MATEMATIKA „C”
8. évfolyam

9. modul
HOL A VÉGE?

Készítette: Surányi Szabolcs

A modul célja	A végtelen fogalmának megismertetése, elmélyítése, a végtelen különböző formáinak megjelenése, a fraktálalakzatok vizsgálata, a végtelen mértani sorok vizsgálata
Időkeret	45 perc
Ajánlott korosztály	13–14 évesek; 8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Képzőművészet. Szűkebb környezetben: Ebben a programcsomagban a 2., 7. és 8. modul
A képességfejlesztés fókuszai	Gondolkodási képességek: Számolás, mennyiségi következtetés. Mérés, becslés. Kreativitás. Prezentáció. Megfigyelőképesség. Kommunikációs képességek: Szövegértés és értelmezés. Problémamegoldás.

AJÁNLÁS

Az érdeklődő tanulók fantáziáját könnyen megmozgathatjuk a végtelenhez kapcsolódó problémákkal, de a témakör a kevésbé lelkes tanulók figyelmét is felkeltheti. A konkrét problémafelvetésekkel (például van-e legnagyobb egész szám, legkisebb pozitív szám) a tanulók absztrakciós képessége nagymértékben fejleszthető. A fraktálalakzatok az esztétikai élményen túl mély matematikai tartalommal rendelkeznek, melyből ebben a modulban a végtelen mértani sorok összegének vizsgálata kerül elő, egy-egy konkrét sorhoz mindig egy színezéses fraktálpéldát kapcsolva.

TÁMOGATÓ RENDSZER

http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW413.jpg*

* 2007 augusztusában a honlap elérhető

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, mellékletek**
I. Játék a végtelennel			
1.	A végtelen különböző formáinak vizsgálata (legnagyobb egész szám, legkisebb pozitív szám stb.)	Mennyiségi következtetés, induktív következtetés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, kreativitás, szövegértés, szövegértelmezés, ábrázolás, prezentáció, rész–egész észlelése	
2.	Fraktálalakzatok vizsgálata, rajzolása	Mennyiségi következtetés, induktív következtetés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, kreativitás, szövegértés, szövegértelmezés, ábrázolás, prezentáció, rész–egész észlelése	Eszközök: fénymásolatok a képekről, körző, vonalzó Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap **B** feladatlap Melléklet a tanároknak: A kép és elérhetősége Az **A** feladatlap és megoldása A **B** feladatlap és megoldása
3.	Végtelen mértani sorok összegének vizsgálata fraktálalakzatok segítségével	Mennyiségi következtetés, induktív következtetés, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, kreativitás, szövegértés, szövegértelmezés, ábrázolás, prezentáció, rész–egész észlelése	Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap Melléklet a tanároknak: Összegzés A **C** feladatlap és megoldása

I. JÁTÉK A VÉGTELENNEL

1. A végtelen különböző formáinak vizsgálata

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: közösen)

Meg tudná mondani valamelyikőtök, hogy melyik a legnagyobb egész szám?

Vezesse rá a tanulókat a tanár (ha kell), hogy legnagyobb egész szám nem létezhet, hiszen ha lenne egy legnagyobb, ahhoz egyet adva nála nagyobb, és egész számot kapánk.

Rajzoljon mindenki egy számegyenest, és jelölje rajta a 0-t és a 16-ot!

Közelítsünk a 16-ból a 0 felé úgy, hogy mindig a meglévő szakasz felét vesszük! Jelöljétek az újonnan keletkező jobb oldali végpontot valamilyen színnel!
Folytassuk az eljárást többször egymás után! Mely számokat jelöljük így meg?
Elérjük így valamikor a 0-t?

Beszélje meg az osztály, hogy a 2 hatványait jelölik a számegyenesen (az ötödik lépéstől fogva a negatív kitevőjű hatványokat). Jusson el a csoport odáig, hogy az eljárást akármeddig lehet folytatni, és soha nem érhető el így a 0.
Ha ezt sikerült a tanulókkal tisztázni, akkor beszéljék meg azt is, hogy nincs legkisebb pozitív szám, hiszen ezzel a módszerrel akármilyen kicsi számnál kisebb számig is eljuthatunk.
Ezután beszéljék meg, hogy mi történne akkor, ha nem a 16-ot, hanem a –16-ot jelölnénk kezdetben, és a közelítés balról történne! (Nincs legnagyobb negatív szám.)

Tudnátok két szomszédos számot mondani?

Remélhetőleg lesz olyan tanuló, aki két egész számot említ, ilyenkor kérdezze meg a tanár, hogy hogyan értette a tanuló a „szomszédos" fogalmát. Kérdezzen rá ezek után, hogy tudnának-e a tanulók olyan számot mondani, ami az említett kettő közé esik! (Például a két szám számtani közepe biztosan a kettő közé esik.)

Tegye fel a kérdést ezután a tanár úgy is, hogy 1 és 1,1; 1 és 1,01; $\frac{1}{1000}$ és $\frac{1}{1001}$ közé eső számot kelljen mondania a tanulóknak.
Egész számok között van értelme a szomszédok fogalmának (olyan számok, melyek különbsége 1), de már a racionális számok esetén nincs.

2. Fraktálalakzatok vizsgálata

(Javasolt idő: 15 perc; Eszközök: fénymásolatok a képről; Munkaforma: egyénileg)

Újra M. C. Eschertől hoztam képet nektek. Vizsgáljuk meg közösen! Mi történne szerintetek, ha a képet középpontjából kinagyítanánk? Meddig lehetne folytatni a nagyítást?

Adjon a tanár több másolatot is a tanulóknak a képről, lehetőleg kettesével kapjanak egyet-egyet. Javasolhatja a tanár, hogy rajzolják körbe a kívülről második, harmadik stb. körben lévő fekete gyíkok külső körvonalát színes ceruzával. Remélhetőleg lesz olyan diák, aki felfedezi, hogy az eredetivel megegyező, csak nagyobb méretű képet kapunk a nagyítás után, és hogy elvileg végtelen sokszor kinagyítható a kép, ez nem változik. (Természetesen a ceruza vastagsága miatt egy bizonyos lépésnél tovább nem nagyítható a kép.)
Melléklet a tanároknak: A kép és elérhetősége

Tanulói munkafüzet: **A** feladatlap
Melléklet a tanároknak: Az **A** feladatlap és megoldása

Az olyan alakzatokat, amelyekben önmaguk pontos kicsinyített mását fedezhetjük fel, fraktáloknak hívjuk. Rajzoljunk mi is ilyen fraktálokat! Az *A* feladatlapon található két leírás közül válasszon magának mindenki egyet, és azt követve rajzolja meg az alakzatot.
Ki tudná megmondani, hogy az egyes lépésekben az eredeti alakzat hányad részét színezte ki? Ha végtelenségig folytatnánk az eljárást, akkor hányad részét színeznénk ki az eredeti alakzatnak?
Javasolja a tanár, hogy minél nagyobb legyen a kiindulási alakzat, ugyanis annál több lépést tudnak a tanulók megrajzolni. Az elkészült ábrákat mutassák meg egymásnak a tanulók, és amelyek jól sikerültek, azok kikerülhetnek a terem falára. Az elkészült képeket vizsgálja meg a csoport, és beszéljék meg közösen, hogy az egyes lépésekben az eredeti alakzat hányad részét színezték ki a tanulók. Remélhetőleg eljutnak oda a tanulók, hogy végtelen sok lépésben folytatva a színezést, az egész alakzat ki lesz színezve. (Pontosabban az a terület, amelyet nem színezünk ki, tart a nullához.)

Tanulói munkafüzet: **B** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **B** feladatlap és megoldása

Most rajzoljunk hópelyhet! A leírást megtaláljátok a **B** feladatlapon! Most is addig folytassátok a megadott eljárást, amíg tudjátok! Ha a végtelenségig folytatni tudnánk a rajzolást, akkor mekkora lenne a hópehely kerülete?
Javasolja a tanár, hogy minél nagyobb legyen a kiindulási alakzat, ugyanis annál több lépést tudnak a tanulók megrajzolni. Az elkészült ábrákat mutassák meg egymásnak a tanulók, és amelyek jól sikerültek, azok kikerülhetnek a terem falára. Az elkészült képeket vizsgálja meg a csoport, és beszéljék meg közösen, hogy az egyes lépésekben hogyan változott az eredeti alakzat kerülete. Remélhetőleg eljutnak oda a tanulók, hogy végtelen sok lépésben folytatva a rajzolást, a kerület akármilyen nagy lehet.

3. Végtelen mértani sorok összegének vizsgálata fraktálalakzatok segítségével

(Javasolt idő: 15 perc; Munkaforma: párban)

Alakítsatok párokat!
Nézzük újra az először rajzolt ábráinkat. Felírtuk az egyes lépéseknél, hogy az eredeti terület hányad részét színeztük be az adott lépéseknél. Tudnátok valamilyen szabályt mondani, hogy hogyan kapjuk meg az egymás utáni részek nagyságát?
Adjuk össze ezeket a számokat! Meg tudnátok mondani, hogy ha a végtelenségig folytatjuk az összeadást, akkor milyen számot kapunk eredményül?
A párokat lehetőleg úgy alakítsa ki a tanár, hogy mindkét fajta rajz megjelenjen egy párosnál. Ha kell, akkor írja fel a tanár a táblára, hogy a rajzolás közben az egyes lépéseknél az eredeti alakzat hányad részét színezték be a tanulók. Nem baj, ha nem ismerik fel a tanulók, hogy az egyes lépéseknél színezett részek nagysága egy mértani sorozatnak az elemei, elég addig eljuttatni a diákokat, hogy az összeg mennyi lesz. Ha kell, ennek felismeréséhez segítse a tanár őket. Ha valamelyik páros rájött a kapcsolatra a színezés és a végtelen összeg kapcsolatára, akkor lépjen velük tovább a tanár a következő problémára.
Melléklet a tanároknak: Összegzés
Tanulói munkafüzet: **C** feladatlap
Melléklet a tanároknak: A **C** feladatlap és megoldása

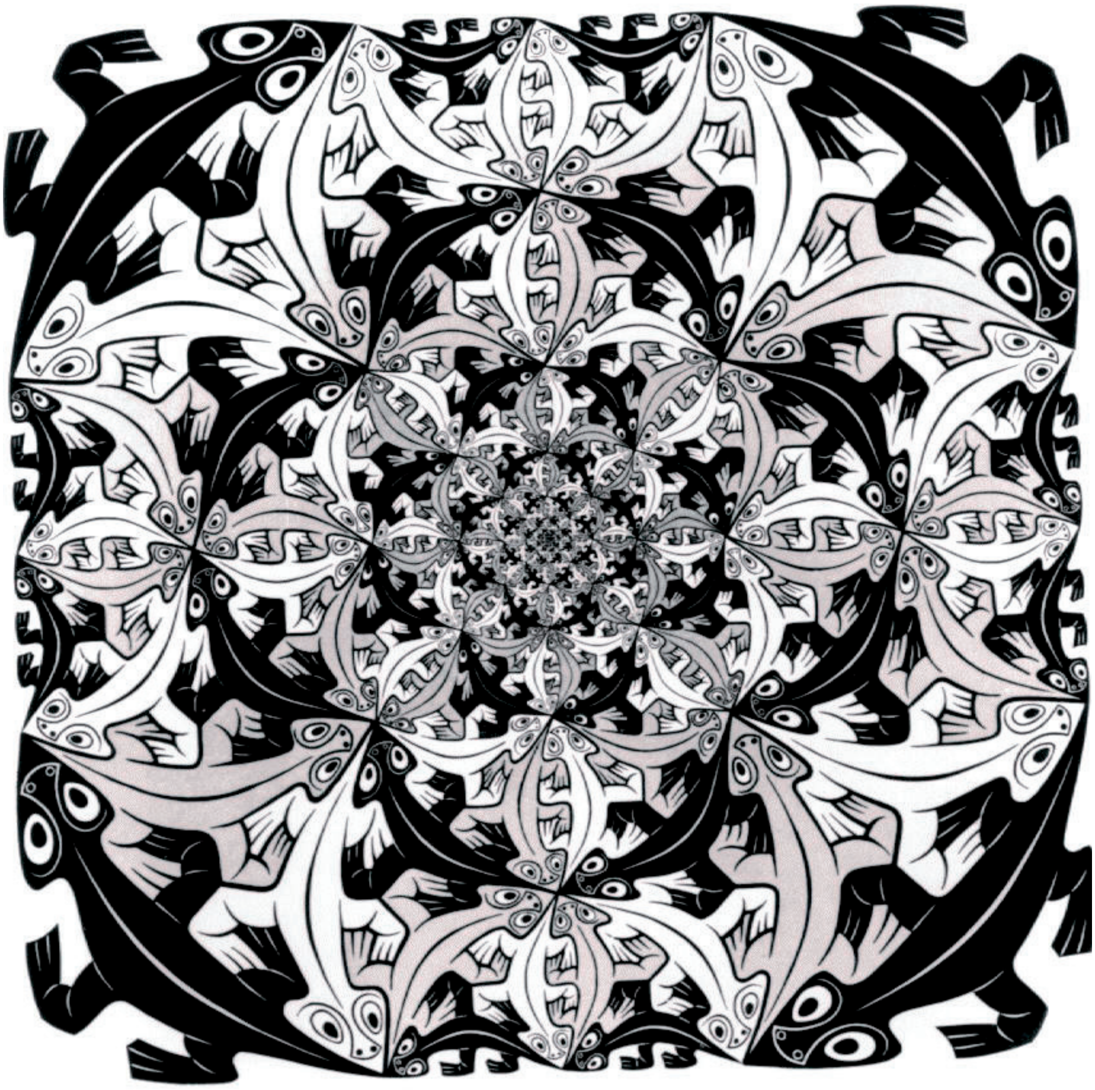
A C feladatlapon egy-egy rajzsorozat mellett egy-egy összeget láttok. Meg tudnátok mondani, hogy hogyan kellene a rajzolást folytatni?
És mi lenne az összeg következő tagja, vagy az azt követő?
Meg tudnátok adni, hogy ha a rajzolást a végtelenségig folytatnánk, akkor hányad részét színeznénk ki az eredeti alakzatnak?
És ha az összeadást folytatnánk a végtelenségig, akkor milyen eredményt kapnánk?

Nem baj, ha nem mindegyik rajz esetében találja meg egy páros a kapcsolatot a színezés és az összegzés között. Nem cél, hogy a végtelen mértani sorok összegére vonatkozó összefüggést felismerjék, vagy alkalmazzák a tanulók, csak a konkrét példák esetében tudják megmondani a konkrét sorok összegét.

MELLÉKLET A TANÁROKNAK

2. Fraktálalakzatok vizsgálata

A kép és elérhetősége:
A kép megtalálható például a következő internet-címen:
Smaller and Smaller 1956 (Kisebb és kisebb)
http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW413.jpg*



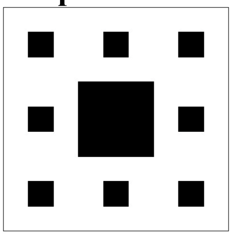
* 2007 augusztusában a honlap elérhető

A feladatlap és megoldása

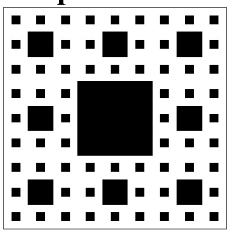
1. alakzat:
Rajzolj egy négyzetet, és oszd fel kilenc egyforma kis négyzetre! A középsőt színezd ki! A körülötte lévő nyolc kis négyzet mindegyikét ismét oszd fel kilenc kis négyzetre, és közülük a középsőket színezd ki! Folytasd az eljárást, amíg tudod! (Amíg a felosztandó négyzetek elég nagyok.)

Megoldás:

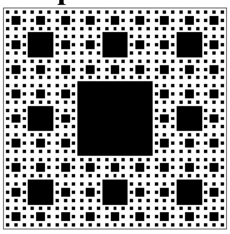
2. lépés



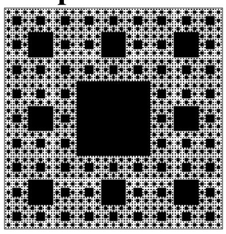
3. lépés



4. lépés



5. lépés



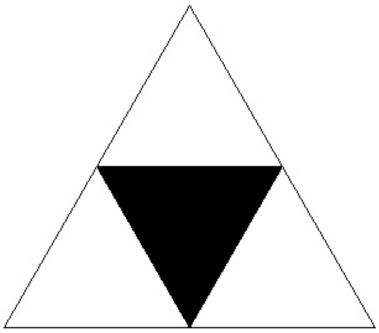
Az 1. lépésben az $\frac{1}{9}$, a 2. lépésben $\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}$, a 3. lépésben a $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$, a 4. lépésben a $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^3$, az 5. lépésben a $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^4$ részét színeztük ki az alakzatnak.

2. alakzat:

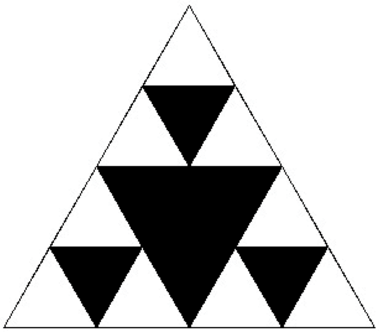
Rajzolj egy szabályos háromszöget, és rajzold meg a középvonalait! A keletkezett négy háromszög közül a középsőt színezd ki! A maradék három mindegyikének rajzold meg a középvonalait, és a középsőket színezd ki! Folytasd az eljárást, amíg tudod! (Amíg a felosztandó háromszögek elég nagyok.)

Megoldás:

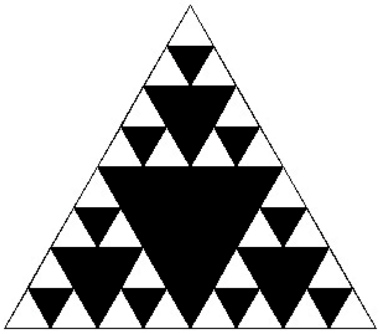
1. lépés



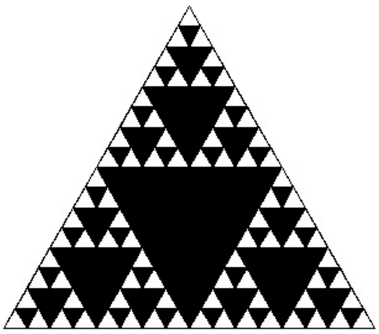
2. lépés



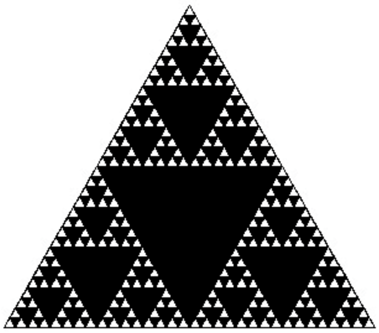
3. lépés



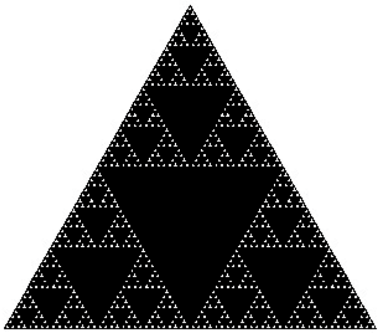
4. lépés



5. lépés



6. lépés



Az 1. lépésben az $\frac{1}{4}$, a 2. lépésben $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$, a 3. lépésben a $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$, a 4. lépésben a $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$, az 5. lépésben a $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4$ stb. részét színeztük ki az alakzatnak.

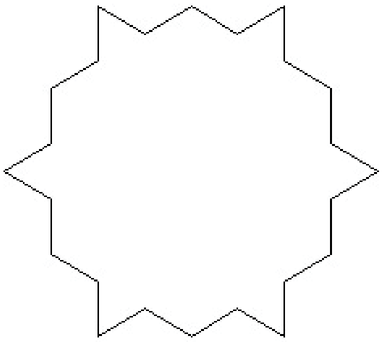
Megjegyzés: Ezeket az alakzatokat Sierpinski-szőnyegeknek nevezzük.

B feladatlap és megoldása

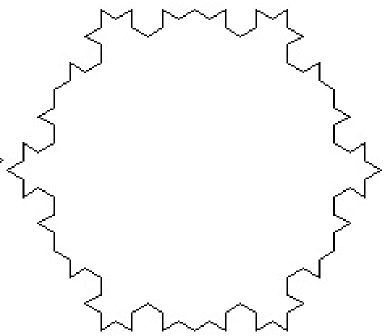
1. alakzat:
Rajzolj egy szabályos hatszöget! Minden oldalát oszd fel 3 egyenlő hosszú szakaszra, és a középsőkre kifelé rajzolj egyenlő oldalú háromszöget, majd ezt a középső szakaszt töröld ki! Ismételd meg az így kapott 24 oldalú sokszög minden oldalára az előző lépéseket, ameddig tudod!

Megoldás:

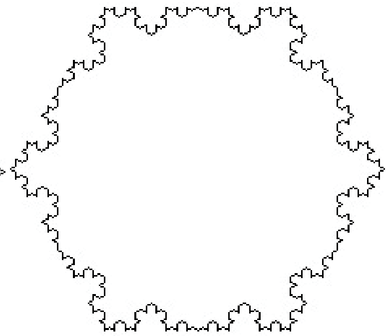
1. lépés



2. lépés



3. lépés

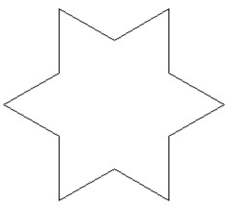


A kerület minden lépésben az $\frac{1}{4}$-ed részével, vagyis a $\frac{5}{4}$-szeresére nő.

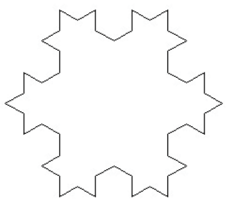
2. alakzat:
Rajzolj egy szabályos háromszöget! Minden oldalát oszd fel 3 egyenlő hosszú szakaszra, és a középsőkre kifelé rajzolj egyenlő oldalú háromszöget, majd ezt a középső vonalat töröld ki. Ismételd meg az így kapott 12 oldalú sokszög minden oldalával az előző lépéseket, ameddig tudod!

Megoldás:

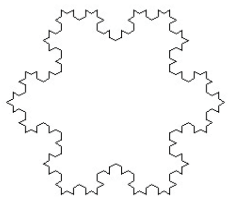
2. lépés



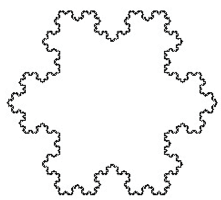
3. lépés



4. lépés



6. lépés



A kerület minden lépésben az $\frac{1}{4}$-ed részével, vagyis a $\frac{5}{4}$-szeresére nő.

3. A végtelen mértani sorok összegének vizsgálata fraktálalakzatok segítségével

Összegzés:

Az első esetben az *n.* lépésben a beszínezett terület az eredeti terület $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$ része. Az összeadandók egy mértani sorozat elemei, melynek első tagja $\frac{1}{9}$, hányadosa $\frac{8}{9}$. Ha a végtelenségig folytatjuk a színezést, akkor az egész négyzetet beszínezzük, tehát az összeg 1.

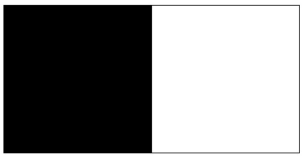
A második esetben ismét egy mértani sorozat elemeiről van szó, melynek első tagja $\frac{1}{4}$, hányadosa $\frac{3}{4}$, és az ebből képzett sor összege szintén 1, ami a színezésből szintén látszik.

Megjegyzés:

Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ mértani sorozatból képzett $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ mértani sor konvergens, ha $|q| \le 1$, és ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

C feladatlap és megoldása

1. feladat:



$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

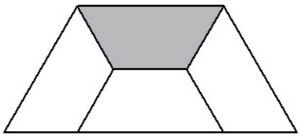
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=$

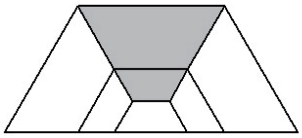
Megoldás:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$$

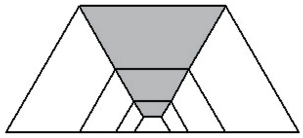
2. feladat:



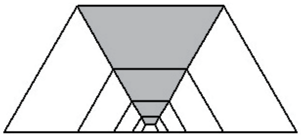
$\frac{1}{4}$



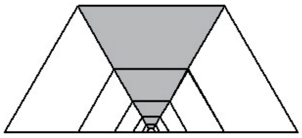
$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$



$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$



$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$



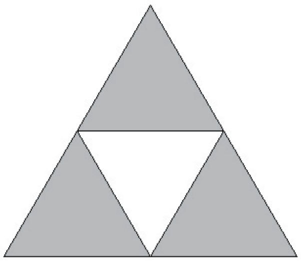
$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\ldots=$

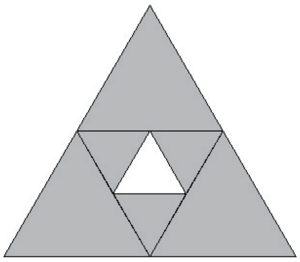
Megoldás:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

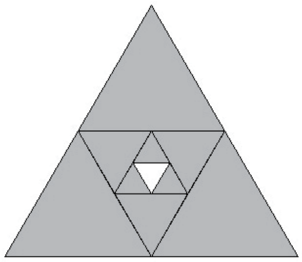
3. feladat:



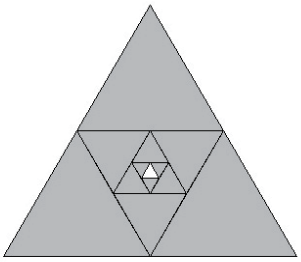
$\frac{3}{4}$



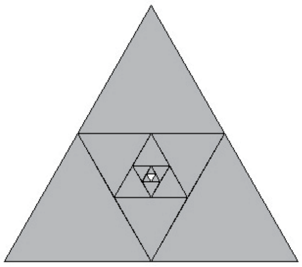
$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}$



$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$



$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\frac{3}{256}$



$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\frac{3}{256}+\frac{3}{1024}$

$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\frac{3}{256}+\frac{3}{1024}+\ldots=$

Megoldás:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\frac{3}{256}+\frac{3}{1024}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1$$