <tr> <th>F</th> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td></td> <td></td> <td>K</td> <td>K</td> </tr> <tr> <th>G</th> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>K</td> </tr> <tr> <th>H</th> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td>P</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A		P	P	P	P	P	P	P	B	P		P	P	P	P	P	P	C	P	P		P	P	P	P	P	D	P	P	P		P	P	P	P	E	P	P	P	P		K	K	K	F	P	P	P	P			K	K	G	P	P	P	P				K	H	P	P	P	P				
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																										
A		P	P	P	P	P	P	P																																																																										
B	P		P	P	P	P	P	P																																																																										
C	P	P		P	P	P	P	P																																																																										
D	P	P	P		P	P	P	P																																																																										
E	P	P	P	P		K	K	K																																																																										
F	P	P	P	P			K	K																																																																										
G	P	P	P	P				K																																																																										
H	P	P	P	P																																																																														
<p>7. Értékelés: Csoportonként értékeljük! Helyes megoldások 1-1 pont, helyes indoklás 2 pont.</p>																																																																																		

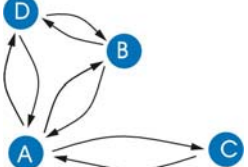
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																				
<p>8. Az előző társaságban mindenki vitt mindenkinek ajándékot. Hány ajándékot vittek összesen, ha a társaságnak 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tagja volt? Készíts modellt!</p> <p>Az előzőleg bemutatott modellek közül a gyermekek szabadon válasszanak!</p>	<p>A megoldás ugyanaz, mint az 1. feladatnál. Saját magának senki sem ad ajándékot, de mindenki másnak igen. Így a társaság bármely tagja egyel kevesebb ajándékot ad, mint a tagok száma.</p> <p>2 tag esetén 1 ember 1 ajándékot ad, 2 ember $2 \cdot 1$ ajándékot ad. 3 tag esetén 1 ember 2 ajándékot ad, 3 ember $3 \cdot 2$ ajándékot ad. . . . 1 tag esetén 1 ember 6 ajándékot ad, 7 ember $7 \cdot 6$ ajándékot ad. 8 tag esetén 1 ember 7 ajándékot ad, 8 ember $8 \cdot 7$ ajándékot ad. n tag esetén 1 ember $n - 1$ ajándékot ad, n ember $n(n - 1)$ ajándékot ad.</p> <table border="1" data-bbox="1133 820 2038 943"> <tr> <td>Ennyien vannak a társaságban</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>n</td> </tr> <tr> <td>Ennyi ajándékot adnak</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>6</td> <td>12</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>42</td> <td>56</td> <td>$n(n - 1)$</td> </tr> </table>	Ennyien vannak a társaságban	1	2	3	4	5	6	7	8	n	Ennyi ajándékot adnak	0	2	6	12	20	30	42	56	$n(n - 1)$
Ennyien vannak a társaságban	1	2	3	4	5	6	7	8	n												
Ennyi ajándékot adnak	0	2	6	12	20	30	42	56	$n(n - 1)$												
<p>9. Az előző szilveszteri társaságban előkerült a Malomjáték. Mindenki játszott mindenkivel egy partit és egy visszavágót. Hány partit játszottak összesen, ha a társaságnak 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tagja volt? Készíts modellt!</p> <p>Az előzőleg bemutatott modellek közül a gyermekek szabadon válasszanak!</p>	<p>A megoldás ugyanaz, mint az 1. feladatnál.</p>																				


Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>10. Ugyanebben a társaságban éjfélkor mindenki koccintott mindenkivel. Hány koccintás volt összesen, ha a társaságnak 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tagja volt? Készíts modellt!</p> <p>Az előzőleg bemutatott modellek közül a gyermekek szabadon válasszanak!</p>	<p>A megoldás ugyanaz, mint a 2. feladatnál. Saját magával senki sem koccint, de mindenki mással igen. Így a társaság bármely tagja eggyel kevesebb emberrel koccint, mint a jelenlevők száma. Ez így $n(n-1)$ koccintás lenne, de ha A koccint B-vel, akkor B is koccint A-val. Így a koccintások száma $\frac{n(n-1)}{2}$.</p> <p>2 tag esetén 1 ember 1 másikkal koccint, 2 ember $\frac{2 \cdot 1}{2}$ -vel. 3 tag esetén 1 ember 2 másikkal koccint, 3 ember $\frac{3 \cdot 2}{2}$ -vel. . . . 7 tag esetén 1 ember 6 másikkal koccint, 7 ember $\frac{7 \cdot 6}{2}$ -vel. 8 tag esetén 1 ember 7 másikkal koccint, 8 ember $\frac{8 \cdot 7}{2}$ -vel. n tag esetén 1 ember $n-1$ másikkal koccint, n ember $\frac{n(n-1)}{2}$ -vel.</p>
	

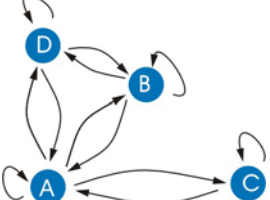
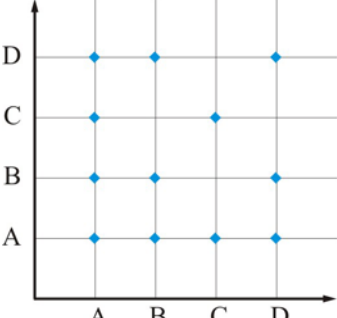
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																																																																																	
<p>11. Ha mindenki táncolt mindenkivel, akkor hány pár alakulhatott, ha a társaságnak 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tagja volt? Készíts modellt!</p> <p>Az előzőleg bemutatott modellek közül a gyermekek szabadon válasszanak!</p>	<p>A megoldás ugyanaz, mint az 2. feladatnál.</p>																																																																																	
<p>12. Értékelés: Csoportonként értékeljük! Helyes megoldások 1-1 pont, helyes indoklás 2 pont.</p>																																																																																		
<p>13. Ha mindenki táncolt mindenkivel, hány pár alakulhatott, ha a társaságnak 4 lány és 4 fiú tagja volt, és az azonos neműek nem táncoltak egymással? Készíts modelleket!</p>	<p>Mindegyik lány táncolt mindegyik fiúval. 1 lány 4 párban volt. 4 lány $4 \cdot 4 = 16$ párt alkotott. A fiúkat már nem kell vizsgálni, mert ha egy lány táncolt egy fiúval, a fiú is táncolt a lánnyal.</p>																																																																																	
<p>Ábrázolás gráffal (3. melléklet):</p>																																																																																		
<p>Ábrázolás táblázattal (3. melléklet): Jelöld be azokat a cellákat, amelyekbe biztosan nem kerülhet kapcsolatot jelző jel!</p>	<table border="1" data-bbox="1131 1040 1592 1382"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> <th>H</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>C</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>E</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>F</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>G</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>H</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A					X	X	X	X	B					X	X	X	X	C					X	X	X	X	D					X	X	X	X	E									F									G									H								
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																										
A					X	X	X	X																																																																										
B					X	X	X	X																																																																										
C					X	X	X	X																																																																										
D					X	X	X	X																																																																										
E																																																																																		
F																																																																																		
G																																																																																		
H																																																																																		

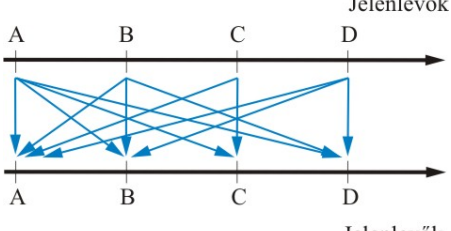
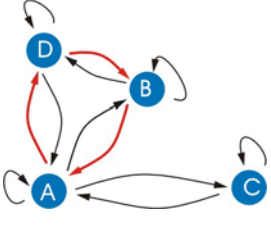
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>Ábrázolás az elemek felsorolásával (3. melléklet):</p>	<p>AE BE CE DE AF BF CF DF AG BG CG DG AH BH CH DH</p>
<p>Ábrázolás Venn-diagrammal (3. melléklet): Egészítsd ki a diagrammot!</p>	
<p>14. Értékelés: Csoportonként értékeljünk! Helyes megoldások 1-1 pont, helyes indoklás 2 pont.</p>	
	<p>15. Éjfél után érkeztek még vendégek, és voltak, akik táncoltak, és voltak, akik nem. Hogy ki táncolt és kivel azt a gráf mutatja. Mit tudunk még leolvasni az ábráról? (4. melléklet)</p> <p>Hány fiú volt? 8 Hány lány volt? 8 Hányan voltak összesen? 16 Hány fiú táncolt? 6 Hány fiú nem táncolt? 2 Hány lány táncolt? 7 Hány lány nem táncolt? 1 Melyik fiú táncolt a legtöbb lánnyal? G Melyik lány táncolt a legtöbb fiúval? 1 Mely fiúk táncoltak ugyanannyi lánnyal? A-B, E-F Stb.</p>

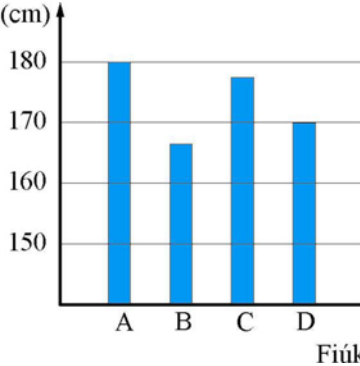
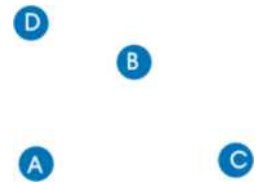
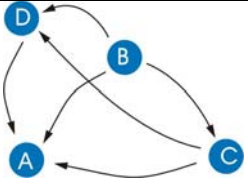
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység									
Az ábra alapján töltsd ki a táblázatot! (4. melléklet)	Lá-nyok	Fiúk								
		A	B	C	D	E	F	G	H	
		1	X	X	X					
		2	X							
		3		X						
		4						X		
		5								
		6						X		
		7				X			X	
	8						X			
Az ábra alapján írd fel a párokat! (4. melléklet)	(A; 1)	(B; 1)	(C; 1)	(E; 7)	(G; 4)	(H; 7)				
	(A; 2)	(B; 3)					(G; 6)			
							(G; 8)			
16. Értékelés: Csoportonként értékeljük! Helyes megoldások 1-1 pont, helyes indoklás 2 pont.										
17. A társaságban a fiúk közül voltak, akik már korábban is ismerték egymást, és voltak, akik itt találkoztak először. (Az ismeretség kölcsönös. Ha <i>A</i> ismerte <i>B</i> -t, <i>B</i> is ismerte <i>A</i> -t.) A felsorolás az ismeretségeket mutatja. Figyelembe vesszük, hogy az ismeretség kölcsönös: <i>A-B</i> , <i>A-C</i> , <i>A-D</i> , <i>B-D</i> , Nem vesszük figyelembe, hogy az ismeretség kölcsönös: (<i>A,B</i>) (<i>B,A</i>) (<i>C,A</i>) (<i>D,B</i>) (<i>A,C</i>) (<i>B,D</i>) (<i>A,D</i>)										

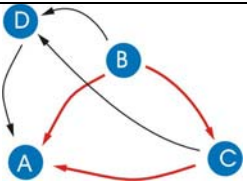
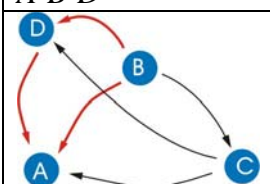
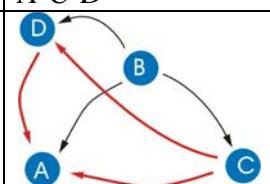
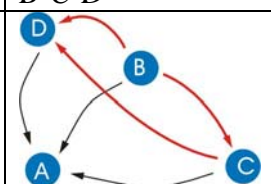
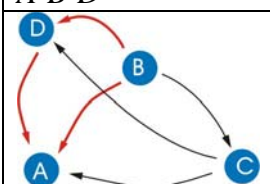
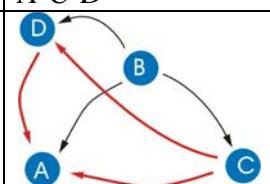
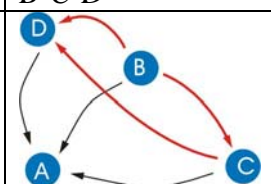
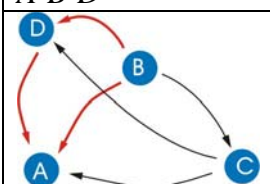
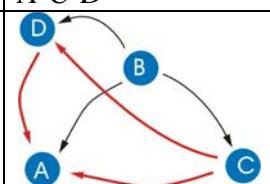
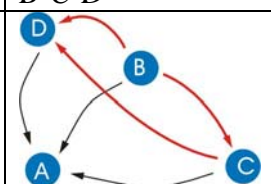
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																									
18. Készítsük el az ismeretség gráfját! (5. melléklet)																										
19. Készítsük el az ismeretség táblázatát! Figyeltessük meg, hogy a szürke átlóra szimmetrikus a táblázat! (5. melléklet)	<table border="1" data-bbox="1131 502 1388 694"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td>X</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>X</td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>X</td> <td>X</td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	A		X	X	X	B	X			X	C	X				D	X	X		
	A	B	C	D																						
A		X	X	X																						
B	X			X																						
C	X																									
D	X	X																								
20. Beszéljük meg, hogy ha A ismeri B -t, B is ismeri A -t. (Más szóval A kapcsolatban van B -vel, vagy mondhatjuk A relációban van B -vel.) Az ilyen kapcsolatot szimmetrikusnak mondjuk. Jelölhetjük $A R B$. Egy kapcsolatot, relációt szimmetrikusnak mondunk, ha $A R B$, és ugyanakkor $B R A$ is teljesül.																										
21. Ösztönözzük a gyermekeket, hogy mondjanak példákat szimmetrikus kapcsolatokra! 22. A gyermekek által mondott példákat vizsgáljuk meg, rajzoljuk le, készítsünk modelleket az előző feladatokhoz hasonlóan!	<p>Például: Malmoztak: Ha A malmozott B-vel, akkor B is malmozott A-val. Testvére: Ha A testvére B-nek, akkor B is testvére A-nak. Ugyanolyan magas: Ha A olyan magas, mint B, akkor B is olyan magas, mint A. Kezet fogtak, koccintottak, ugyanolyan színű, egyenlő stb. Párhuzamos: Ha e egyenes párhuzamos f-el, akkor f is párhuzamos e-vel Merőleges: Ha e egyenes merőleges f-re, akkor f is merőleges e-re. Hasonló: Ha A alakzat hasonló B-hez, akkor B is hasonló A-hoz. Egybevágó: Ha A alakzat egybevágó B-vel, akkor B is egybevágó A-val.</p>																									

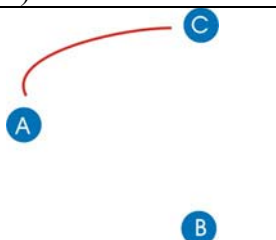
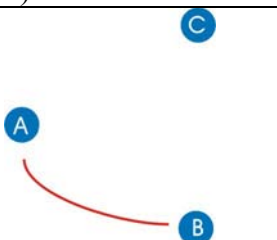
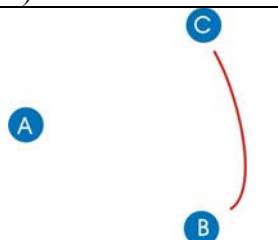
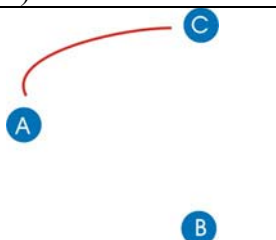
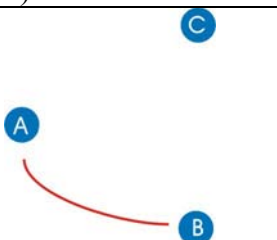
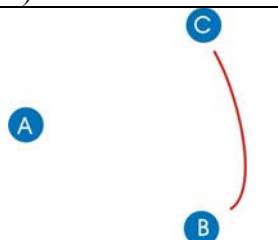
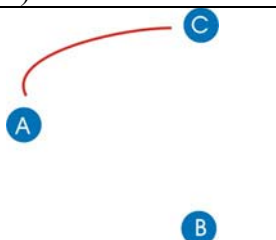
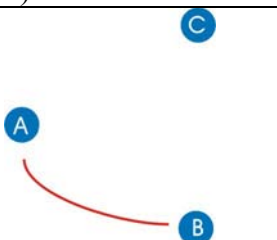
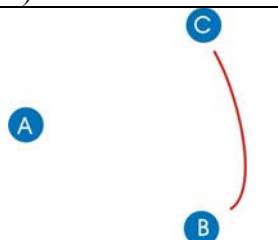
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																									
23. Mondjatok példákat nem szimmetrikus kapcsolatokra!	Például:																									
24. A gyermekek által mondott példákat vizsgáljuk meg, rajzoljuk le, készítsünk modelleket!	Gyereke: Ha A gyereke B -nek, akkor B biztosan nem gyereke A -nak. Anyja, apja stb. Alacsonyabb, magasabb, kisebb, nagyobb, sötétebb stb.																									
25. Tegyük fel, hogy A, B, C, D fiúk közül mindenki ismeri saját magát, de másokat nem.																										
26. Készítsük el az ismeretség gráfját! (6. melléklet)																										
27. Készítsük el az ismeretség táblázatát! Figyeltessük meg, hogy csak a szürke átlóban vannak elemek! (6. melléklet)	<table border="1" data-bbox="1137 730 1400 911"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td>X</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>C</th> <td></td> <td></td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <th>D</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td>X</td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	A	X				B		X			C			X		D				X
	A	B	C	D																						
A	X																									
B		X																								
C			X																							
D				X																						
28. Beszéljük meg, hogy ha A ismeri A -t (más szóval A kapcsolatban van A -val, vagy mondhatjuk A relációban van A -val, vagy relációban van saját magával), akkor a kapcsolatot reflexívnek nevezzük! Jelölhetjük $A R A$ -val. Egy kapcsolatot, relációt reflexívnek mondunk, ha $A R A$ teljesül.																										
29. Ösztönözzük a gyermekeket, hogy mondjanak példákat reflexív kapcsolatokra!	Például: Ugyanolyan színű, egyenlő... stb.																									
30. A gyermekek által mondott példákat vizsgáljuk meg, rajzoljuk le, készítsünk modelleket!	Párhuzamos: Az e egyenes párhuzamos saját magával. Egybevágó: Egy alakzat egybevágó saját magával.																									

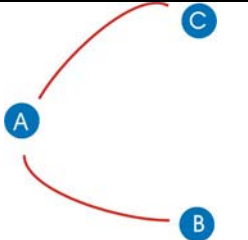
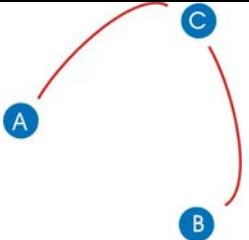
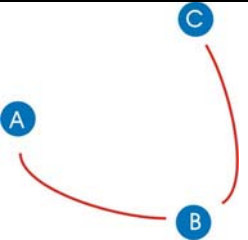
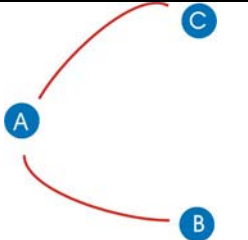
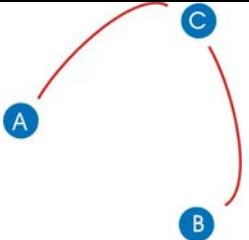
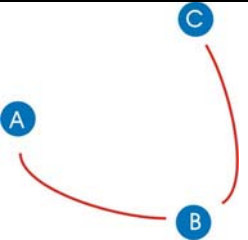
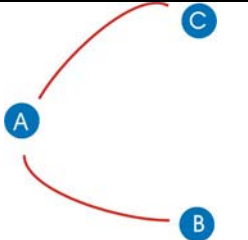
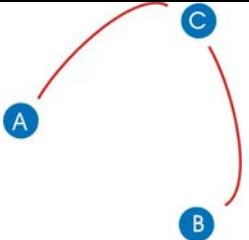
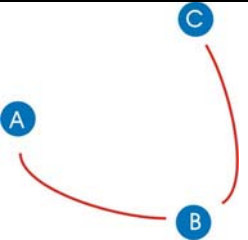
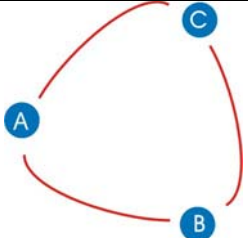
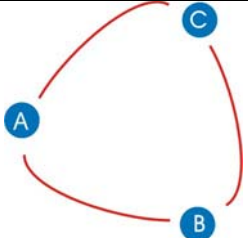
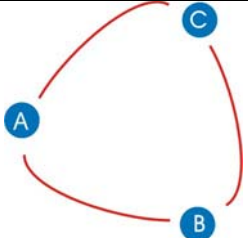
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>31. Mondjanak példákat nem reflexív kapcsolatokra!</p> <p>32. A gyermekek által mondott példákat vizsgáljuk meg, rajzoljuk le, készítsünk modelleket!</p>	<p>Például: Testvére: A nem testvére saját magának. Anyja, apja stb Magasabb: A nem magasabb saját magánál. Alacsonyabb, kisebb, nagyobb, világosabb, stb. Merőleges: Egy egyenes sohasem merőleges saját magára.</p>
<p>33. A 17. feladatot változtassuk meg úgy, hogy jelöljük azt is, hogy mindenki ismeri saját magát is! Rajzoljuk le az előző két gráfot egy ábrába! (7. melléklet)</p>	
<p>34. Írjuk le az összes kapcsolatot! (7. melléklet)</p>	<p>$(A; A), (B; A), (C; A), (D; A),$ $(A; B), (B; B), (C; C), (D; B),$ $(A; C), (B; D), (D; D),$ $(A; D),$</p>
<p>35. Jelöljük koordináta-rendszerben a kapcsolatokat! (7. melléklet)</p>	

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység																									
<p>36. Jelöljük nyíldiagrammal a kapcsolatokat! (7. melléklet)</p>	 <p style="text-align: right;">Jelenlevők</p>																									
<p>37. Ábrázoljuk táblázatban ezeket a kapcsolatokat! (7. melléklet)</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td>X</td> <td>X</td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>X</td> <td></td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>X</td> <td>X</td> <td></td> <td>X</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">Jelenlevők</p>		A	B	C	D	A	X	X	X	X	B	X	X		X	C	X		X		D	X	X		X
	A	B	C	D																						
A	X	X	X	X																						
B	X	X		X																						
C	X		X																							
D	X	X		X																						
<p>38. Értékelés: Csoportonként értékeljük! Helyes megoldások 1-1 pont, helyes indoklás 2 pont.</p>																										
<p>39. Ki tudsz-e választani ebben a kapcsolatrendszerben 3 embert úgy, hogy ha az egyik ismeri a másikat, a másik a harmadikat, akkor a harmadik is ismeri az egyiket (az elsőt)?</p> <p><i>A-B-D</i> egy ilyen hármas ebben a relációban.</p>																										
<p>40. Ha <i>A</i> kapcsolatban van <i>B</i>-vel, és <i>B</i> kapcsolatban van <i>D</i>-vel, akkor <i>A</i> is kapcsolatban van <i>D</i>-vel.</p>																										
<p>41. A négy fiú <i>A</i>, <i>B</i>, <i>C</i>, <i>D</i> közül hányféleképpen tudunk kiválasztani 3-at?</p>	<p>4- féleképpen. Ezek: <i>A-B-C</i>, <i>A-B-D</i> <i>A-C-D</i> <i>B-C-D</i></p>																									

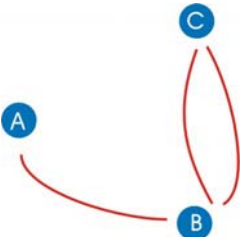
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>42. Ebben a kapcsolatrendszerben ki tudsz-e választani 3 embert úgy, hogy az előző feltételrendszer ne teljesüljön?</p>	<p>$A-B-C$ nem teljesül, mert C és B nem ismeri egymást. $A-B-D$ teljesül $A-C-D$ nem teljesül, mert C és D nem ismeri egymást. $B-C-D$ nem teljesül, mert C és D nem ismeri egymást.</p>
<p>43. Transzitivnak nevezünk egy relációt, ha a reláció bármely 3 elemére (A, B, C) igaz, hogy amikor A kapcsolatban van B-vel, és B kapcsolatban van C-vel, akkor A is kapcsolatban van C-vel.</p>	
<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;">  <p style="text-align: center;">Fiúk</p> </div> <div style="flex: 2;"> <p>44. A 4 fiú (A, B, C, D) magasságát oszlopdiagrammal ábráztuk.</p> <p>45. (8. melléklet) Ábrázold a magasságviszonyaikat gráffal! Rajzolj be nyilakat a gráf pontjai közé úgy, hogy a nyíl a magasabb felé mutasson!</p> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>	
<p>46. Válasszunk ki a négy fiúból hármat az összes lehetséges módon! Vizsgáljuk meg, hogy transzitiv-e ez a reláció! (8. melléklet)</p>	<p>4- féleképpen tehetjük meg. Ezek: $A-B-C$, $A-B-D$ $A-C-D$ $B-C-D$</p>

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység						
<p>47. <i>A-B-C</i>: <i>A</i> magasabb, mint <i>C</i>, és <i>C</i> magasabb, mint <i>B</i>, akkor <i>A</i> magasabb, mint <i>C</i>. Ez az állítás igaz. (8. Melléklet) Rajzoljuk be ezt a gráfba! Az <i>A-B-C</i> pontokat egy körrel tudjuk összekötni. Ha bármely három pontra be tudjuk ezt látni, akkor ez a reláció tranzitív.</p>							
<p>48. <i>A-B-D</i> <i>A</i> magasabb, mint <i>C</i>, és <i>C</i> magasabb, mint <i>D</i>, akkor <i>A</i> magasabb, mint <i>D</i>. Igaz állítás. <i>A-C-D</i> <i>A</i> magasabb, mint <i>C</i>, és <i>C</i> magasabb, mint <i>D</i>, akkor <i>A</i> magasabb, mint <i>D</i>. Igaz állítás. <i>B-C-D</i> <i>C</i> magasabb, mint <i>D</i>, és <i>D</i> magasabb, mint <i>B</i>, akkor <i>C</i> magasabb, mint <i>B</i>. Igaz állítás.</p>	<table border="1" data-bbox="1131 542 1937 758"> <thead> <tr> <th><i>A-B-D</i></th> <th><i>A-C-D</i></th> <th><i>B-C-D</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>(8. melléklet)</p>	<i>A-B-D</i>	<i>A-C-D</i>	<i>B-C-D</i>			
<i>A-B-D</i>	<i>A-C-D</i>	<i>B-C-D</i>					
							
<p>49. Válassz alaphalmazt, modellezd a kapcsolatot, dönts el, hogy a kapcsolat tranzitív-e vagy sem!</p> <ol style="list-style-type: none"> <i>A</i> öccse <i>B</i>-nek. <i>A</i> testvére <i>B</i>-nek. <i>A</i> osztálytársa <i>B</i>-nek. <i>A</i> apja <i>B</i>-nek. <i>A</i> anyja <i>B</i>-nek. <i>A</i> osztója <i>B</i>-nek. <i>A</i> nagyobb <i>B</i>-nél. <i>A</i> párhuzamos <i>B</i>-vel. <i>A</i> merőleges <i>B</i>-re. 	<p>a) Pl.: az alaphalmaz lehet: egy család tagjai, egy tábor résztvevői, egy település lakói stb</p> <ol style="list-style-type: none"> Mindig tranzitív. Mindig tranzitív. Mindig tranzitív. Soha nem tranzitív. Soha nem tranzitív. Mindig tranzitív. Mindig tranzitív. Mindig tranzitív. Soha nem tranzitív. 						
<p>50. Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban, ha a társaság 2, 3, ..., <i>n</i> tagú!</p>							

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység			
$n = 2$	<p>A és B: A ismeri B-t, akkor B is ismeri A-t. A-nak 1 ismerőse van és B-nek is, tehát A-nak és B-nek ugyanannyi ismerőse van.</p>			
$n = 3$	<p>Egy pár ismeri egymást.</p> <table border="1" data-bbox="1131 486 2018 805"> <tr> <td data-bbox="1131 486 1429 762"> <p>a)</p>  <p>A és C ismerősök</p> </td> <td data-bbox="1429 486 1720 762"> <p>b)</p>  <p>A és B ismerősök</p> </td> <td data-bbox="1720 486 2018 762"> <p>c)</p>  <p>B és C ismerősök</p> </td> </tr> </table> <p>Ugyanaz, mint $n = 2$ esetén.</p>	<p>a)</p>  <p>A és C ismerősök</p>	<p>b)</p>  <p>A és B ismerősök</p>	<p>c)</p>  <p>B és C ismerősök</p>
<p>a)</p>  <p>A és C ismerősök</p>	<p>b)</p>  <p>A és B ismerősök</p>	<p>c)</p>  <p>B és C ismerősök</p>		

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység						
<p>$n = 3$ (Folytatás.)</p>	<p>Két pár ismeri egymást.</p> <table border="1" data-bbox="1131 371 1946 767"> <tr> <td data-bbox="1131 371 1404 652"> <p>d)</p>  </td> <td data-bbox="1404 371 1677 652"> <p>e)</p>  </td> <td data-bbox="1677 371 1946 652"> <p>f)</p>  </td> </tr> <tr> <td data-bbox="1131 652 1404 767"> <p>A és C ismerősök, valamint A és B ismerősök</p> </td> <td data-bbox="1404 652 1677 767"> <p>A és C ismerősök, valamint B és C ismerősök</p> </td> <td data-bbox="1677 652 1946 767"> <p>B és C ismerősök, valamint A és B ismerősök</p> </td> </tr> </table> <p>Mindhárom esetben van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. esetben C-nek és B-nek 1-1 ismerőse van. 2. esetben A-nak és B-nek 1-1 ismerőse van. 3. esetben C-nek és A-nak 1-1 ismerőse van. 	<p>d)</p> 	<p>e)</p> 	<p>f)</p> 	<p>A és C ismerősök, valamint A és B ismerősök</p>	<p>A és C ismerősök, valamint B és C ismerősök</p>	<p>B és C ismerősök, valamint A és B ismerősök</p>
<p>d)</p> 	<p>e)</p> 	<p>f)</p> 					
<p>A és C ismerősök, valamint A és B ismerősök</p>	<p>A és C ismerősök, valamint B és C ismerősök</p>	<p>B és C ismerősök, valamint A és B ismerősök</p>					
	<p>Három pár ismeri egymást.</p> <table border="1" data-bbox="1131 1002 1400 1281"> <tr> <td data-bbox="1131 1002 1400 1281"> <p>g)</p>  </td> <td data-bbox="1400 1002 2058 1281"> <p>Mindhárman ismerik a másik két embert. Ez esetben mindenkinek 2 ismerőse van.</p> </td> </tr> </table>	<p>g)</p> 	<p>Mindhárman ismerik a másik két embert. Ez esetben mindenkinek 2 ismerőse van.</p>				
<p>g)</p> 	<p>Mindhárman ismerik a másik két embert. Ez esetben mindenkinek 2 ismerőse van.</p>						

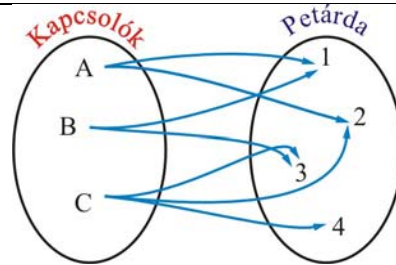
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>$n = 4$ Eljárhatnánk az előző módon is, igaz elég hosszú lenne mind a 15 esetet megvizsgálni.</p>	<p>Ez hogyan jelenne meg a gráfban? 4 elem közé 1 kapcsolatot berajzolni 4-féleképpen lehet. 4 elem közé 2 kapcsolatot berajzolni $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$-féleképpen lehet. 4 elem közé 3 kapcsolatot berajzolni 4-féleképpen lehet. 4 elem közé 4 kapcsolatot berajzolni 1-féleképpen lehet.</p>
<p>Egy másik gondolatmenet lehet:</p>	<p>A társaság tagjainak száma 4. A társaság tagjainak a társaságban 0, 1, 2, 3 ismerőse lehet. Ez 4 lehetőség. Nem lehet azonban a társaságban egyszerre olyan, aki senkit sem ismer, és olyan, akit mindenki. Azaz nem lehet a társaságban egyszerre olyan, akinek 0 ismerőse van, és olyan, akinek 4 ismerőse van, mert az előbbi senkit sem ismer, az utóbbi viszont mindenkit. Tehát ismét összesen legfeljebb 3 lehetőség van arra, hogy kinek hány ismerőse lehet. A társaság tagjainak száma azonban 4, tehát lennie kell kettőnek, akinek ugyanannyi ismerőse van.</p>
<p>n tagú társaságra ugyanígy láthatjuk be.</p>	<p>0-tól $n - 1$ ismerőse lehet a társaság tagjainak a társaságban. Ez n lehetőség. 1 000 000 Nem lehet egyidejűleg olyan, akinek 0 ismerőse van és olyan, akinek $n - 1$. Tehát összesen legfeljebb $n - 1$ lehetőség van arra, hogy kinek hány ismerőse van. A társaság tagjainak száma azonban n, tehát van kettő, akinek ugyanannyi ismerőse van.</p>

Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>51. Egy társaságban lejátszottak néhány Malomjátékot. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Lássuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg!</p>	<p>A megoldás gondolatmenete ugyanaz, mint az előbb. Legyen n a társaság tagjainak a száma. Egy ember legfeljebb $n - 1$ mérkőzést játszhat, de az is lehet, hogy egyet sem. Így a játszott mérkőzések száma 0-tól $n - 1$-ig bármely egész szám lehet, de nem lehet a társaságban egyszerre olyan, aki 0 mérkőzést játszott, és olyan, aki $n - 1$-et, mert ellentmondásra jutunk. Az előbbi senkivel nem játszott, az utóbbi mindenkivel játszott, tehát azzal is, aki 0 mérkőzést játszott. Tehát ha mindenkire hozzárendeljük azt a számot, ahány mérkőzést játszott, akkor erre összesen legfeljebb $n - 1$ lehetőség van. Mivel a társaság tagjainak száma n, van kettő, akihez ugyanazt a számot rendeltük, azaz ugyanannyi mérkőzést játszott.</p>
<p>52. Ugyanebben a társaságban éjfélkor voltak, akik koccintottak, de ugyanaz a két pár nem koccintott kétszer. Lássuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel koccintott!</p>	<p>A megoldás gondolatmenete ugyanaz, mint az előbb.</p>
<p>53. Ugyanebben a társaságban éjfél után volt, aki táncolt, de minden pár csak egyszer. Lássuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel táncolt!</p>	<p>A megoldás gondolatmenete ugyanaz, mint az előbb.</p>
<p>54. Vajon ha megengedjük, hogy egy pár többszörös is táncoljon, vagy több partit is játsszon, vagy koccintson egymással igaz marad-e az állítás, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel táncolt, játszott, koccintott?</p>	<p>Ha találunk egy ellenpéldát, már beláttuk, hogy az állítás nem igaz. Például: A társaság legyen 3 tagú: A, B és C. Tegyük fel, hogy A és B egy mérkőzést játszott egymással, B és C kettőt, A és C egyet sem. Ekkor A 1, B 3, C 2 mérkőzést játszott.</p> 

Feladatok:

Tanári tevékenység

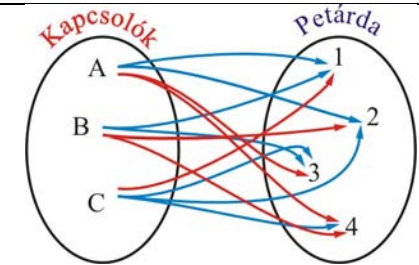
1. 3 kapcsolónk van és 4 petárdánk. Eredetileg mindegyik kapcsolóval elindítható volt mind a 4 petárda, de néhány kapcsolat meghibásodott. A gráf a rendszer jelenlegi (működőképes) állapotát mutatja.



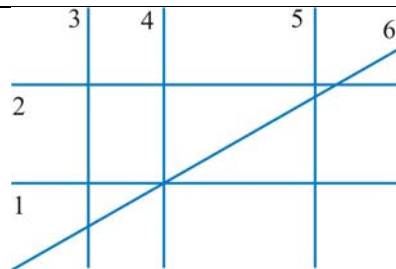
- a) Hány vonal volt eredetileg felszerelve?
- b) Rajzold be a hiányzó vonalakat!
- c) Hány vonal hibás?
- d) Írd le a működő vonalakat rendezett számpárokkal!
- e) Írd le a nem működő vonalakat rendezett számpárokkal!
- f) Írd le a működő vonalakat táblázattal!

Tanulói tevékenység

- a) $3 \cdot 4 = 12$
- b) Rajzold be a hiányzó vonalakat!
- c) 5
- d) (A; 1), (A; 2), (B; 1), (B; 3), (C; 2), (C; 3), (C; 4),
- e) (A; 3), (A; 4), (B; 2), (B; 4), (C; 1)

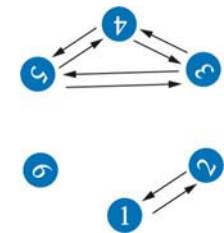


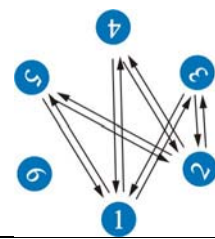
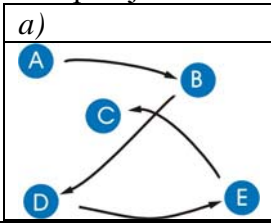
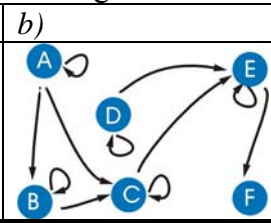

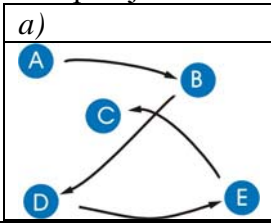
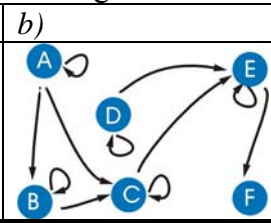

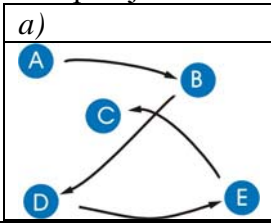
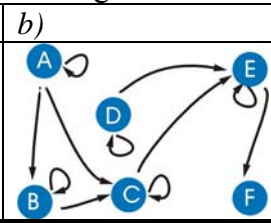

	A	B	C
1	X	X	
2	X		X
3		X	X
4			X



2. Írd fel a reláció elempárjait, rajzold meg a gráfot!
- a) párhuzamosság
 - b) merőlegesség
 - c) metszés

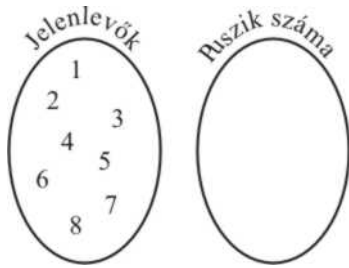
- a) (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3;3), (3; 4), (3; 5), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 3), (5; 4), (5; 5)



Feladatok:				
Tanári tevékenység	Tanulói tevékenység			
	b) (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 2), (3; 1), (4; 2), (4; 1), (5; 2), (5; 1) 			
	c) (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5),			
3. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria és tranzitivás szempontjából a következő relációkat! <ol style="list-style-type: none"> A lányok halmazán: A nővére B-nek. A lányok és a fiúk halmazán: A nővére B-nek. A lányok és a fiúk halmazán: A testvére B-nek. A lányok és a fiúk halmazán: A szülei ugyanazok, mint B-nek. 	<ol style="list-style-type: none"> Nem reflexív, szimmetrikus, tranzitív Nem reflexív, nem szimmetrikus, tranzitív Nem reflexív, szimmetrikus, tranzitív Reflexív, szimmetrikus, tranzitív 			
4. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria és tranzitivás szempontjából a következő gráfokat! <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 33%;"> a)  </td> <td style="width: 33%;"> b)  </td> <td style="width: 33%;"> c)  </td> </tr> </table>	a) 	b) 	c) 	<ol style="list-style-type: none"> Nem reflexív, nem szimmetrikus, nem tranzitív Reflexív, nem szimmetrikus, nem tranzitív Reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív
a) 	b) 	c) 		

1. melléklet

Ennyien vannak a társaságban	1	2	3	4	5	6	7	8	<i>N</i>
Ennyi puszit adnak									

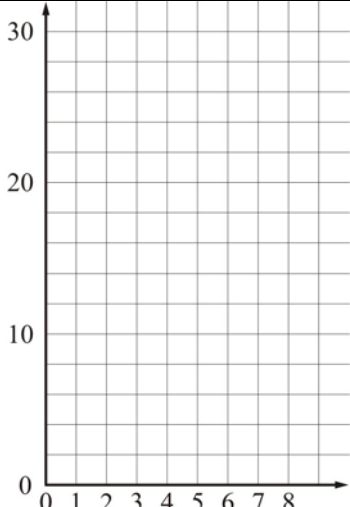


2. melléklet


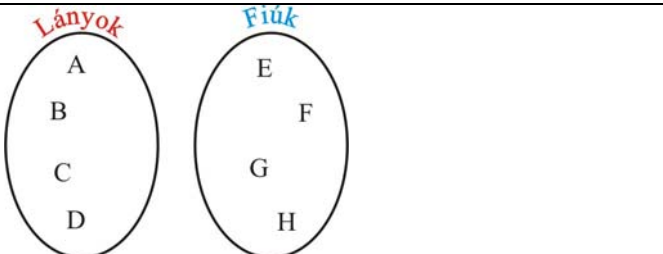
2 tag	3 tag	4 tag	5 tag
Kézfogások száma:	Kézfogások száma:	Kézfogások száma:	Kézfogások száma:

6 tag	7 tag	8 tag	
Kézfogások száma:	Kézfogások száma:	Kézfogások száma:	Kézfogások száma:

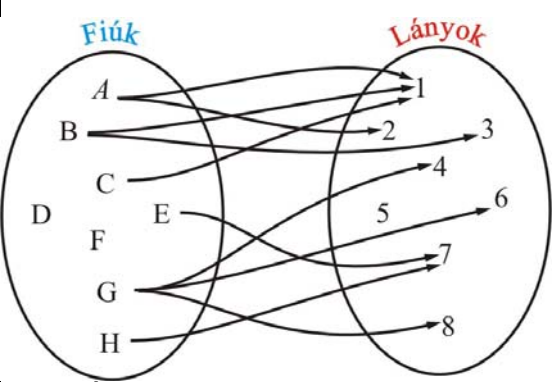
Ábrázold nyíldiagrammal!	
	<p>Ábrázold Venn-diagrammal!</p>

<p>Ábrázold az adatokat koordináta-rendszerben!</p>																																																																																		
<p>Ha <i>A, B, C, D, E, F, G, H</i> a társaság tagjai, sorold fel ki kivel fogott kezét!</p>																																																																																		
<p>Jelöld X-el a táblázatban, hogy ki kivel fogott kezét!</p>	<table border="1" data-bbox="699 995 1156 1335"> <thead> <tr> <th></th> <th><i>A</i></th> <th><i>B</i></th> <th><i>C</i></th> <th><i>D</i></th> <th><i>E</i></th> <th><i>F</i></th> <th><i>G</i></th> <th><i>H</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th><i>A</i></th> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>B</i></th> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>C</i></th> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>D</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>E</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>F</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>G</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>H</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> </tr> </tbody> </table>		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>A</i>									<i>B</i>									<i>C</i>									<i>D</i>									<i>E</i>									<i>F</i>									<i>G</i>									<i>H</i>								
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>																																																																										
<i>A</i>																																																																																		
<i>B</i>																																																																																		
<i>C</i>																																																																																		
<i>D</i>																																																																																		
<i>E</i>																																																																																		
<i>F</i>																																																																																		
<i>G</i>																																																																																		
<i>H</i>																																																																																		
<p>Szilveszterkor egy társaságban 4 fiú és 4 lány érkezik. Ezek üdvözlik egymást. A lányok mindenkinek pusztit adnak, amikor megérkeznek, a fiúk a lányoknak pusztit adnak, viszont a fiúkkal kezét fognak. Hány pusztit adnak, illetve hány kézfogás történik érkezéskor? Készíts modellt!</p>	<table border="1" data-bbox="699 1341 1156 1701"> <thead> <tr> <th></th> <th><i>A</i></th> <th><i>B</i></th> <th><i>C</i></th> <th><i>D</i></th> <th><i>E</i></th> <th><i>F</i></th> <th><i>G</i></th> <th><i>H</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th><i>A</i></th> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>B</i></th> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>C</i></th> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>D</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>E</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>F</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>G</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> </tr> <tr> <th><i>H</i></th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> </tr> </tbody> </table>		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>A</i>									<i>B</i>									<i>C</i>									<i>D</i>									<i>E</i>									<i>F</i>									<i>G</i>									<i>H</i>								
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>																																																																										
<i>A</i>																																																																																		
<i>B</i>																																																																																		
<i>C</i>																																																																																		
<i>D</i>																																																																																		
<i>E</i>																																																																																		
<i>F</i>																																																																																		
<i>G</i>																																																																																		
<i>H</i>																																																																																		

3. melléklet

<p>Ábrázolás gráffal:</p>																																																																																		
<p>Ábrázolás táblázattal: Jelöld be azokat a cellákat, amelyekbe biztosan nem kerülhet kapcsolatot jelző jel!</p>	<table border="1" data-bbox="764 506 1422 848"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> <th>H</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>C</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>D</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>E</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>F</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>G</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>H</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A									B									C									D									E									F									G									H								
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																										
A																																																																																		
B																																																																																		
C																																																																																		
D																																																																																		
E																																																																																		
F																																																																																		
G																																																																																		
H																																																																																		
<p>Ábrázolás az elemek felsorolásával:</p>																																																																																		
<p>Venn-diagrammal:</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p><i>Lányok</i></p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p><i>Fiúk</i></p> </div> </div>																																																																																	

4. melléklet

 <p>55. Éjfél után érkeztek még vendégek, és voltak, akik táncoltak, és voltak, akik nem. Hogy ki táncolt és kivel azt a gráf mutatja.</p>	<p>Hány fiú volt? Hány lány volt? Hányan voltak összesen? Hány fiú táncolt? Hány fiú nem táncolt? Hány lány táncolt? Hány lány nem táncolt? Melyik fiú táncolt a legtöbb lánnyal? Melyik lány táncolt a legtöbb fiúval? Mely fiúk táncoltak ugyanannyi lánnyal?</p> <p>Mit tudunk még leolvasni az ábráról?</p>																																																																																											
<p>Az ábra alapján töltsd ki a táblázatot!</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="8">Fiúk</th> </tr> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> <th>H</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="8" style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Lányok</th> <th>1</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>4</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>5</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>6</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>7</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <th>8</th> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </tbody> </table>			Fiúk								A	B	C	D	E	F	G	H	Lányok	1									2									3									4									5									6									7									8								
				Fiúk																																																																																								
		A	B	C	D	E	F	G	H																																																																																			
Lányok	1																																																																																											
	2																																																																																											
	3																																																																																											
	4																																																																																											
	5																																																																																											
	6																																																																																											
	7																																																																																											
	8																																																																																											
<p>Az ábra alapján írd fel a párokat!</p>																																																																																												

5. melléklet

A társaságban a fiúk közül voltak, akik már korábban is ismerték egymást, és voltak, akik itt találkoztak először. (Az ismeretség kölcsönös. Ha A ismerte B -t, B is ismerte A -t.) A felsorolás az ismeretségeket mutatja.

Figyelembe vesszük, hogy az ismeretség kölcsönös:

$A-B$, $A-C$, $A-D$, $B-D$, $C-D$

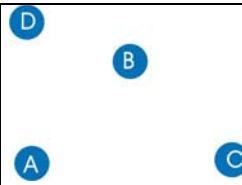
Nem vesszük figyelembe, hogy az ismeretség kölcsönös:

(A,B) (B,A) (C,A) (D,B)

(A,C) (B,D) (C,D) (D,C)

(A,D)

Készítsük el az ismeretség gráfját!



Készítsük el az ismeretség táblázatát!

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

6. melléklet

Tegyük fel, hogy A , B , C , D fiúk közül mindenki ismeri saját magát.

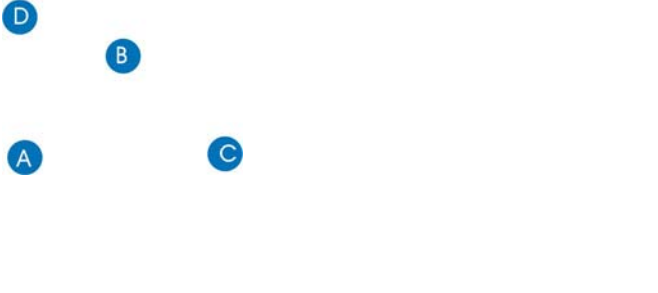
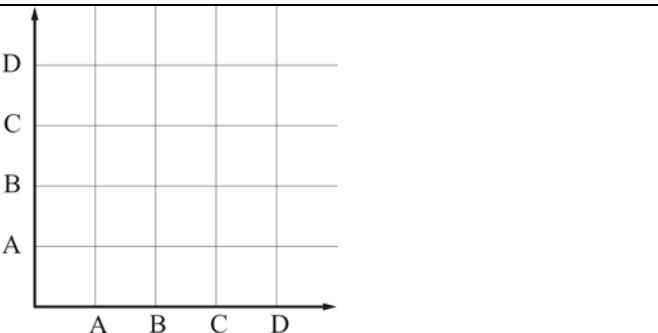
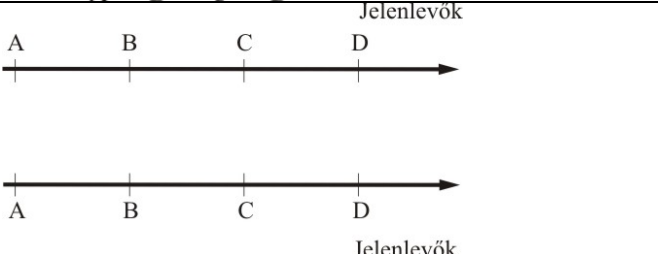
Készítsük el az ismeretség gráfját!



Készítsük el az ismeretség táblázatát!

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

7. melléklet

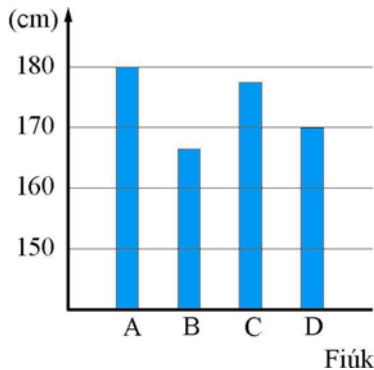
<p>A társaságban a fiúk közül voltak, akik már korábban is ismerték egymást, és voltak, akik itt találkoztak először. (Az ismeretség kölcsönös. Ha <i>A</i> ismerte <i>B</i>-t, <i>B</i> is ismerte <i>A</i>-t.) Jelöljük azt is, hogy mindenki ismeri saját magát is! Rajzoljuk le az előző két gráfot egy ábrába!</p>																										
<p>Írjuk le az összes kapcsolatot!</p>																										
<p>Jelöljük koordináta-rendszerben a kapcsolatokat!</p>																										
<p>Jelöljük nyíldiagrammal a kapcsolatokat!</p>																										
<p>Ábrázoljuk táblázatban ezeket a kapcsolatokat!</p>	<table border="1" data-bbox="768 1333 1421 1528"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>B</td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>C</td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>D</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> </tr> </table>		A	B	C	D	A					B					C					D				
	A	B	C	D																						
A																										
B																										
C																										
D																										

8. melléklet

Tranzitívnak nevezünk egy relációt, ha a reláció bármely 3 elemére (A, B, C) igaz, hogy amikor A kapcsolatban van B -vel, és B kapcsolatban van C -vel, akkor A is kapcsolatban van C -vel.

A 4 fiú (A, B, C, D) magasságát oszlopdiagrammal ábráztuk. Ábrázold a magasságviszonyaikat gráffal!

Rajzolj be nyilakat a gráf pontjai közé úgy, hogy a nyíl a magasabb felé mutasson!



Válasszunk ki a négy fiúból hármat az összes lehetséges módon!

Vizsgáljuk meg, hogy tranzitív-e ez a reláció!

Rajzoljuk be ezek kapcsolatait színessel!

Például:
 $A-B-C$
 A magasabb, mint C , és C magasabb, mint B , akkor A magasabb, mint B . Ez az állítás igaz.
 Rajzoljuk be ezt a gráfba!

Az $A-B-C$ pontokat egy körrel tudjuk összekötni.

Ha bármely három pontra be tudjuk ezt látni, akkor ez a reláció tranzitív.

$A-B-D$	$A-C-D$	$B-C-D$