MATEMATIKAI
KOMPETENCIATERÜLET

TE IS LÁTOD, AMIT ÉN LÁTOK?

TÉRSZEMLÉLET FEJLESZTÉS

5–12. ÉVFOLYAM

I. RÉSZ

MÓDSZERTANI AJÁNLÁSOK

FELADATLAPOK

A kiadvány az Educatio Kht.
Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve alapján készült.

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült, a suliNova oktatási programcsomag részeként létrejött tanulói információhordozó. A kiadvány sikeres használatához szükséges a teljes oktatási programcsomag ismerete és használata. A teljes programcsomag elérhető: www.educatio.hu címen.

Matematika szakmai vezető
Pálfalvi Józsefné dr.

Írta
Széplaki Györgyné

Lektor
Pálmay Lóránt

Ábrák
Szalóki Dezső

Felelős szerkesztő
Teszár Edit

A matematika 5–12. oktatási programcsomaghoz készült manipulációs taneszközök melléklete.

Educatio Kht. 2008.

TARTALOM

„A matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz, hogy tisztán és világosan lássa az igazságot"

(R. Descartes)

AJÁNLÁS

Az *új eszközök* az oktatási programcsomagban is megfogalmazott feladatok hatékonyabb teljesítéséhez nyújtanak segítséget, miszerint „jobban akarjuk szolgálni a *fejlesztés-központúság* megvalósulását". Ehhez úgy szeretnénk hozzájárulni, hogy a NAT 2003-ban megfogalmazott fejlesztési feladatokhoz jól illeszkedő tananyag- és *taneszköz*-rendszert állítunk össze a fejlesztést elősegítő *tevékenységekkel* együtt. Remélve, hogy mindezt a kollégák és a tanulók által elfogadható, sőt megszerethető módon végezzük.

Általános elvként leszögeztük, hogy a problémafelvetés minden egyes témakörkben az „utcáról", az „otthonunkból" , az „osztálytermünkből" .... indul. Annak egyszerű, nem „agyon matematizált" összefüggéseit megtapasztaljuk, majd többszöri gyakorlás, újbóli felidézés és sok-sok közös gondolkodás után adjuk meg, a korosztálynak megfelelő módon, ugyanakkor matematikailag precízen, az új fogalom definícióját, mondunk ki tételt, fogalmazunk meg eljárásokat, megoldási módszereket. Tért kap a feldolgozásban a spirális felépítés, a matematika tudományának apró lépéseken keresztül történő megismerése, mindig szem előtt tartva a mai társadalom elvárásait, nevezetesen, hogy megváltozott világunkban nagyobb szerep jut a praktikus ismereteknek, a gyors és okos döntéseknek, az előrelátó gazdálkodásnak, az állandóan megújuló helyzetekhez való alkalmazkodásnak. Minden témakörnél lehetőség nyílik a különböző tudományágak, illetve tantárgyak, és a matematika összekapcsolására, mitöbb a matematika eszközül szolgál más szakterületen felmerülő kérdés megválaszolására, az adott probléma megoldására. Pl.: fizika, csillagászat, kémia, meteorológia, földrajz, építészet, környezetvédelem, művészetek stb.

A mára alaposan lecsökkent heti óraszám mellett vigyáznunk kell arra, hogy a „használható" matematika tanítása mellett legyen igényünk a tanulók gondolkodásának és a szemléletének fejlesztésére is. Biztosak vagyunk abban, hogy a képességfejlesztés egyik alapköve minden korosztályban a modernebb, többfunkciós, mobilizálható eszközök használata. Jó az, hogy a modern technika rohamos fejlődésének jótékony hatása a számítógépek iskolai alkalmazása. Ugyanakkor azt is tapasztaljuk, hogy a számítógép mellett túlzottan sokat „görnyedő" gyermek, kevesebb valódi problémával találkozik, ezért elengedhetetlen a *valóságos,* „kézzel fogható", *eszközök* bemutatása is. Meggyőződésünk, hogy manipuláció közben sokkal nagyobb a tanulók kíváncsisága, aktívabb a figyelme, könnyebben megy a felfedezés, és élvezetesebb a tanulás. Ez segíthet mindnyájunknak abban, hogy „kevesebbet markoljunk, és többet fogjunk".

A jelenleg használható, részben elavult demonstrációs eszközöket az elszegényedett iskolák, és a túlterhelt tanárok nehezen tudják felújítani. Ezért készültek el a csomagban lévő eszközök, melyek reményeink szerint megkönnyítik a tanárok munkáját, és egyben szolgálják a bevezetőben felsorolt célokat.

A téma iránt érdeklődők további, ezekhez hasonló feladatot találnak a megfelelő korosztály tankönyveiben, feladatgyűjteményeiben és felvételi feladatsoraiban.

Ez a füzet tanári kézikönyvként használható, a benne található feladatlapok fénymásolással sokszorosíthatók.

TANÁRI ÉS TANULÓI ESZKÖZÖK

Mit tartalmaz a doboz?

1. Zsinóros térgeometriai modellek
   1.1 Szabályos tetraéder
   1.2 Kocka (szabályos hexaéder)
   1.3 Szabályos oktaéder
   1.4 Szabályos dodekaéder
   1.5 Szabályos ikozaéder
   1.6 Szabályos ötszög alapú egyenes hasáb
   1.7 Hatoldalú szabályos gúla
   1.8 Négyzet alapú szabályos csonkagúla
2. Kocka síkmetszetei
   háromszög, négyszög, ötszög, hatszög
3. Téglatest síkmetszetei
   háromszög, négyszög, ötszög, hatszög
4. Körhenger gumialkotókkal
5. Rétegekből összerakott gömb

Az eszközökhöz mellékelt részletes, szakszerű leírás segítséget kíván nyújtani azoknak a kollégáknak, akik szívesen elkészítenek ezek alapján további példányokat. A felsoroltakon kívül szükség lehet egyéb testek modelljeire is, például a téglatestre, a négyzet alapú gúlára, a háromszög alapú hasábra stb.. Ezek lehetnek tanári eszközök, de lehet kisebb méretben a tanulóké is. Az elkészült prototípusok, és a mellékelt ismertetés kiválóan alkalmas arra is, hogy érdeklődő, ügyes kezű diákokat bízzunk meg a szükséges példányok elkészítésére. Ilyenkor - az elkészült eszközökön kívül - megnyerhetünk néhány „katonát" a matematika szolgálatára, hiszen ezek összeállításához nem matematikai zsenialitás szükséges, hanem kézügyesség, és jó hozzáállás.

Javaslatok a tanulók eszközeire:

- Bármelyik zsinóros test (a tanári modell alapján)
- További zsinóros, vagy élvázas modellek (pl.: téglatest, négyszög, ötszög alapú szabályos gúla, szabályos háromszög-, négyszög-, hatszög-alapú egyenes hasáb, stb.)
- Szívószálból damillal, vagy fonallal készíthető élvázas hasábok és gúlák
- Egységkockák (egy - egy lapjuknál összeragasztási lehetőséggel)
- Körhenger gumialkotókkal (a tanári modell alapján)
- Körkúp és csonka körkúp pálcikatengellyel és gumialkotókkal
- Rétegekből összerakott gömb (a tanári modell alapján)

A térbeli eszközök közül néhány síkba kiteríthető, és egy alkalmas méretű dossziéban tárolhatók, ezért a csomag darabjai praktikusabban és könnyebben használhatók, mint a korábban rendelkezésre álló modellek.

Megjegyzés:

Természetesen vannak a taneszköz forgalmazó központokban is új eszközök, amelyek megvásárolhatók. Ezek közül elsősorban a *polydron* térgeometriai modellező készlet, és az egymáshoz illeszthető *egységkocka* készlet ajánlható.

MÓDSZERTANI JAVASLATOK AZ ESZKÖZÖK HASZNÁLATÁRA

Vannak képességek, amelyek időben elkezdve kellő színvonalra fejleszthetők, még azoknál a gyermekeknél is, akiknél nem mutatkozik az erre való hajlam. Csak néhányat kiemelve ilyen a kézügyesség, a mozgáskészség, a zenei hallás, a *térszemlélet.*

Ez utóbbira kétségtelenül elengedhetetlenül szüksége van minden embernek, hiszen a térben, három dimenzióban zajlik az életünk. Ilyen a körülöttünk lévő világ, mégis mikor azt leképezni kívánjuk egy papírlapra, csak síkban tehetjük meg. Meg kell tehát láttatni diákjainkkal a kapcsolatot a síkbeli ábrák és a valóság között, ki kell alakítani bennük azokat a képességeket, amelyek segítségével a térbeli alakzatokat, valóban térbelinek látják, és azokat úgy is elemzik. El kell érni, hogy lássák, és értsék a „mögötte", „előtte", fogalmakat, lássák a sematikus, "torzított" síkbeli ábrán a nagysági viszonyokat, a metszéspontokat, a metszésvonalakat, a szögek valódi nagyságát, és nem utolsó sorban a síkmetszetek alakját, valamint a testek egyes vetületeit.

Igaz, vannak tanulók, (ők vannak kevesebben) akik mindezeket igen jól látják a mi „erőfeszítéseink" nélkül is, de a többség nem így van ezzel. Ők, vagy rámondják hogy „igen már látom", vagy föladják az egészet, és fennhangon hirdetik, mint valami erényt, hogy „sajnos nekem rossz a térlátásom". Nekik is esélyt adunk ezekkel az eszközökkel. Tapasztalatunkból, és gyakorlatunk alapján állítjuk, hogy a dobozban lévő modellek hatékonyan segítik a kívánt képességek alakítását, szolgálják a tanulók *térszemléletének fejlesztését.*

A csomagban található eszközök kereskedelmi forgalomban eddig még nem jelentek meg, ugyanakkor nagy segítséget nyújtanak a képességfejlesztésben. Új törekvésünk, hogy minden gyerek, vagy legalább minden kis tanulócsoport kapjon a kezébe eszközöket, és azok segítségével tapasztalatokat gyűjtsön, összefüggéseket állapítson meg. Ez nagymértékben hozzájárul az *önálló gondolkodás kialakításához, a kreativitás fejlesztéséhez.*

Az eszközök használatának néhány lehetséges módja:

- A valóság tárgyainak modellezése
- Új fogalmak kialakítása
- Sejtések megfogalmazása
- Tételek bizonyítása
- Feladatmegoldás szemléltetése

Alkalmazási módszerek lehetnek:

- Tanári demonstráció
- Diákcsoportok közös elemzése
- Egyéni, vagy páros munka
- Otthoni feldolgozás, kutatómunka

A FELVETETT PROBLÉMÁK ÉS FELADATOK HOGYAN ILLESZKEDNEK AZ OKTATÁSI PROGRAMCSOMAGHOZ?

Az alábbiakban 5–12. évfolyamok számára készült tanterv geometria témaköreinek azon részletei vannak kiemelve, amelyekhez az I. részben szereplő feladatlapok, és a II. rész feladatgyűjteményében kitűzött feladatok támogatást, segítséget és további fejlesztést nyújtanak.

5. ÉVFOLYAM

ALAKZATOK

Környezetünk tárgyai, alakzatok csoportosítása
Testek építése
A testek geometriai jellemzői
Párhuzamos és metsző síkok
Párhuzamos, metsző és kitérő egyenesek
Merőleges és párhuzamos egyenesek rajzolása
Mennyiségek, mértékegységek (hosszúság, terület, térfogat)
Azonos mennyiségek, összehasonlítása: méréssel, számítással
A sokszögek kerülete
A terület mérése, a téglalap területe

A TESTEK HÁLÓJA

A téglatest felszíne
Testek térfogata, a térfogat mérése
A téglatest térfogatának kiszámítása

PONTHALMAZOK, PONTHALMAZOK TÁVOLSÁGA

A kör és a gömb. *Analógiák a síkon és a gömbön*
Kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkon
Pont és egyenes távolsága, pont és sík távolsága
Gömb és sík kölcsönös helyzete
Egyenes a síkon
Két egyenes távolsága
Két sík távolsága
Párhuzamos, merőleges egyenesek, szakaszfelező merőleges, szögfelező

6. ÉVFOLYAM

TENGELYES TÜKRÖZÉS

Képek és tükörképek
Tükrözés mozgatással
A tengelyes tükrözés tulajdonságai
Szimmetrikus alakzatok tulajdonságai, szerkesztésük: szakaszfelező merőleges, szögfelező, szimmetrikus háromszögek, négyszögek

HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK

Tengelyesen szimmetrikus háromszögek és négyszögek kerülete, területe
Testhálók a megismert sokszögekből, testek felszíne és térfogata

7. ÉVFOLYAM

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

Síkmozgások a valóságban
Mozgások a síkon (tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, *forgatás,* eltolás, *csúsztatva tükrözés)*
Középpontosan tükrös alakzatok
A szabályos sokszögek szimmetriái

HASÁBOK, HENGEREK

A hasábok jellemzése
A hasáb hálója, felszíne, térfogata
A forgáshenger jellemzése
A forgáshenger hálója, felszíne, térfogata

8. ÉVFOLYAM

GÚLÁK ÉS KÚPOK

A gúla jellemzése, hálója
Forgáskúp jellemzése, hálója
Ismerkedés a gömbbel

A GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Az eltolás tulajdonságai. Alakzatok eltolása adott vektorral. Párhuzamos szárú szögek fajtái
Forgatás 90°-kal. *A forgatás tulajdonságai. Alakzatok elforgatása 90°-kal. Merőleges szárú szögek*
Egybevágósági transzformációk összefoglalása
Hasonló alakzatok a valóságban. A hasonlóság fogalma.

9. ÉVFOLYAM

A GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Elforgatás
Forgásszimmetrikus alakzatok
Összetett transzformációk
Transzformációk térben

HÁROMSZÖGEK

Pitagorasz tétel és megfordítása
Thalesz tétel és megfordítása
Konvex, konkáv sokszögek
Sokszögek átlói, belső és külső szögei
Speciális négyszögek

A KÖR ÉS RÉSZEI

A kör kerülete, területe
A szög mérése (fok, ívmérték)
A kör részei
A kör érintője

MÉRTANI TESTEK TULAJDONSÁGAI

Poliéderek az interneten
Archimedesi testek
Testek felszíne és térfogata

Testhálók
Térelemek távolsága, hajlásszöge
Térszemlélet fejlesztő feladatok

10. ÉVFOLYAM

HASONLÓSÁG

Középpontos nagyítás és kicsinyítés
A hasonlóság foalma
Háromszögek hasonlósága
Háromszög súlyvonala, súlypontja
Síkidomok hasonlósága

SZÖGFÜGGVÉNYEK

A hegyesszög szögfüggvényei derékszögű háromszögben, és alkalmazása testeken

11. ÉVFOLYAM

TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSA ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖGEKBEN

A valóságból vett térbeli feladatok közelítő megoldása
Gyakorlati problémák modellezése síkban
Távolságok, szögek meghatározása

12. ÉVFOLYAM

SÍKIDOMOK TERÜLETE

Síkidomok kerületének meghatározása
A területszámítás axiómái
A háromszögek, a nevezetes négyszögek, a szabályos sokszögek területe.
A kör és részeinek területe

A merőleges vetület
Síkidom merőleges vetületének területe

TESTEK TÉRFOGATA

Térelemek távolsága, hajlásszöge
A téglatest, a hasáb térfogata
Az egyenes körhenger felszíne és térfogata
A kúpszerű testek felszíne és térfogata
Csonka gúla, csonka kúp, felszíne és térfogata
Gömb felszíne és térfogata
Síkmetszetre vonatkozó feladatok
Szabályos testek

FELADATLAPOK

1. FELADATLAP: HASÁBOK, GÚLÁK
(5–6. évfolyam számára ajánlott)

Előkészületek

Hat tanulócsoportot alakítunk ki. Minden csoport egy-egy test modelljét kapja meg. Ha mód van rá, egy csoport két testet is kaphat. Pl.: egy hasábot és egy gúlát.

- kocka
- szabályos tetraéder
- négyzet alapú gúla
- szabályos ötszög alapú egyenes hasáb
- hatszög alapú szabályos gúla
- négyzet alapú szabályos csonkagúla

A feladatlap kérdései a felsorolt testekre vonatkoznak.

A tanulók számára szükséges eszközök: a feladatlap másolata, rajzlap, másolópapír, olló, cellux, papírragasztó, vonalzó, körző.

1.1 A zsinór összehúzása után vizsgáld meg a kapott testet!

Sorolj fel néhány (2-3 db) tárgyat a környezetedből, amelyek hasonlítanak a térbeli modellre!

Válaszolj a táblázatban feltett kérdésekre!

KÉRDÉS	VÁLASZ	ELLENŐRZÉS
Mi a test neve?		
a) Hány cm a test alapéle? (mérés)		
b) Hány cm a test oldaléle? (mérés)		
c) Hány cm a test magassága? (mérés)		
d) Hány csúcsa van a testnek?		
e) Hány éle van a testnek?		
f) Vannak-e a testen merőleges élek? Hány pár?		
g) Vannak-e a testen párhuzamos élek? Hány pár?		
h) Vannak-e a testen kitérő élek? Hány pár?		

1.2 A kiterített testhálóról, a másolópapír segítségével készíts másolatot a rajzlapra, majd vágd ki egyenként a test határoló lapjait!

KÉRDÉS	VÁLASZ	ELLENŐRZÉS
a) Hány határoló lapja van a testnek?		
b) Milyen határoló lapjai vannak a testnek?		
c) Hány egybevágó lapja van a testnek?		
d) Melyek ezek?		

1.3 – Készíts a kivágott sokszöglapokból, olyan síkbeli alakzatot, amelyből ugyanezt a testet lehet összeállítani, és amely a vizsgált modell hálójától különböző!
- Ellenőrizd, hogy az általad készített, síklapokból álló alakzat valóban a vizsgált test hálója-e!
- Rajzold le az általad készített hálót!
- Rajzold mellé a vizsgált zsinóros modell testhálóját is!

2. FELADATLAP: HASÁBOK, GÚLÁK
(7–8. évfolyam számára ajánlott)

Előkészületek

Hat tanulócsoportot alakítunk ki. Minden csoport egy-egy test modelljét kapja meg. Ha mód van rá, egy csoport két testet is kaphat. Pl.: egy hasábot és egy gúlát.

- szabályos tetraéder
- kocka
- téglatest
- szabályos oktaéder❋
- hatszög alapú szabályos gúla
- négyzet alapú szabályos csonkagúla

A feladatlap kérdései a felsorolt testekre vonatkoznak. A szabályos oktaéder ❋ esetében mondhatjuk azt is, hogy két szabályos négyoldalú gúla alaplapjuknál összeragasztva. Az erre vonatkozó kérdéseknél a két, négyzet alapú gúla valamelyikét kell vizsgálni.

A tanulók számára szükséges eszközök: a feladatlap másolata, rajzlap, másolópapír, olló, cellux, papírragasztó, szívószál, damil, vonalzó, körző.

2.1 A zsinór összehúzása után végezd el a szükséges méréseket és válaszolj a kérdésekre!

KÉRDÉS	VÁLASZ	ELLENŐRZÉS
Mi a test neve?		
a) Hány cm a test alapéle?		
b) Hány cm a test oldaléle?		
c) Hány cm a test magassága?		
d) Mekkora területű papírból készült a test hálója?		

2.2 A zsinór összehúzása után vizsgáld meg a kapott testet!

KÉRDÉS	VÁLASZ	ELLENŐRZÉS
a) Hány csúcsa van a testnek?		
b) Hány éle van a testnek?		
c) Hány lapja van a testnek?		
d) Milyen síkidomok határolják a testet?		
e) Hány egybevágó lapja van a testnek?		

2.3 A szükséges adatok megmérése után szerkeszd meg a modell hálóját a rajzlapra!

2.4 A megszerkesztett hálóból vágd ki egyenként a test határoló lapjait! Készíts a kivágott sokszög-lapokból olyan síkbeli alakzatot, a,elyből ugyanezt a testet lehet összeállítani, és amely a vizsgált modell hálójától különböző! Keress többféle megoldást! Minden esetben ellenőrizd, hogy az általad készített síklapokból álló alakzat valóban a vizsgált test hálója-e!

2.5 – Jelöld meg a modellen a határoló lapok középpontját! Kösd össze gondolatban szakaszokkal a szomszédos lapok kijelölt középpontját! Milyen test élei ezek a szakaszok?

– Készítsd el szívószállal és damillal az így kapott test modelljét!
(Az elkészítés azok számára ajánlott, akik ennek segítségével jobban látják a leírt térbeli alakzatokat)

– Az új test vizsgálata:

a) Hány csúcsa van a testnek?	
b) Hány éle van a testnek?	
c) Hány lapja van a testnek?	
d) Milyen síkidomok határolják a testet?	
e) Hány egybevágó lapja van a testnek?	

– Fogalmazd meg, milyen kapcsolat van az eredetileg vizsgált modell és annak lapközéppontjai által maghatározott test jellemző adatai (csúcsa, éle, lapja) között!

3. FELADATLAP: SZABÁLYOS TESTEK
(9–10. évfolyam számára ajánlott)

Előkészületek

A tanulók számára szükséges eszközök: a feladatlap másolata, rajzlap, másolópapír, olló, cellux, papírragasztó, szívószál, damil, vonalzó, körző, szabályos testek.

3.1 Alapfogalmak

a) Hány lapja, csúcsa, éle, van?	LAP	CSÚCS	ÉL
szabályos tetraéder			
kocka			
szabályos oktaéder			
szabályos dodekaéder			
szabályos ikozaéder			
b) Keress összefüggéseket a három adat között!			

3.2 A test jellemző adatainak „szimmetriái”

a) Melyek azok a szabályos testek, amelyeknek ugyanannyi éle van?		
b) Milyen „szimmetria” ismerhető fel az azonos élszámú testek csúcs- és lapszáma között?		
c) Add meg a jobboldali két oszlopban kért adatokat!	HATÁROLÓ LAPOK OLDALSZÁMA	EGY CSÚCSBAN ÖSSZEFUTÓ LAPOK SZÁMA
szabályos tetraéder		
kocka		
szabályos oktaéder		
szabályos dodekaéder		
szabályos ikozaéder		
d) Milyen „szimmetria” fedezhető fel a két oszlopban lévő számok között. Válaszodat vesd össze a 3.2.b) válasszal!		

3.3 Szabályos testek, és azok duálisai

Jelöld meg a modelleken a határoló lapok középpontját! Kösd össze gondolatban szakaszokkal a szomszédos lapok kijelölt középpontját! Ezek a szakaszok egy új test élei. Az így előállított test az eredeti duálisa. Válassz ki ezek közül egyet, és készítsd el a modelljét szívószállal és damillal!

(Az elkészítés azok számára ajánlott, akik ennek segítségével jobban látják a leírt térbeli alakzatokat)

a) Milyen testet határoznak meg a szabályos tetraéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	
b) Milyen testet határoznak meg a kocka szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	
c) Milyen testet határoznak meg a szabályos oktaéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	
d) Milyen testet határoznak meg a szabályos dodekaéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	
e) Milyen testet határoznak meg a szabályos ikozaéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	

4. FELADATLAP: SZABÁLYOS SOKSZÖG ALAPÚ, EGYENES HASÁBOK, GÚLÁK

(9–10. évfolyam számára ajánlott)

Előkészületek

A tanulók számára szükséges eszközök: a feladatlap másolata, rajzlap, másolópapír, olló, cellux, papírragasztó, szívószál, damil, vonalzó, körző, olyan konvex testek, amelyeket szabályos sokszögek határolnak.

- háromszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb
- hatszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb
- négyzet alapú egyenlő élhosszúságú gúla
- szabályos ötszög alapú egyenlő élhosszúságú gúla

4.1 Alapfogalmak

Hány lapja, csúcsa, éle van?	LAP	CSÚCS	ÉL
a) háromszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb			
b) hatszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb			
c) négyzet alapú egyenlő élhosszúságú gúla			
d) szabályos ötszög alapú egyenlő élhosszúságú gúla			

4.2 Poliéderek, és azok duálisai

Jelöld meg a modelleken a határoló lapok középpontját! Kösd össze gondolatban szakaszokkal a szomszédos lapok kijelölt középpontját!
Ezek a szakaszok egy új test élei. Az így előállított test az eredeti duálisa.

Válassz ki ezek közül egyet, és készítsd el a modelljét szívószállal és damillal!
(Az elkészítés azok számára ajánlott, akik ennek segítségével látják a leírt térbeli alakzatokat)

a) Milyen testet határoznak meg a szabályos háromszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?			
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
b) Milyen testet határoznak meg a hatszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?			
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
c) Milyen testet határoznak meg a négyzet alapú egyenlő élhosszúságú gúla szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?			
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
d) Milyen testet határoznak meg a szabályos ötszög alapú egyenlő élhosszúságú gúla szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?			
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL

– Fogalmazd meg, milyen kapcsolat van az eredetileg vizsgált modell és annak lapközéppontjai által maghatározott test jellemző adatai (csúcsa, éle, lapja, határoló lapok oldalszáma, egy csúcsban összefutó lapok száma) között!

5. FELADATLAP: HENGEREK
(9–10. évfolyam számára ajánlott)

Előkészületek

A tanulók számára szükséges eszközök: a feladatlap másolata, rajzlap, olló, körző, vonalzó, és a gumis henger modellje.

5.1 Különböző helyzetbe állított hengerek összehasonlítása, jellemzése.
(Hengeren továbbiakban kizárólag körhengert értünk)

A) Első helyzet: egy 20 cm magasságú egyenes körhengert állítunk be a modellen.
B) Második helyzet: a 20 cm-es magasságot másfélszeresére megnyújtjuk.

A hengerek palástját és tengelymetszetét készítsd el rajzlapból, és vágd ki azokat!
(Az elkészítés azok számára ajánlott, akik ennek segítségével jobban látják a leírt alakzatokat)

	VÁLASZ	INDOKLÁS
a) Igaz-e, hogy az A) és a B) helyzetben beállított hengerek hasonlók?		
b) Hogyan változik a henger palástjának területe?		
c) Hogyan változik a tengelymetszet területe?		
d) Hogyan változik a tengelymetszet átlójának, az alapkör átmérőjével bezárt szöge?		
e) Hogyan változik a henger térfogata?		
f) Hogyan változik a henger felszíne?		
A b)-f) feladatokban megadott kapcsolatok melyike egyenes arányosság?		

C) Harmadik helyzet: az alap- és a fedőlap párhuzamos síkban való elmozdításával különböző ferde hengereket állítunk be.

a) Mekkora az alkotó és a magasság szöge, ha a magasság hossza egyenlő az alkotónak az alaplap síkjára eső merőleges vetületével?		
b) Mekkora az alkotó és a magasság szöge, ha a magasság fele az alkotónak?		
c) Mekkora az alkotó és a magasság szöge, ha az alkotó fele a magasságnak?		

D) Készítsd el rajzlapból valamelyik ferde henger palástját, és vázlatosan rajzold le azt!

5.2 A 20 cm magasságú, 10 cm alapkörátmérőjű egyenes körhenger rajzlapból elkészített palástjára készíts egysoros feliratot úgy, hogy a szöveg betűi és a szóközök egyenletes rendben követve egymást töltsék ki paláston a betű magasságának megfelelő sávot! (A betű magasságát te választod.) Közelítőleg hány cm hely jut egy betűre, ha mindegyiknek ugyanakkora közt adunk?
(A szöveg lehet például: egy bögre felírat EZ AZ ÉN KAKAÓM
egy korsó felírat EZ AZ ÉN SÖRÖM stb.)

5.3 Legyen az egyenes körhengerünk egy henger alakú üveg modellje. Az üveg felső szélének egy pontjáról elindul egy hangya, és az üveg oldalán körben haladva, egyenletesen lefelé mászik addig, amíg a kiindulási pontból húzott alkotónak, az üveg alaplapjával közös pontjába érkezik. Mekkora utat tesz meg eközben?
A feladatot a 20 cm magasságú, 10 cm alapkör-átmérőjű egyenes körhenger, rajzlapból elkészített palástján modellezzük!

6. FELADATLAP: TANÓRÁN KÍVÜLI CSOPORTOS, VAGY EGYÉNI PROBLÉMAMEGOLDÁS (9–12. évfolyam számára ajánlott)

Előkészület

- A tanulók által kiválasztott iskolai (akár tanári) használatú modellek
- A csoport egyes tagjai által elkészített modellek
- Szakirodalom (nem csak matematikai)
- Internetről használható programok, szakanyagok
- Külső szakértők, segítők felkérése

Javaslat

Az itt felsorolt feladatok feloszthatók például egy 5-6 tagú csoport tagjai között. A részfeladatok elvégzése, a felvetett problémák szakszerű elemzése után az összegyűjtött anyagból a csoport egy értékes előadást készít.

6.1 A szabályos tetraédert és a kockát elmetsszük egy síkkal. Rajzold le milyen síkidom lehet a síkmetszet?

	A SÍKMETSZET ILYEN LEHET
szabályos tetraéder	
kocka	

6.2 A focilabda modelljét a szabályos ikozaéder „megcsonkításával" lehet előállítani. Matematikai indoklással együtt mutasd be, hogyan!

6.3 Keress az órán megismert testeken kívül olyanokat, amelyeket szabályos sokszögek határolnak! (Csillagpoliéderek, félig szabályos testek, stb)
(A választ szakkönyvekből, vagy az internet segítségével találod meg, illusztrálni fényképekkel, vagy net-ről letöltött képekkel tudod.)

EGYÉNI, VAGY CSOPORTOS KUTATÓMUNKA
(9–12. évfolyam számára ajánlott)

Otthoni elemzésre és kutatómunkára a tanulók önállóan vagy csoportokat alkotva is vállalkozhatnak. Az ilyen feladatok elvégzése legalább egy hetet vesz igénybe. Az elvégzett munka eredményének bemutatása, előadása az osztálytársakat is tanítja. Az ilyen feladatmegoldások sok új ismeretanyagot, ennek következtében önálló felfedezési lehetőségeket is adnak. Az iskolai segédletek mellett ugyanis rendelkezésre állnak a könyvek, a folyóiratok, az internet, a családtagok, a barátok.

Ajánlott kutatási témák

1. A szabályos testek jellemzése
2. A szabályos testek és az aranymetszés
3. A szabályos testek, a félig szabályos testek
4. A szabályos testek és a kristályszerkezetek
5. A szabályos testek és a művészetek
6. A szabályos testek és az építészet
7. A szabályos testek a matematika története során
8. Bármi egyéb, amire a kíváncsi diák rátalál és gazdagítja ismereteinket

A FELADATLAPOK MEGOLDÁSAI

Az 1. és a 2. feladatlapok nagyrészt méréseket és játékos manipulációkat tartalmaznak, ezért ezek megoldásai itt nem szerepelnek.

3. FELADATLAP: SZABÁLYOS TESTEK
(9–10. évfolyam számára ajánlott)

3.1 Alapfogalmak

a). Hány csúcsa, éle, lapja van ?	LAP	CSÚCS	ÉL
szabályos tetraéder	*4*	*4*	*6*
kocka	*6*	*8*	*12*
szabályos oktaéder	*8*	*6*	*12*
szabályos dodekaéder	*12*	*20*	*30*
szabályos ikozaéder	*20*	*12*	*30*
b) Keress összefüggéseket a három adat között!	*lap + csúcs= él + 2*		

3.2 A test jellemző adatainak „szimmetriái”

a) Melyek azok a szabályos testek, amelyeknek ugyanannyi éle van?	*kocka és oktaéder* *dodekaéder és ikozaéder*	
b) Milyen „szimmetria” ismerhető fel az azonos élszámú testek csúcs- és lapszáma között?	*a csúcsok és lapok száma „helyet cserél”*	
c) Add meg a jobboldali két oszlopban kért adatokat!	HATÁROLÓ LAPOK OLDALSZÁMA	EGY CSÚCSBAN ÖSSZEFUTÓ LAPOK SZÁMA
szabályos tetraéder	*3*	*3*
kocka	*4*	*3*
szabályos oktaéder	*3*	*4*
szabályos dodekaéder	*5*	*3*
szabályos ikozaéder	*3*	*5*
Milyen „szimmetria” fedezhető fel a két oszlopban lévő számok között. Válaszodat vesd össze a 3.2.b) válasszal!	*az azonos élszámú testek adatai „helyet cserélnek”*	

3.3 Szabályos testek, és azok duálisai

Jelöld meg a modelleken a határoló lapok középpontját! Ezek a lapközéppontok az új test csúcsai. Kösd össze gondolatban szakaszokkal a szomszédos lapok kijelölt lapközéppontjait! Ezek a szakaszok az új test élei, közülük az egy síkban lévők, az új test lapjait határozzák meg. Az így kapott testet az eredeti duális párjának nevezzük.

a) Milyen testet határoznak meg a szabályos tetraéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	*szabályos tetraédert*
b) Milyen testet határoznak meg a kocka szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	*szabályos oktaédert*
c) Milyen testet határoznak meg a szabályos oktaéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	*kockát*
d) Milyen testet határoznak meg a szabályos dodekaéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	*szabályos ikozaédert*
e) Milyen testet határoznak meg a szabályos ikozaéder szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	*szabályos dodekaédert*

4. FELADATLAP: SZABÁLYOS SOKSZÖG ALAPÚ, EGYENES HASÁBOK, GÚLÁK

(9–10. évfolyam számára ajánlott)

4.1 Alapfogalmak

Hány lapja, csúcsa, éle van?	LAP	CSÚCS	ÉL
a) háromszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb	*5*	*6*	*9*
b) hatszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb	*8*	*12*	*18*
c) négyzet alapú egyenlő élhosszúságú gúla	*5*	*5*	*8*
d) szabályos ötszög alapú egyenlő élhosszúságú gúla	*6*	*6*	*10*

4.2 Poliéderek, és azok duálisai

Jelöld meg a modelleken a határoló lapok középpontját! Ezek a lapközéppontok az új test csúcsai. Kösd össze gondolatban szakaszokkal a szomszédos lapok kijelölt lapközéppontjait! Ezek a szakaszok az új test élei, közülük az egy síkban lévők, az új test lapjait határozzák meg. Az így kapott testet az eredeti duális párjának nevezzük

a) Milyen testet határoznak meg a háromszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	***hatoldalú kettős gúlát***		
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
	6	***5***	***9***
b) Milyen testet határoznak meg a hatszög alapú egyenlő élhosszúságú egyenes hasáb szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	***tizenkét oldalú kettős gúlát***		
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
	12	***8***	***18***
c) Milyen testet határoznak meg a négyzet alapú egyenlő élhosszúságú gúla szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	***négyzet alapú egyenlő élhosszúságú gúlát***		
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
	5	***5***	***8***
d) Milyen testet határoznak meg a szabályos ötszög alapú egyenlő élhosszúságú gúla szomszédos lapközéppontjait összekötő szakaszok?	***ötszög alapú egyenlő élhosszúságú gúlát***		
Hány lapja, csúcsa, éle van ennek a testnek?	LAP	CSÚCS	ÉL
	6	***6***	***10***

Fogalmazd meg, milyen kapcsolat van az eredetileg vizsgált modell és annak lapközéppontjai által maghatározott test jellemző adatai (csúcsa, éle, lapja, határoló lapok oldalszáma, egy csúcsban összefutó lapok száma) között!

Megoldás:

A 4.1 illetve a 4.2 táblázatok a) és b) feladatainál az élek száma azonos, a másik két adat szerepe pedig felcserélődött. A c) és d) feladatoknál pedig minden adat ugyanaz maradt.

5. FELADATLAP: HENGEREK
(9–10. évfolyam számára ajánlott)

5.1 Különböző helyzetbe állított hengerek összehasonlítása, jellemzése. (Hengeren továbbiakban kizárólag körhengert értünk)

A) Első helyzet: egy 20 cm magasságú egyenes körhengert állítunk be a modellen.
B) Második helyzet: a 20 cm-es magasságot másfélszeresére megnyújtjuk.

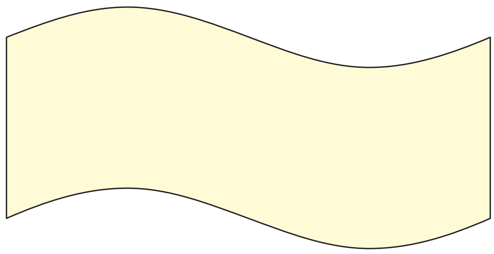
	VÁLASZ	INDOKLÁS
a) Igaz-e, hogy az A) és a B) helyzetben beállított hengerek hasonlók?	*nem*	*a megfelelő méretek aránya nem állandó*
b) Hogyan változik a henger palástjának területe?	*másfélszeresére nő*	*a henger téglalap alakú palástjának egyik oldala állandó, (az alaplap kerülete) másik oldala másfélszeresére nőtt*
c) Hogyan változik a tengelymetszet területe?	*másfélszeresére nő*	*a tengelymetszet téglalapjának egyik oldala állandó, (alaplap átmérője) másik oldala másfélszeresére nőtt*
d) Hogyan változik a tengelymetszet átlójának, az alapkör átmérőjével bezárt szöge?	*nő*	$tg\alpha_1 = \frac{m}{d}$; $tg\alpha_2 = \frac{1{,}5\,m}{d}$ $tg\alpha_1 < tg\alpha_2$ $\alpha_1 < \alpha_2$
e) Hogyan változik a henger térfogata?	*másfélszeresére nő*	*az alapterület ugyanaz, a magasság másfélszeresére nő*
f) Hogyan változik a henger felszíne?	*nő*	*a két alapterület ugyanaz, a palást területe másfélszeresére nő*
A b)-f) feladatokban megadott kapcsolatok melyike egyenes arányosság?	*b,c,e esetekben*	*a megfelelő értékek aránya 1,5*

C) Harmadik helyzet: az alap- és a fedőlap párhuzamos síkban való elmozdításával különböző ferde hengereket állítunk be.

a) Mekkora az alkotó és a magasság szöge, ha a magasság hossza egyenlő az alkotónak az alaplap síkjára eső merőleges vetületével?	$\alpha = 45°$	$tg\,\alpha = 1$
b) Mekkora az alkotó és a magasság szöge, ha a magasság fele az alkotónak?	$\alpha = 60°$	$\cos\alpha = \frac{1}{2}$
c) Mekkora az alkotó és a magasság szöge, ha az alkotó fele a magasságnak?	*ilyen nem lehet*	

D) Készítsd el rajzlapból valamelyik ferde henger palástját, és vázlatosan rajzold le azt!

Megoldás:



5.2 A 20 cm magasságú, 10 cm alapkör-átmérőjű egyenes körhenger rajzlapból elkészített palástjára készíts egysoros feliratot úgy, hogy a szöveg betűi és a szóközök egyenletes rendben követve egymást töltsék ki paláston a betű magasságának megfelelő sávot! (A betű magasságát te választod.) Közelítőleg hány cm hely jut egy betűre, ha mindegyiknek ugyanakkora közt adunk?
(A szöveg lehet például: egy bögre felírat EZ AZ ÉN KAKAÓM
egy korsó felírat EZ AZ ÉN SÖRÖM stb.)

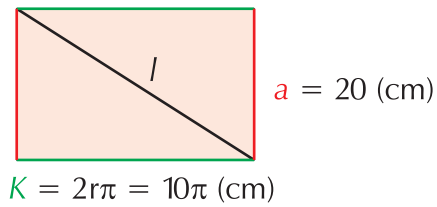
Megoldás:

Az alapkör kerületét kell annyi egyenlő részre osztani, ahány betű és szóköz szerepel a szövegben.

Például a bögre felirata 15 karakterből áll $K = 2r\pi \approx 31{,}416$ ***cm***
Egy betűnek 31,416 cm : 15 ≈ 2,1 cm.

5.3 Legyen az egyenes körhengerünk egy henger alakú üveg modellje. (Adatok az 5.2 feladatban) Az üveg felső szélének egy pontjáról elindul egy hangya, és az üveg oldalán körben haladva, egyenletesen lefelé mászik addig, amíg a kiindulási pontból húzott alkotónak, az üveg alaplapjával közös pontjába érkezik. Mekkora utat tesz meg eközben?

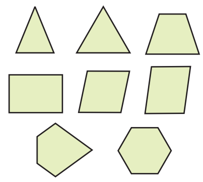
Megoldás:



A henger palástját a hangya kiindulási és megékezési pontjait összekötő alkotó mentén elvágjuk. A kiterített paláston így a hangya az átló hosszával egyenlő utat tesz meg. Az átló hosszát Pitagorász tétellel határozzuk meg.
A hangya $l = \sqrt{(2r\pi)^2 + a^2} = \sqrt{(10\pi)^2 + 20^2} \approx 37{,}24$ ***cm utat tesz meg.***

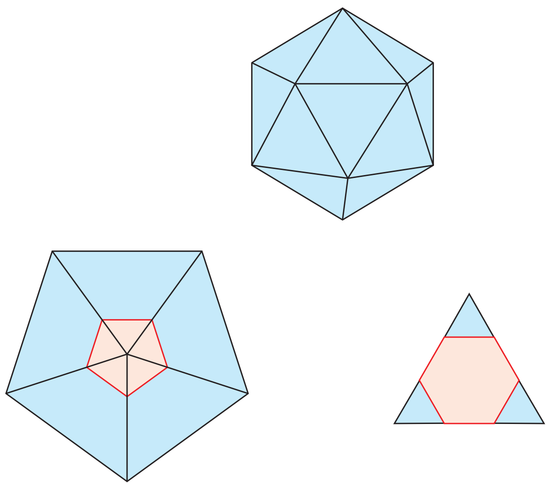
6. FELADATLAP: TANÓRÁN KÍVÜLI CSOPORTOS, VAGY EGYÉNI PROBLÉMAMEGOLDÁS
(9–12. évfolyam számára ajánlott)

6.1 A szabályos tetraédert és a kockát elmetsszük egy síkkal. Rajzold le milyen síkidom lehet a síkmetszet?

	A SÍKMETSZET ILYEN LEHET
szabályos tetraéder	
kocka	

6.2 A focilabda modelljét a szabályos ikozaéder „megcsonkításával” lehet előállítani. Matematikai indoklással együtt mutasd be, hogyan!

Megoldás:



A szabályos ikozaéder minden csúcsánál megjelöljük az oda futó éleken, a csúcshoz közelebbi harmadoló pontokat. Ezekre a pontokra fektetett síkkal levágunk az ikozaéderből egy-egy ötszög alapú gúlát. Így olyan testet kapunk, amelyet az ikozaéder volt csúcsainál 12 db szabályos ötszög, és az ikozaéder volt lapjainál pedig 20 db szabályos hatszög határol. Ez a focilabda modellje.

6.2 Segítséget nyújt a http://matlinkek.cjb.hu internetes oldal, vagy a Sulinet térgeometriát tartalmazó linkjei.