MATEMATIKAI
KOMPETENCIATERÜLET

TE IS LÁTOD, AMIT ÉN LÁTOK?

TÉRSZEMLÉLET FEJLESZTÉS

5–12. ÉVFOLYAM

II. RÉSZ

FELADATGYŰJTEMÉNY

A kiadvány az Educatio Kht.
Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve alapján készült.

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült, a suliNova oktatási programcsomag részeként létrejött tanulói információhordozó. A kiadvány sikeres használatához szükséges a teljes oktatási programcsomag ismerete és használata. A teljes programcsomag elérhető: www.educatio.hu címen.

Matematika szakmai vezető
Pálfalvi Józsefné dr.

Írta
Széplaki Györgyné

Lektor
Pálmay Lóránt

Ábrák
Szalóki Dezső

Felelős szerkesztő
Teszár Edit

A matematika 5–12. oktatási programcsomaghoz készült manipulációs taneszközök melléklete.

Educatio Kht. 2008.

TARTALOM

„A matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz,
hogy tisztán és világosan lássa az igazságot"

(R. Descartes)

AJÁNLÁS

A feladatgyűjtemény 60 feladatot tartalmaz, korosztályonként 15-15-öt, melyek a *térlátás fejlesztését* szolgálják elsősorban. A felvetett problémák megválaszolása nem terület, felszín illetve térfogatszámítást, hanem *építsd meg, rajzold le, próbáld meg elképzelni* műveleteket vár a tanulóktól. A feladatok megoldása közben, már a legkisebb korosztályban is a konkrét tapasztalattól az elvont gondolkodásig, minden logikai lépést el kell végezni.

Az egyes fejezetek elején a korosztály megjelölése csak ajánlás. A gyűjteményben olyan feladatsorok szerepelnek, amelyek nem függnek az iskolai tantervben előírt tananyagtól, ezért az alacsonyabb korosztály feladatai bármelyik magasabb évfolyamban is megoldhatók. Csak azt tartsuk szem előtt, hogy kisebbeknél mindig modellezzünk, használjuk a programcsomaghoz elkészült, illetve annak alapján az általunk elkészített tanári és tanulói modelleket. Konkrét tárgyakon, eszközökön elemezzük a felvetett problémát, így fedeztessük fel az összefüggéseket, hiszen egy „térbeli alakzat, és annak leképezése a síkban" absztrakciós lépéssorozat gyakorlása vezethet el a térszemlélet fejlődéséhez. Ez a fejlesztési folyamat akkor eredményes, ha egészen kicsi korban elkezdődik. Természetesen idősebb diákoknak, sőt a felnőtteknek is segítenek a feladathoz illő valóságos tárgyak és modellek.

A feladatok sorszáma melletti  jel arra utal, hogy azok megoldása nehezebb, komolyabb összefüggések felfedezését várja a tanulóktól.

A téma iránt érdeklődők további, ezekhez hasonló feladatot találnak a megfelelő korosztály tankönyveiben, feladatgyűjteményeiben és felvételi feladatsoraiban.

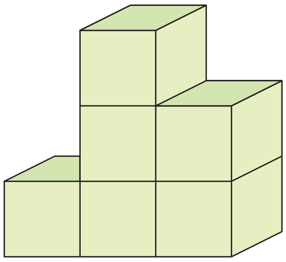
FELADATGYŰJTEMÉNY

5–6. ÉVFOLYAM

Az első két feladathoz nyújt segítséget a következő példa.

Példa

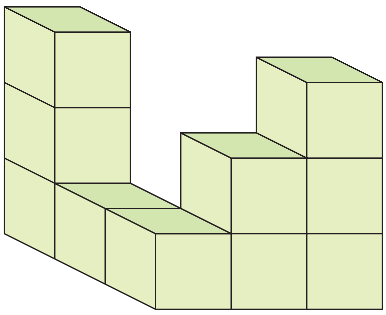
Egységkockákból különböző építményeket készítünk úgy, hogy a kockákat egy-egy lapjuknál összeragasztjuk. Ebben a példában egy ilyen építményt, és annak alaprajzát látod. Az alaprajz négyzeteibe írt számok az egymás fölött elhelyezett kockák számát jelentik. Az építmény minden egyes oszlopa az alaptól számítva folytonosan ki van töltve kockákkal. (Az építmény sehol sem „lyukas”.)



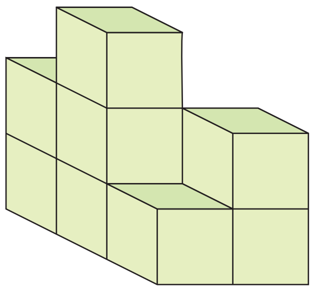
1	3	2

1. Egységkockákból készített építmények rajzát látod az ábrán. Készítsd el ezek alaprajzát!

a)



b)



2. Az ábrán térbeli építmények alaprajzát látod.
a) Az alaprajzból állapítsd meg, hogy az építményhez összesen hány kockát használtunk?
b) Rajzold le, vagy építsd meg a térbeli alakzatot!
c) Határozd meg, hogy az egységkockákból összeállított testek felszíne hány egységnégyzet?

a)

1	1	1
	1	
	1	

b)

1	2
	1

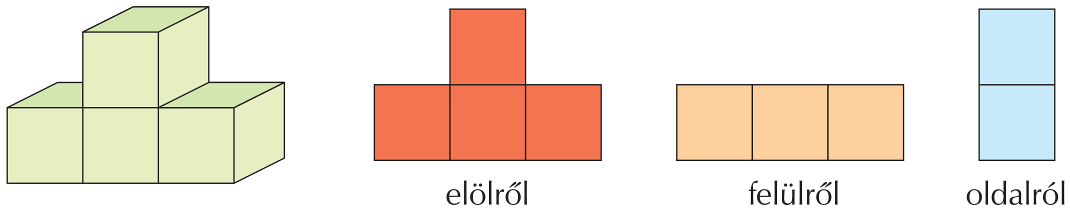
c)

2	2	2
1	1	1

3. Készíts különböző építményeket
a) három, b) négy darab egységkockából!
(Különbözőnek tekintünk két építményt, ha semmilyen mozgatással nem hozhatók fedésbe egymással.) Hányat találtál?

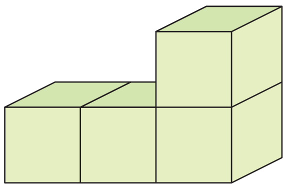
Példa

Egységkockákból álló építményeink három, egymásra páronként merőleges határoló lapjaival állítsunk párhuzamos síkokat! Az építményeknek, ezekre a síkokra eső merőleges vetületeit nevezzük elölnézetnek, felülnézetnek és oldalnézetnek. Az oldalnézetet – megállapodás szerint – a jobb oldali nézetet jelenti. (Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy ezeket a vetületeket látjuk, ha az építményre a megadott irányokból merőlegesen ránézünk.)

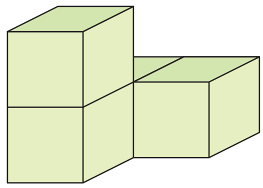


4. Rajzold le a következő ábrán látható építmények elölnézetét, felülnézetét és oldalnézetét!

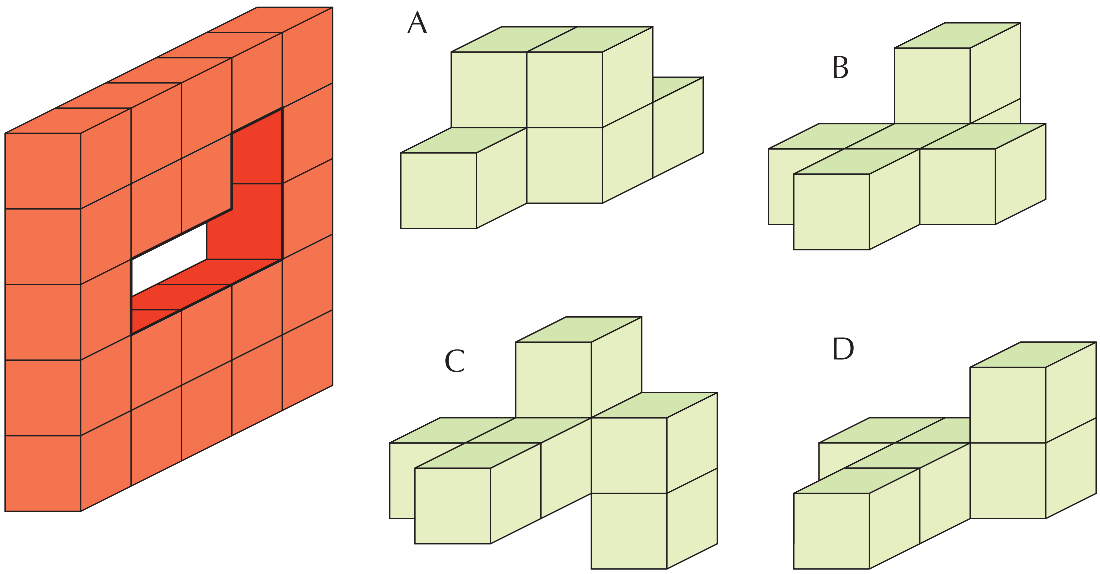
a)



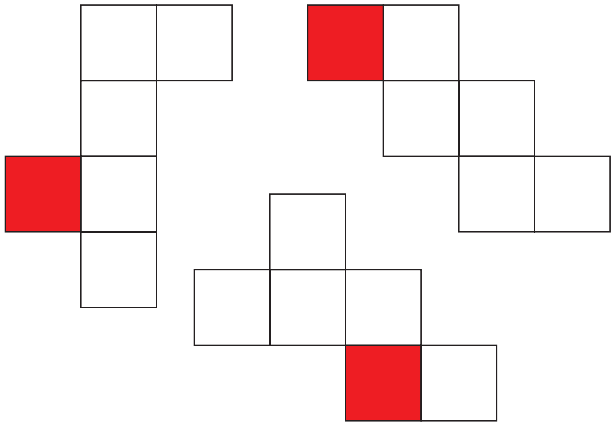
b)



5. Egységkockákból egy „lyukas falat” építünk, majd szintén egységkockákból elkészítjük az építményeket. Válaszd ki, hogy mely építmények férnek át a „lyukon”! Az építmények tetszés szerint forgathatók.

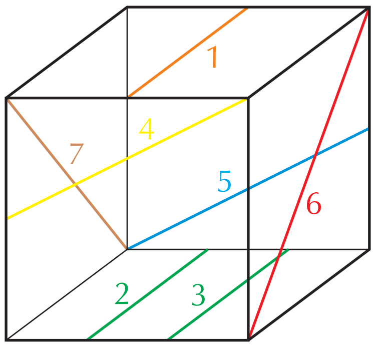


6. Egy kocka két szemközti lapja közül az egyiket pirosra, a másikat kékre festettük. A lerajzolt hálókon az egyiket megjelöltük. Válaszd ki, hogy melyik lehet a második színezett lap!

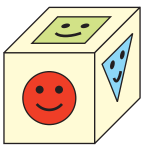


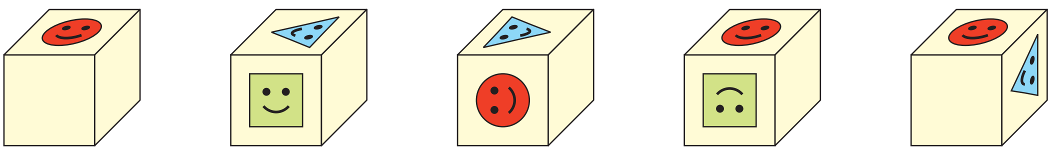
7. a) Fehér kartonból készült kocka lapjain hét színes szakaszt jelöltünk ki. Rajzold le, mit látsz, ha a kockát elölről, hátulról, alulról, fölülről, jobboldalról, illetve baloldalról nézed!

b) Rajzold le ezeket a nézeteket, ha a kocka átlátszó fóliából készült, és ugyanezek a színes szakaszok vannak rajta kijelölve!

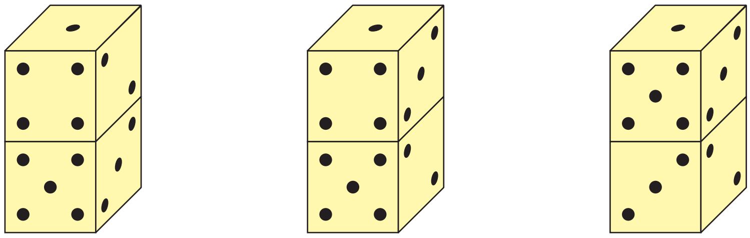


8. Fehér kartonból készült kocka három lapjára az ábrán látható módon különböző figurákat rajzoltunk, a többi lapját üresen hagytuk. Az alatta lévő öt kocka közül, melyik az, amely ugyanezt a kockát ábrázolja, csak más helyzetben?

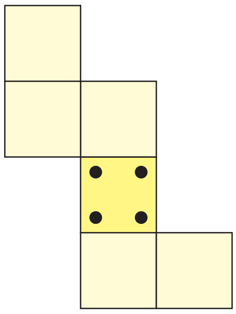




9. Szabályos egy dobókocka, ha a szemközti lapjain lévő pontok összege 7. Két szabályos dobókockát a 6-os lapjuknál összeragasztunk. Az alábbi ábrák közül melyik lehet helyes?



10. Szabályos egy dobókocka, ha a szemközti lapjain lévő pontok összege 7. Az ábrán lévő egyik lap pontszámát megadjuk. Hányféle kitöltés lehetséges, ha szabályos dobókockát szeretnénk kapni? Helyezd el a pöttyöket a kocka kiterített hálóján!



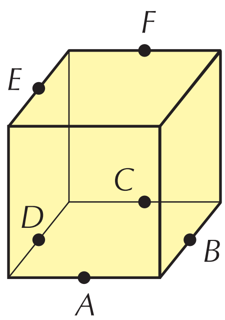
11. a) Hat darab egybevágó négyzetből készítsd el a kocka összes lehetséges hálóját! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba.
b) Keress olyan 6 db négyzetből álló sokszögeket is, amelyekből nem készíthető kocka!

12. Négy darab egybevágó szabályos háromszögből készítsd el a szabályos tetraéder különböző hálóit! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba. Keress olyan 4 db szabályos háromszögből álló sokszögeket is, amelyekből nem készíthető szabályos tetraéder!

13. Nyolc darab 1cm élű kocka lapjait színezzük. Minden egyes lapot pirosra, vagy kékre. Hogyan tehetjük meg ezt, hogy a nyolc kiskockából akár piros, akár kék színű 2 cm élű kockát össze tudjunk rakni?

14. A kocka élein megjelölt pontok élfelező pontok. Milyen háromszöget határoznak a felsorolt csúcspontok?

ABC, BDF, ABE, BDE

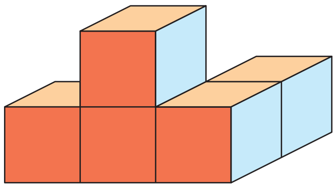


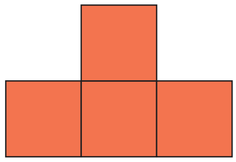
15. Hány olyan derékszögű háromszög létezik, amelynek csúcsait egy adott kocka csúcsai közül választjuk. A kocka csúcsait jelöljék az *ABCDEFGH* nagybetűk.

7–8. ÉVFOLYAM

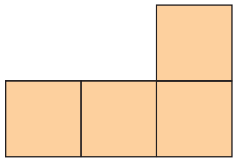
Példa

Egységkockákból álló építményeink három, egymásra páronként merőleges határoló lapjaival állítsunk párhuzamos síkokat! Az építményeknek, ezekre a síkokra eső merőleges vetületeit nevezzük elölnézetnek, felülnézetnek és oldalnézetnek. Az oldalnézetet – megállapodás szerint – a jobb oldali nézetet jelenti. (Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy ezeket a vetületeket látjuk, ha az építményre a megadott irányokból merőlegesen ránézünk.)

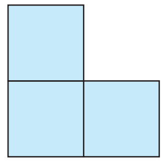




elölnézet



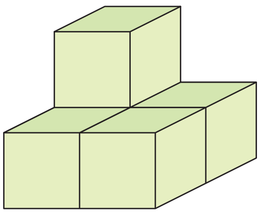
felülnézet



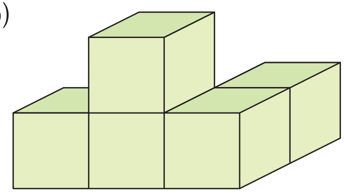
oldalnézet

1. Rajzold le az ábrán látható, öt egységkockából álló építmények elölnézetét, felülnézetét és oldalnézetét!

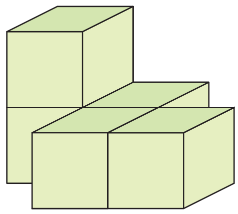
a)



b)

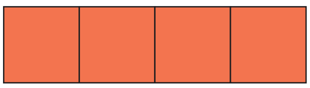


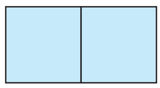
c)

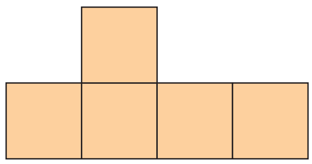


2. Öt egységkockából olyan építményeket készítettünk, amelyeknek három különböző nézete az ábrán látható. Rajzold le a térbeli ábráját!

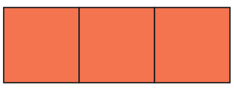
a) elölről oldalról felülről

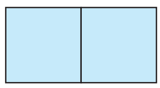


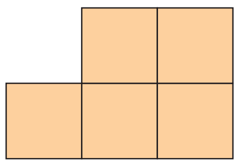




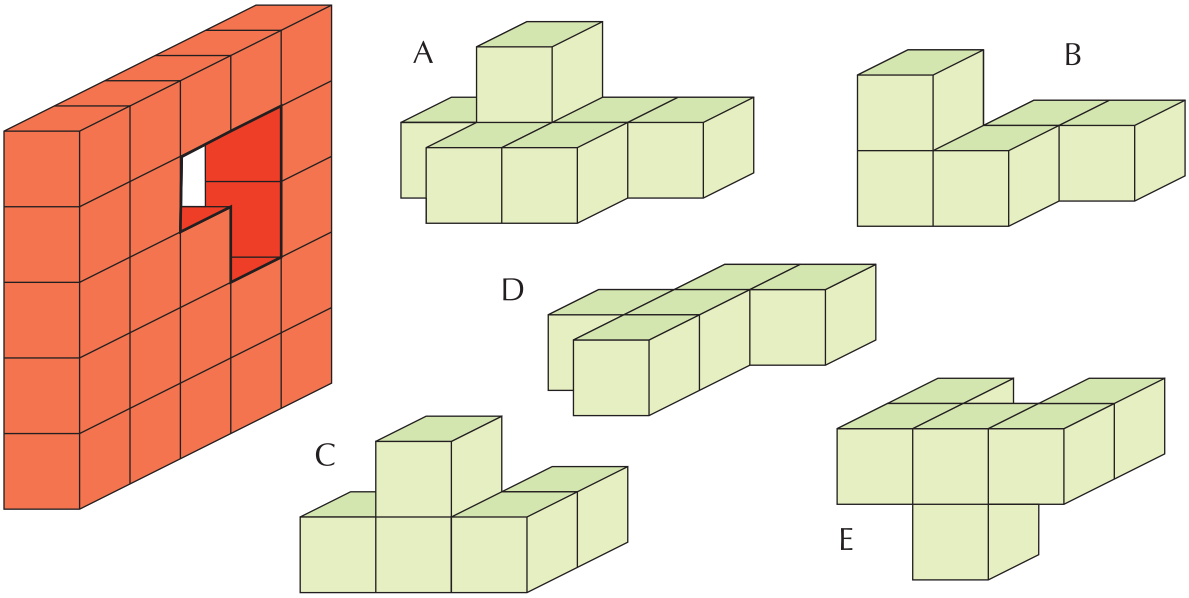
b)



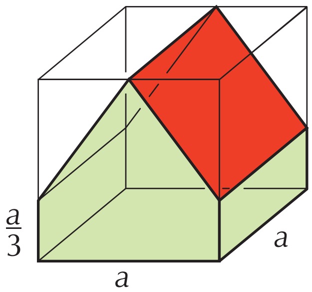




3. Egységkockákból egyrétegű „lyukas falat” építünk, majd szintén egységkockákból elkészítjük az építményeket. Válaszd ki, hogy mely építmények férnek át a „lyukon”! Az építmények tetszés szerint forgathatók.



4. Egy 6 cm élű tömör kockából az ábrán látható módon levágunk két hasábot. Milyen határolólapjai lesznek az új testnek. Mekkora a házikó tetejének területe? Milyen hosszú az élváza? (Élváz hossza: az élek hosszának az összege)



5. Két egybevágó szabályos tetraédert egyik lapjuknál összeragasztunk, így egy kettős gúlát kapunk. Rajzold le az új test hálóját!

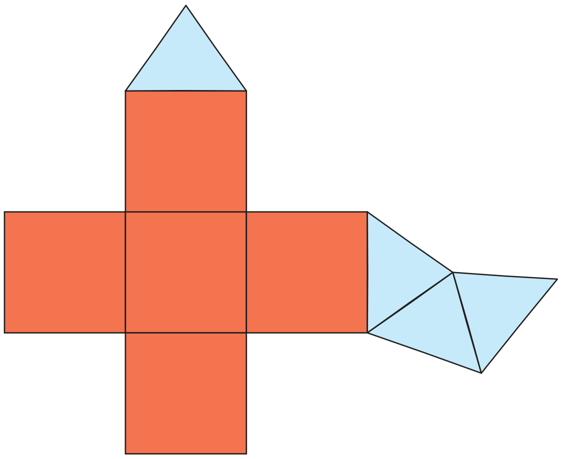
6. Készítsd el olyan egyenlő élű szabályos gúláknak a hálóját, melyek alaplapja

a) szabályos háromszög
b) négyzet
c) szabályos ötszög
d) szabályos hatszög!

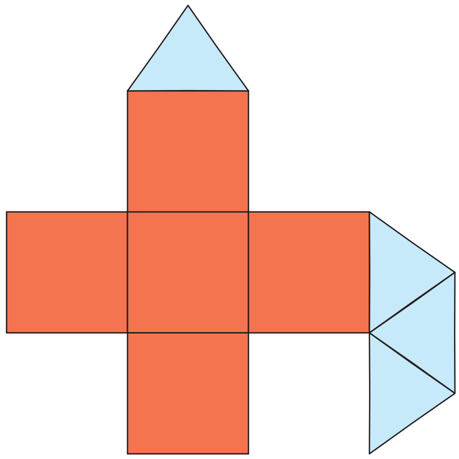
Vizsgáld meg lehet-e mindegyikből gúlát készíteni!

7. Az ábrán látható alakzatokból válaszd ki azt, amelyből testet lehet építeni! Jellemezd a testet! Hány éle van az elkészített testnek? Azonos színnel jelöld meg a test hálóján azokat a szakaszokat, amelyek mentén összeragasztva, valóban az általad mondott testet kapjuk!

a)



b)



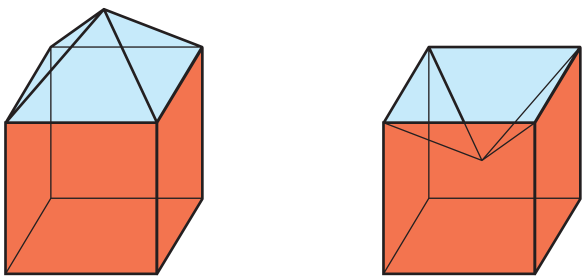
8. Négy darab egybevágó egyenlőszárú háromszögből készítsd el egy háromszög alapú gúla különböző hálóit! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba. Keress olyan 4 db egyenlő szárú háromszögből álló sokszögeket is, amelyekből nem készíthető háromszög alapú gúla!

9. Négy darab egybevágó egyenlőszárú, derékszögű háromszögből készítsd el egy háromszög alapú gúla különböző hálóit! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba.

10. Hat darab egybevágó szabályos háromszögből, egy-egy oldaluk egymáshoz illesztésével sokszögeket készítünk. Hány különböző sokszög létezik? Ezek közül hány olyan van, amely kettős gúla hálója? (Azokat tekintjük különböző sokszögeknek, amelyek semmilyen mozgatással nem hozhatók fedésbe.)

11. Egy 10 cm élű tömör kocka egyik lapjára kétféleképpen illesztünk egy 5 cm magasságú szabályos négyoldalú gúlát. Az egyik esetben hozzáragasztjuk, másikban pedig kivágjuk belőle a gúlát.

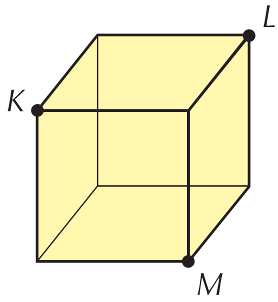
a) Rajzold le a keletkezett új testek hálóját!
b) Hasonlítsd össze a két új test felszínét!
c) Mindkét esetben számítsd ki az új test és a kocka térfogatának arányát!



12. Kösd össze egy 8 cm élű fakocka szomszédos éleinek felezőpontjait, és ezekre a pontokra fektetett síkkal vágd le a kocka sarkait! Milyen sokszögek határolják az új testet? Hány csúcsa, éle és lapja van? Rajzold le a hálóját! Rajzold le egy levágott gúla hálóját is!

13. Egy 9 cm élű tömör kocka éleinek harmadoló pontjait megjelöljük. Egy csúcsába összefutó éleinek, a nevezett csúcshoz közelebbi harmadoló pontjaira fektetett síkkal kocka sarkait levágjuk. Milyen határoló lapjai lesznek a megmaradt testnek? Rajzold le a hálóját! Igaz-e, hogy az új testet is szabályos sokszögek határolják?

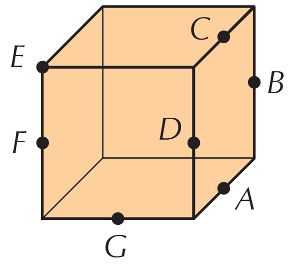
14. Egy fából készült kockát az ábrán megjelölt három csúcspontjára fektetett síkkal két részre vágjuk. Rajzold le a keletkezett két test hálóját, majd a hálón a vágás menti éleket jelöld meg színessel!



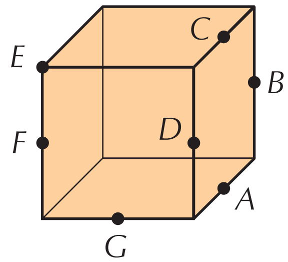
15. Tükrözzük a kockát kifelé minden lapjára! Hány határolólapja lesz az így keletkezett testnek? Az új test térfogata hányszorosa az eredeti kocka térfogatának? Rajzold le a hálóját! Az új test felszíne hányszorosa az eredeti kocka felszínének?

9–10. ÉVFOLYAM

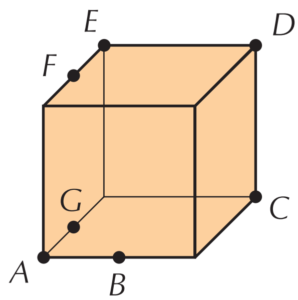
1. Egy kocka élein megjelöltünk néhány pontot.
a) Keress olyan pontnégyeseket, amelyek egy síkban vannak!
b) Keress olyan pontnégyeseket, amelyek nincsenek egy síkban!



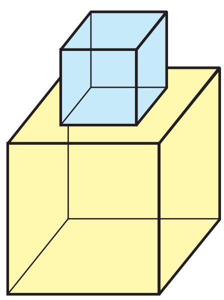
2. Egy kocka élein megjelöltünk néhány pontot. Milyen háromszöget határoznak meg a felsorolt ponthármasok: *BCD, BFD, FGC, ACE, GBE?* Határozd meg a háromszögek oldalait!



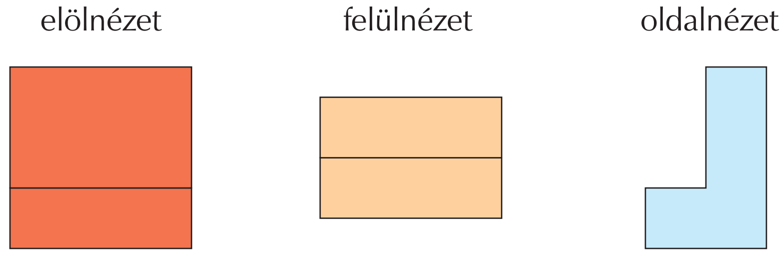
3. Egy kocka élein megjelöltünk néhány pontot. Válaszd ki azokat a pontokat, amelyek téglalapot, paralelogrammát, trapézt, illetve deltoidot határoznak meg!



4. Egy 8 cm kockára, az ábrán látható módon, egy 4cm élűt ragasztunk. Állapítsd meg, hogy a kapott testnek milyen új határolólapjai keletkeztek! Hány lapja éle és csúcsa van az új testnek? Érvényes-e erre az új testre az Euler-tétel? (lap+csúcs=él+2)

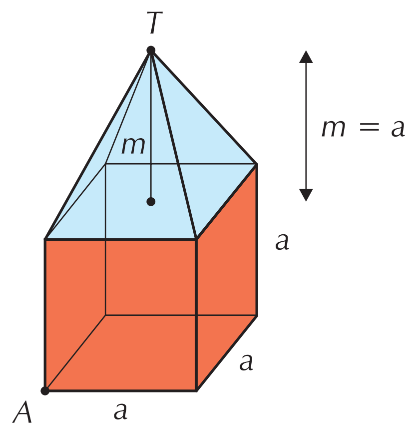


5. Rajzold le azt a testet, amelynek elölnézete, felülnézete és oldalnézete az ábrán látható!



6. Egységkockákból 3 cm élű tömör kockát építünk. Mennyivel változik a kocka felszíne, ha
a) Minden csúcsánál kiemelünk egy-egy egységkockát,
b) Minden élének középső egységkockáját emeljük ki,
c) Minden lapjának középső egységkockáját emeljük ki.

7. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára olyan 10 cm magasságú szabályos négyoldalú gúlát ragasztunk, amelynek alaplapja egybevágó a kocka lapjával. Keresd meg a T csúcsból az A csúcsba vezető legrövidebb utat, ha a test
a) élein,
b) belsejében haladhatunk!



8. a) Egy a élű kocka minden lapjára kifelé egy-egy a/2 magasságú szabályos négyoldalú gúlát ragasztunk. A gúla alaplapja egybevágó a kocka lapjával. Hányszorosára változik a kocka térfogata?
b) Hányszorosára változik a kocka térfogata, ha ilyen gúlákat vágunk ki a kocka minden lapjánál?

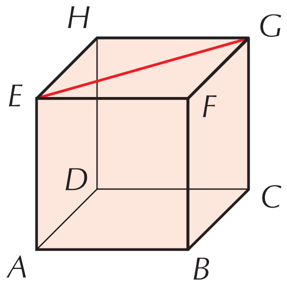
9. Megrajzoltuk a kocka szemközti lapjainak középpontján átmenő egyik forgástengelyét. Mekkora az a szög, amely a kockát, a megjelölt tengely körül elforgatva önmagába viszi át? ($0° < \alpha < 360°$)

10. Megrajzoltuk a kocka egyik lapátlóját. A végpontok megjelölésével sorold fel

a) az ezt metsző lapátlókat,

b) az ezzel kitérő lapátlókat!

Mekkora szöget zárnak be ezek a lapátlók az eredetivel?



11. Jelöljük meg a kocka lapközéppontjait.

a) Milyen test csúcspontjai ezek a pontok?

b) Állításodat igazold!

12. Milyen testet határoznak meg a szabályos tetraéder lapközéppontjai? Állításodat igazold!

13. Milyen testet határoznak meg a szabályos tetraéder élfelező pontjai?

14. Szabályos háromszög alapú egyenlő élű egyenes hasáb lapközéppontjai milyen testet határoznak meg? Szabályos-e ez a test?

15. Kösd össze a szabályos oktaéder szomszédos lapjainak középpontjait! Milyen testet határoznak meg ezek az élek?

11–12. ÉVFOLYAM

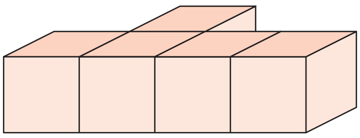
1. Egységkockákból 3 cm élű tömör kockát építünk. Mennyivel változik a kocka felszíne, ha
a) egy szemközti lappárjának középső kockáinál, a lapra merőlegesen a kockát kifúrjuk?
b) két szemközti lappárjának középső kockáinál, a lapra merőlegesen a kockát kifúrjuk?
c) három szemközti lappárjának középső kockáinál, a lapra merőlegesen a kockát kifúrjuk?

2. Egy kocka csúcsain hány olyan sík fektethető, amely pontosan három kockacsúcson halad át? Sorold fel a különböző ponthármasokat! Milyen síkidomot metszenek ki ezek a síkok a kockából?

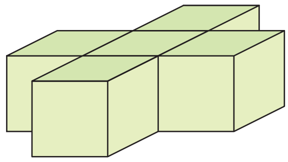
3. Hány forgástengelye van egy kockának? A forgástengelyek típusai szerint állapítsd meg, hogy a kockának arra a tengelyre nézve hány fokos forgásszimmetriája van! ($0^\circ<\alpha<360^\circ$)

4. Öt-öt egységkockából készítettük az ábrán látható két különböző építményt. Ilyenek felhasználásával készítsd el a lehető legkisebb tömör kockát!

a)



b)



5. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle **a**. A hasábba gömb írható. Mekkora a beírt gömb sugara?

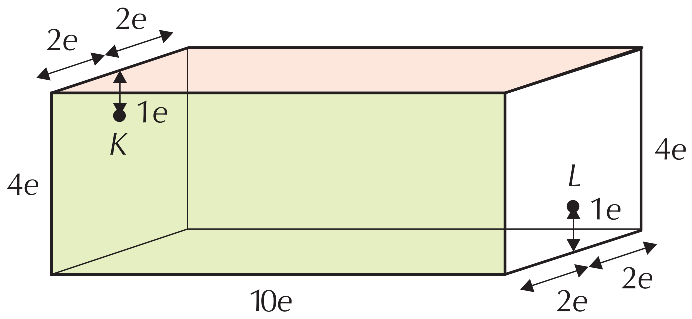
6. Egy háromszög alapú egyenes hasáb minden éle egyenlő, a köréírható gömb sugara ***r***. Mekkora a hasáb magassága?

7. Egy a élű kocka minden lapjára kifelé egy – a kocka lapjával egybevágó alapú – négyoldalú szabályos gúlát illesztünk. Mekkora lehet a gúlák magassága, ha kapott új test
a) konvex b) konkáv?

8. Egy a élű kocka minden lapjára kifelé egy – a kocka lapjával egybevágó alapú – négyoldalú szabályos gúlát illesztünk. A gúla oldallapjának az alaplappal bezárt szöge 45°. Jellemezd az így kapott testet!
Milyen határolólapjai vannak?
Hány éle, lapja csúcsa van?
Mekkora a test egy éle?
Mekkora a szomszédos élek szöge?

9. Határozd meg az előző feladatban előállított rombikus dodekaéder lapszögét!

10. Egy téglatest élei 4, 4, és 10 egység hosszúak. Két lapján, az ábra szerint megjelöltük a K és az L pontokat. A téglatest felületén mozogva, a megjelölt pontokat összekötő utak között létezik-e 14 egységnél rövidebb?



11. Igazold, hogy a kocka síkmetszete lehet
a) szabályos háromszög,
b) egyenlőszárú, de nem szabályos háromszög,
c) nem speciális háromszög!

12. Igazold, hogy egy kocka síkmetszete lehet
a) trapéz,
b) paralelogramma,
c) deltoid!

Mindhárom esetben speciálistól különböző négyszögeket keresünk.

13. Igazold, hogy a tetraédert lehet paralelogrammában metszeni!
Különböző tetraéderek esetén milyen lehet ez a paralelogramma?

14. Lehet-e egy kocka síkmetszete ötszög vagy hatszög? Hatszög esetében bizonyítsd be, hogy mikor kaphatunk szabályos hatszöget!

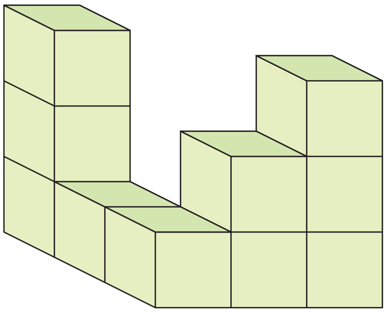
15. Lehet-e egy szabályos oktaédert szabályos hatszögben metszeni?

FELADATOK MEGOLDÁSA

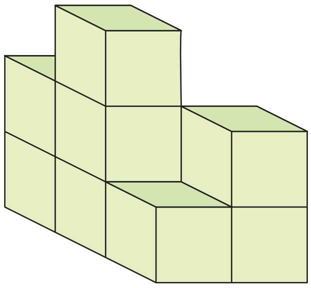
5–6. ÉVFOLYAM

1. Egységkockákból készített építmények rajzát látod az ábrán. Készítsd el ezek alaprajzát!

a)

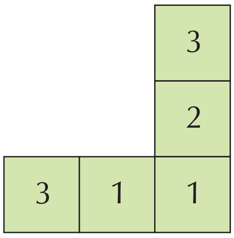


b)

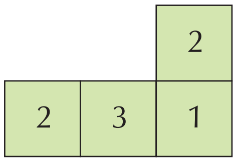


Megoldás

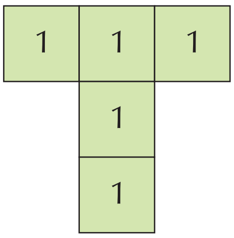
a)

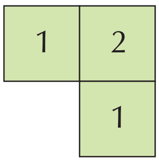


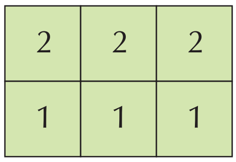
b)



2. Az ábrán térbeli építmények alaprajzát látod.
a) Az alaprajzból állapítsd meg, hogy az építményhez összesen hány kockát használtunk?
b) Rajzold le az építményt!
c) Határozd meg, hogy az egységkockákból összeállított testek felszíne hány egységnégyzet?



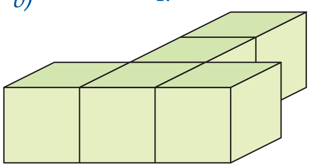




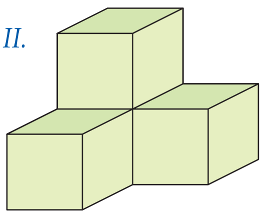
Megoldás

a) I. 5 db
II. 4 db
III. 9 db egységkockát használtunk

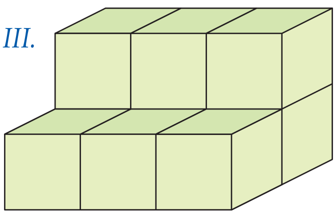
b) *I.*



II.



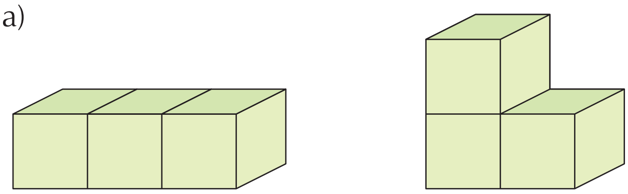
III.



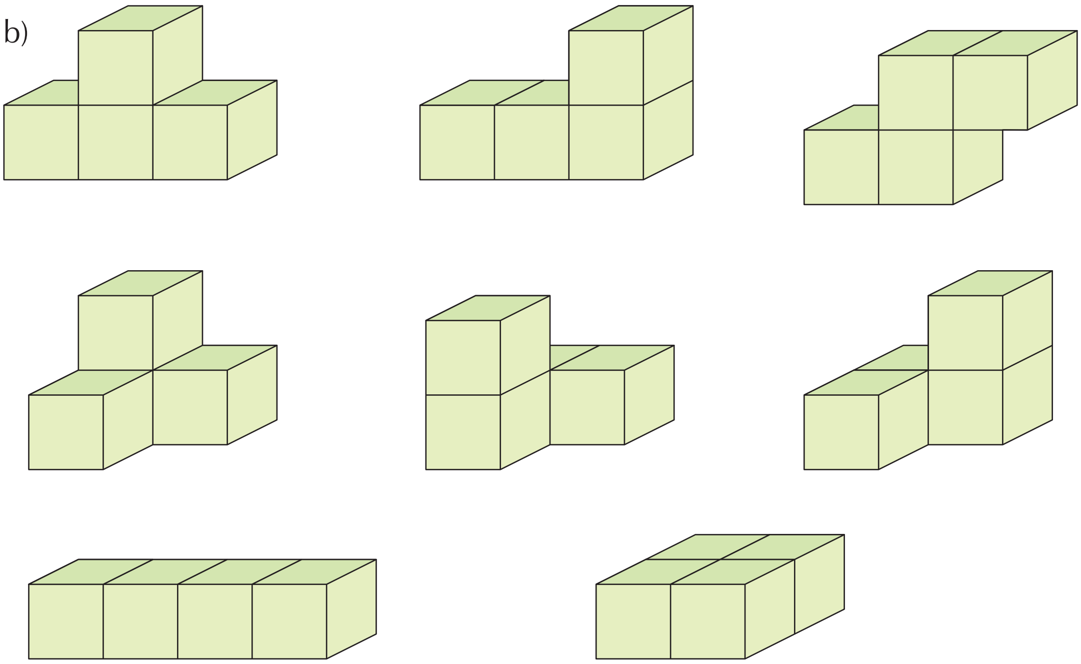
c) *I.* $A_a = 28\ e^2$ *II.* $A_b = 18\ e^2$ *III.* $A_c = 30\ e^2$

3. Készíts különböző építményeket
a) három, b) négy darab egységkockából!
(Különbözőnek tekintünk két építményt, ha semmilyen mozgatással nem hozhatók fedésbe egymással.) Hányat találtál?

a)

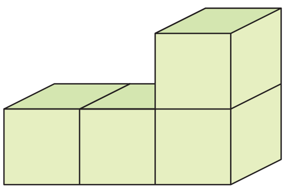


b)

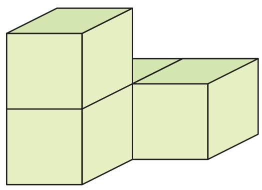


4. Rajzold le a következő ábrán látható építmények elölnézetét, felülnézetét és oldalnézetét!

a)

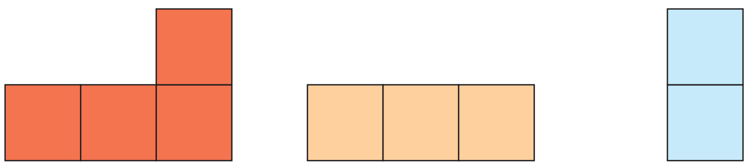


b)

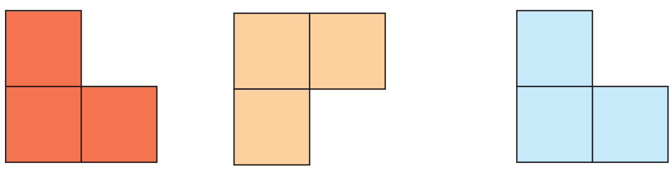


Megoldás

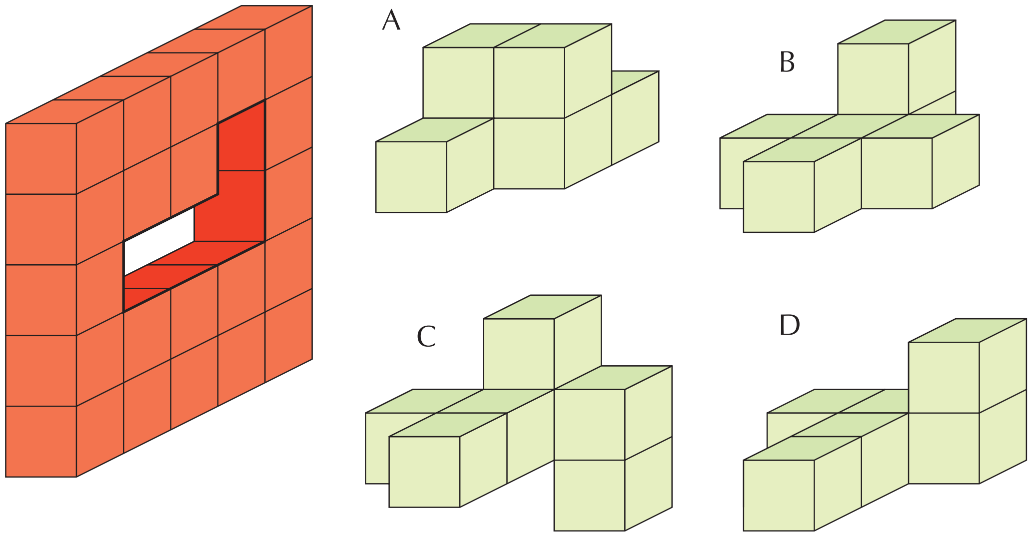
a) elölnézet felülnézet oldalnézet



b)



5. Egységkockákból egy „lyukas falat” építünk, majd szintén egységkockákból elkészítjük az építményeket. Válaszd ki, hogy mely építmények férnek át a „lyukon”! Az építmények tetszés szerint forgathatók.



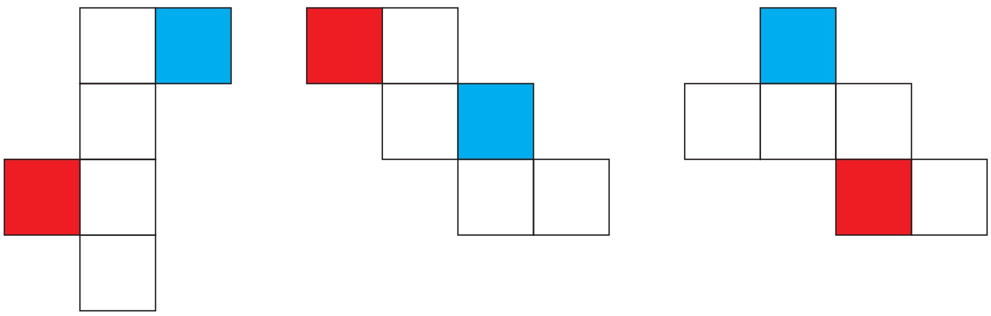
Megoldás

Rajzold le az alakzatok oldalnézetét és győződj meg róla, hogy megfelelő forgatással, melyik vetület lehet egybevágó a falon található réssel.

A résen a ***B*** *és a* ***D*** *építmény fér át.*

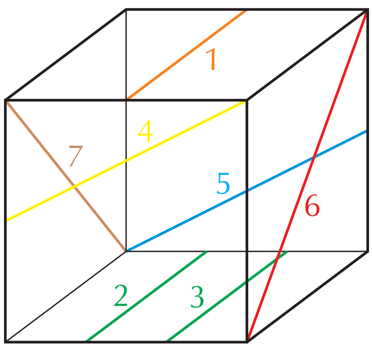
6. Egy kocka két szemközti lapja közül az egyiket pirosra, a másikat kékre festettük. A lerajzolt hálókon az egyiket megjelöltük. Válaszd ki, hogy melyik lehet a második színezett lap!

Megoldás

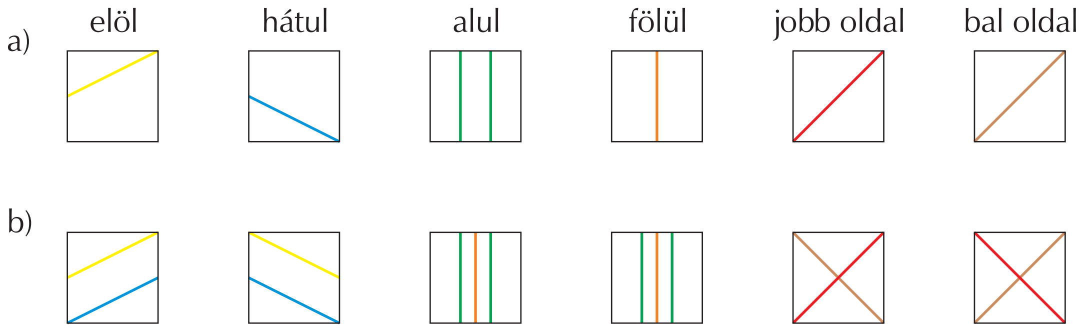


7. a) Fehér kartonból készült kocka lapjain hét színes szakaszt jelöltünk ki. Rajzold le, mit látsz, ha a kockát elölről, hátulról, alulról, fölülről, jobboldalról, illetve baloldalról nézed!

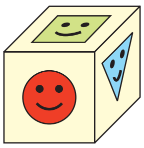
b) Rajzold le ezeket a nézeteket, ha a kocka átlátszó fóliából készült, és ugyanezek a színes szakaszok vannak rajta kijelölve!



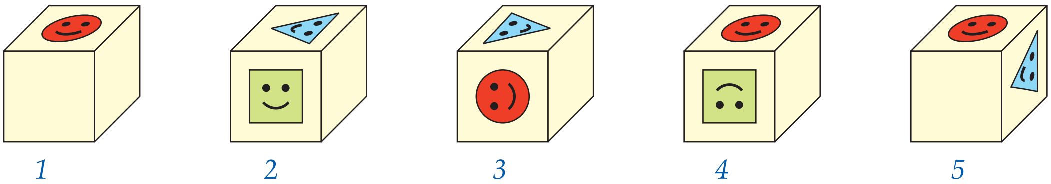
Megoldás



8. Fehér kartonból készült kocka három lapjára az ábrán látható módon különböző figurákat rajzoltunk, a többi lapját üresen hagytuk. Az alatta lévő öt kocka közül, melyik az, amely ugyanezt a kockát ábrázolja, csak más helyzetben?

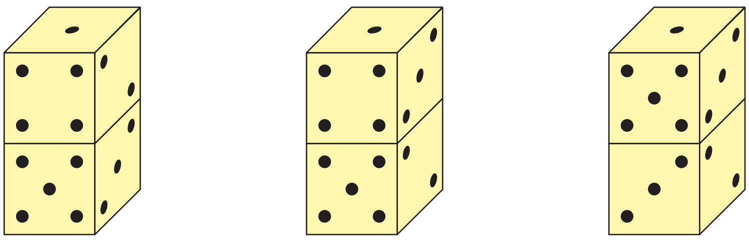


Megoldás



A 3. és az 5. kocka ugyanaz.

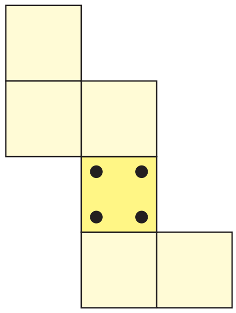
9. Szabályos egy dobókocka, ha a szemközti lapjain lévő pontok összege 7. Két szabályos dobókockát a 6-os lapjuknál összeragasztunk. Az alábbi ábrák közül melyik lehet helyes?



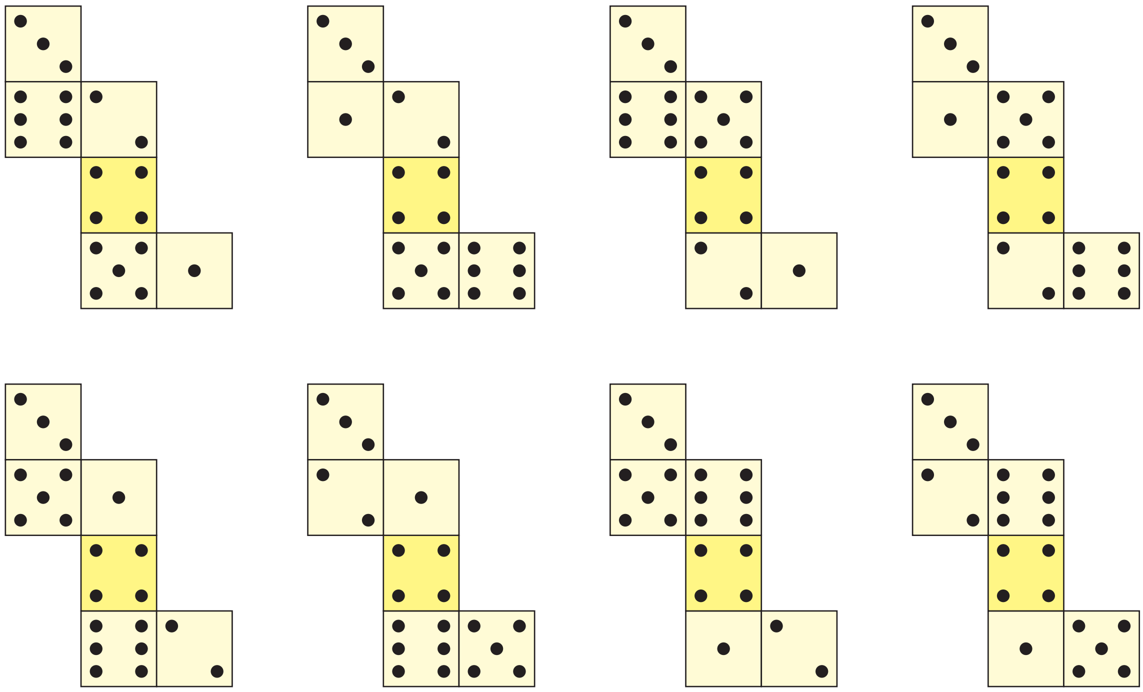
Megoldás

Az 1. és a 3. lehet jó. (A „lehet" szó arra utal, hogy az ábrán a kocka hátsó lapjait nem látjuk)

10. Szabályos egy dobókocka, ha a szemközti lapjain lévő pontok összege 7. Az ábrán lévő egyik lap pontszámát megadjuk. Hányféle kitöltés lehetséges, ha szabályos dobókockát szeretnénk kapni? Helyezd el a pöttyöket a kocka kiterített hálóján!



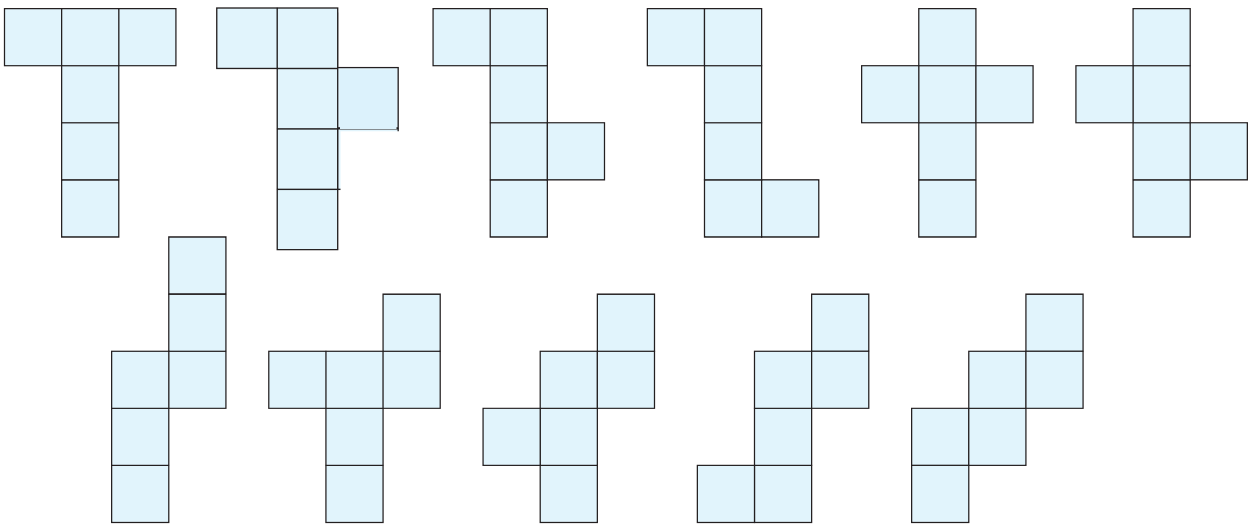
Megoldás



11. a) Hat db egybevágó négyzetből készítsd el a kocka összes lehetséges hálóját! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba.
b) Keress olyan 6 db négyzetből álló sokszögeket is, amelyekből nem készíthető kocka!

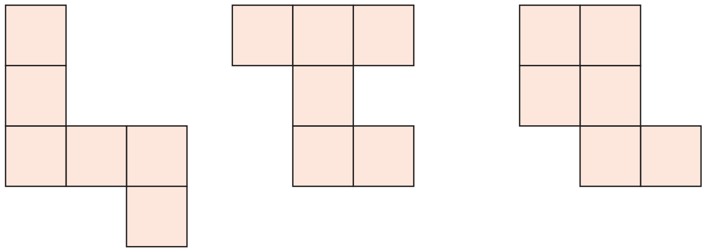
Megoldás

a)



Tizenegy különböző kockaháló létezik.

b)

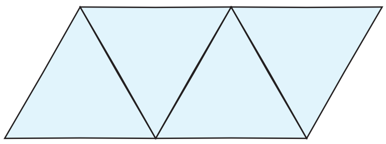


Például ezekből nem lehet kockát építeni.

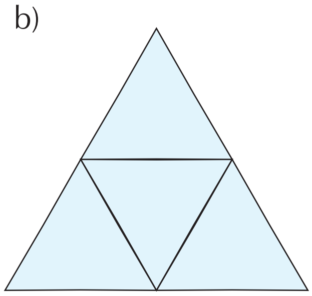
12. Négy darab egybevágó szabályos háromszögből készítsd el a szabályos tetraéder különböző hálóit! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba. Keress olyan 4 db szabályos háromszögből álló sokszöget is, amelyekből nem készíthető szabályos tetraéder!

Megoldás

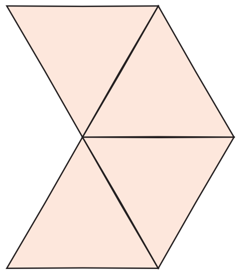
a)



b)



c)



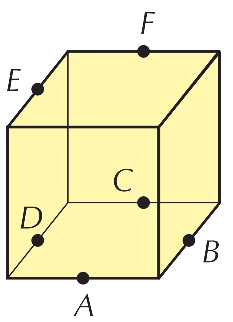
Szabályos tetraéder hálója: a) b)
Nem lehet szabályos tetraéder hálója: c)

13. Nyolc darab b 1 cm élű kocka lapjait színezzük. Minden egyes lapot pirosra, vagy kékre. Hogyan tehetjük meg ezt, hogy a nyolc kiskockából akár piros, akár kék színű 2 cm élű kockát össze tudjunk rakni?

Megoldás

Mivel minden kiskocka a nagyobb kocka sarkában van, tehát mindegyiknek három lapja látható, ezért a kiskockák három egymásra páronként merőleges lapjait pirosra, a másik hármat kékre kell festeni.

14. A kocka élein megjelölt pontok élfelező pontok. Milyen háromszöget határoznak a felsorolt csúcspontok? *ABC, BDF, ABE, BDE*

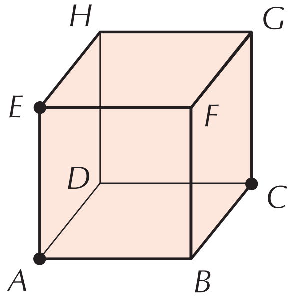


Megoldás

Az ABC háromszög egyenlőszárú, derékszögű,
A BDF háromszög egyenlő szárú,
Az ABE háromszög „általános" (oldalainak hossza különböző),
A BDE háromszög egyenlőszárú, derékszögű.

15. Hány olyan derékszögű háromszög létezik, amelynek csúcsait egy adott kocka csúcsai közül választjuk. A kocka csúcsait jelöljék az ABCDEFGH nagybetűk.

Megoldás



Első típusba soroljuk azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek befogói egy-egy kockaoldallal egyenlők, átfogója pedig egy lapátló. (Pl.: BFG háromszög) Ezekből minden lapon négy darab van. Hat lapon, összesen 24 ilyen háromszög van.

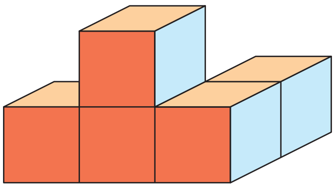
Második típusba azokat a derékszögű háromszögeket soroljuk, amelyek egyik befogója egy kockaoldal, másik befogója egy lapátló, átfogója pedig egy testátló. (Pl.: ACE háromszög) Minden testátlóhoz, a végpontjaikon kívüli hat pontot tudjuk hozzárendelni, ezek hat különböző háromszöget határoznak meg. Mivel négy testátló van, összesen 24 ilyen típusú háromszög van.

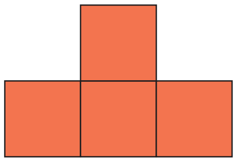
Összesen tehát 48 db ilyen háromszög létezik.

7–8. ÉVFOLYAM

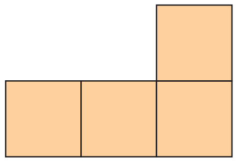
Példa

Egységkockákból álló építményeink három, egymásra páronként merőleges határoló lapjaival állítsunk párhuzamos síkokat! Az építményeknek, ezekre a síkokra eső merőleges vetületeit nevezzük elölnézetnek, felülnézetnek és oldalnézetnek. Az oldalnézetet – megállapodás szerint – a jobb oldali nézetet jelenti. (Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy ezeket a vetületeket látjuk, ha az építményre a megadott irányokból merőlegesen ránézünk.)

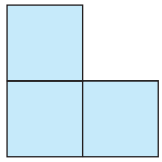




elölnézet



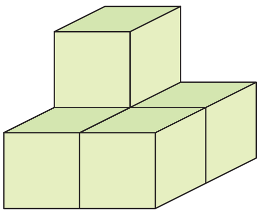
felülnézet



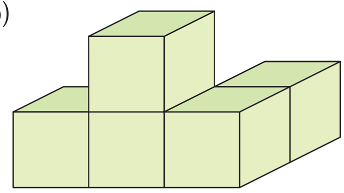
oldalnézet

1. Rajzold le az ábrán látható, öt egységkockából álló építmények elölnézetét, felülnézetét és oldalnézetét!

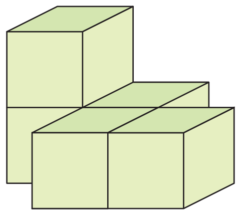
a)



b)

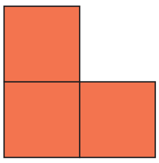


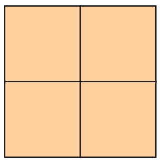
c)

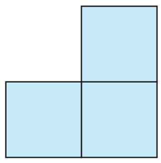


Megoldás

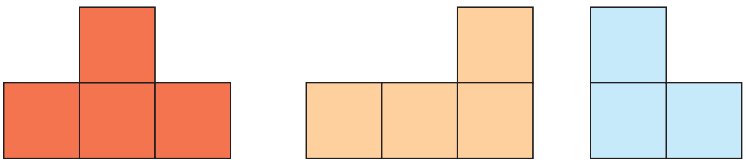
a) elölnézet felülnézet oldalnézet



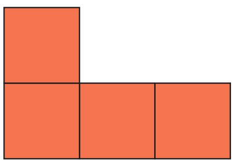


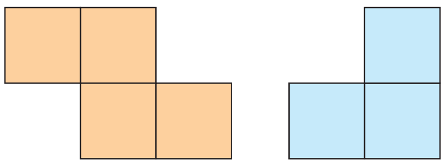


b)



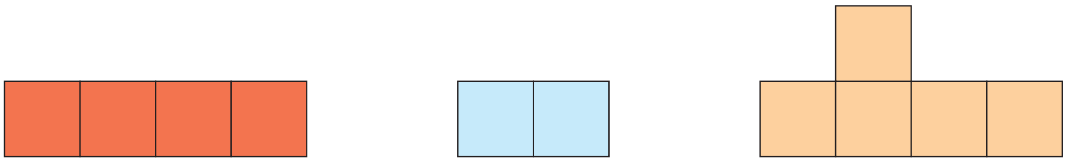
c)



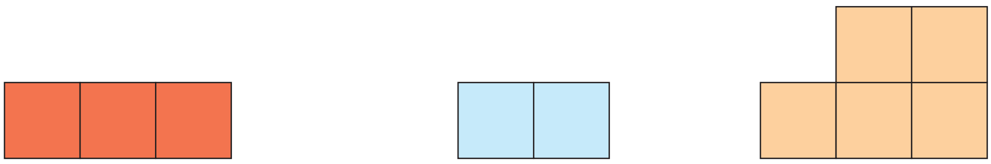


2. Öt egységkockából olyan építményeket készítettünk, amelyeknek három különböző nézete az ábrán látható. Rajzold le a térbeli ábráját!

a) elölről oldalról felülről

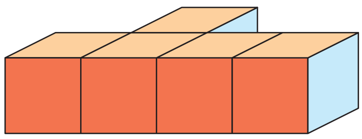


b)

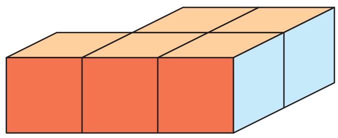


Megoldás

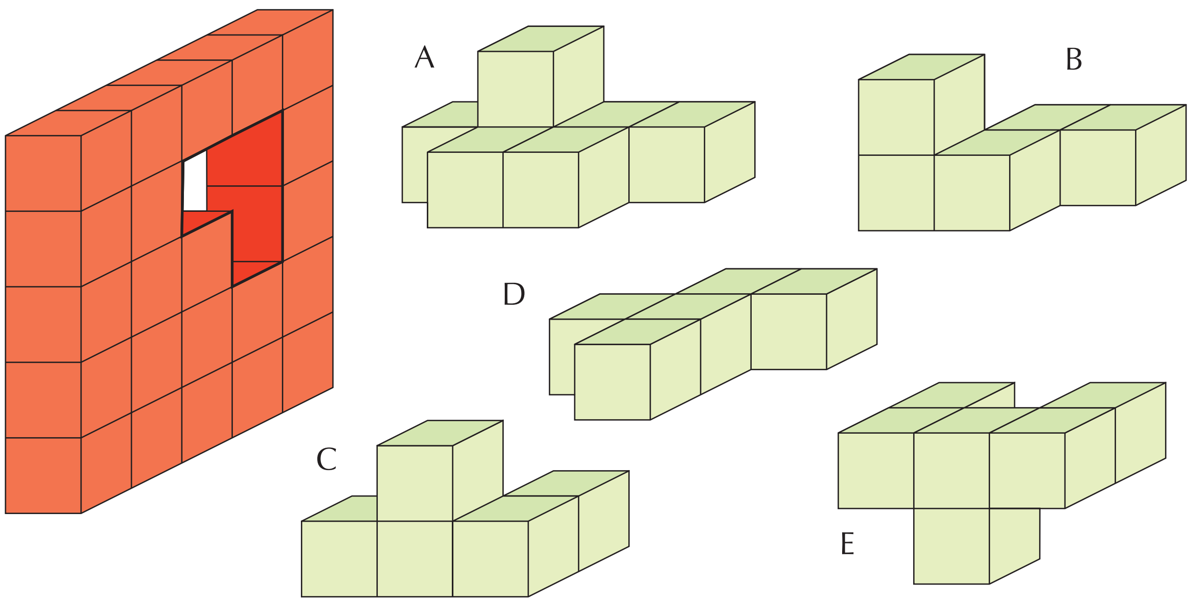
a)



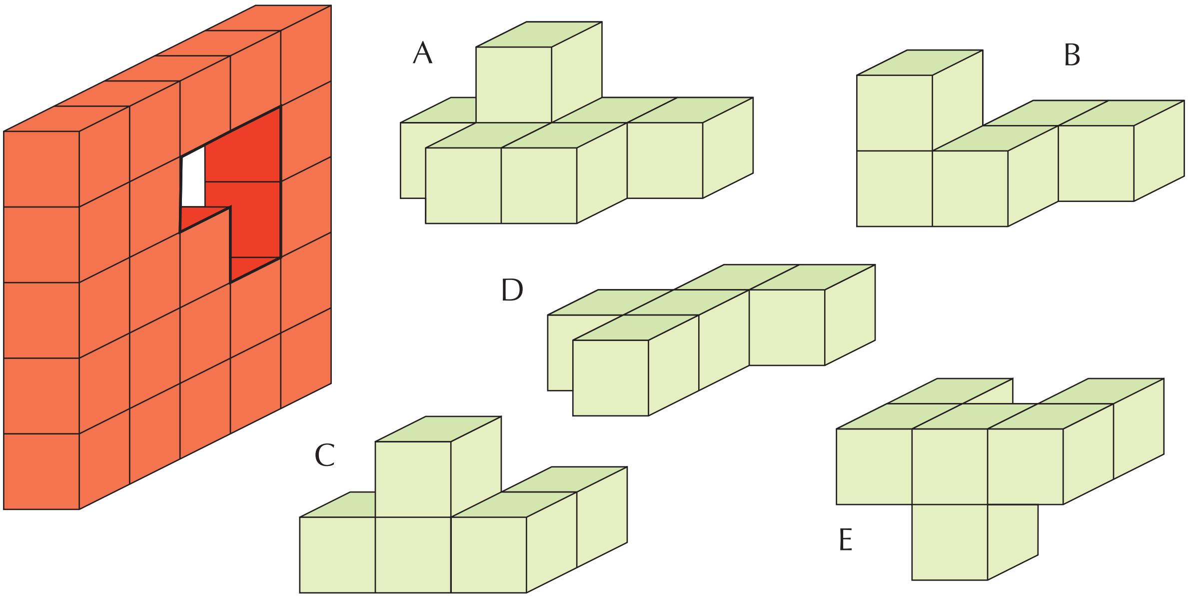
b)



3. Egységkockákból egyrétegű „lyukas falat” építünk, majd szintén egységkockákból elkészítjük az építményeket. Válaszd ki, hogy mely építmények férnek át a „lyukon”! Az építmények tetszés szerint forgathatók.



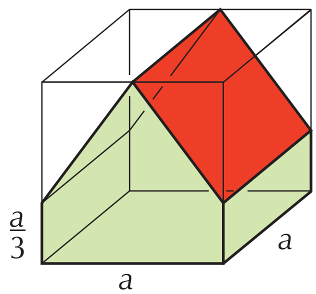
Megoldás



Rajzold le az alakzatok oldalnézetét és győződj meg arról, (szükség esetén a vetület megfelelő forgatásával) hogy melyik alakzat fér át a falon lévő résen.

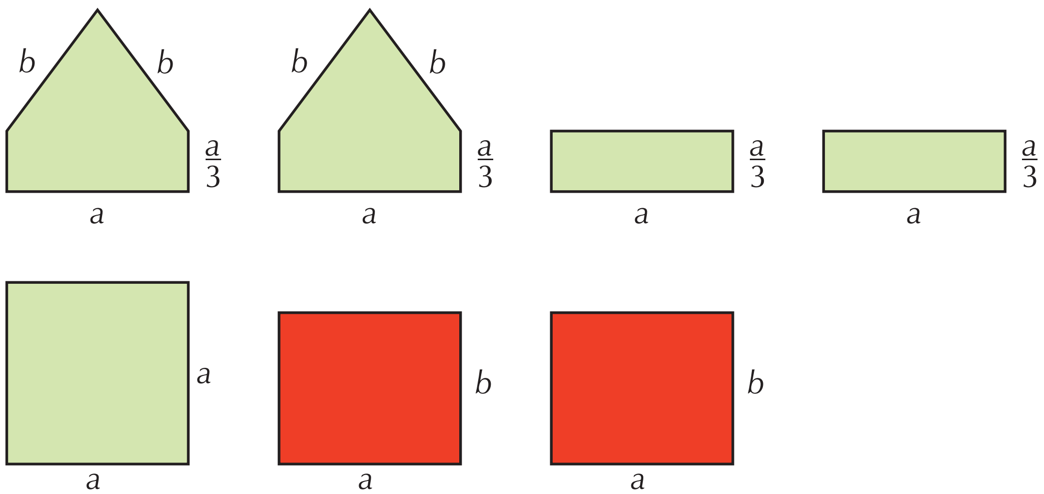
A résen az ***A,B,C,E*** *építmények férnek át, a* ***D*** *nem.*

4. Egy 6 cm élű tömör kockából az ábrán látható módon levágunk két hasábot. Milyen határolólapjai lesznek az új testnek. Mekkora a házikó tetejének területe? Milyen hosszú az élváza? (Élváz hossza: az élek hosszának az összege)

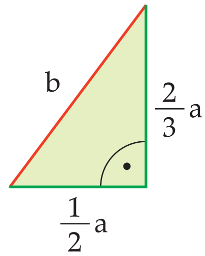


Megoldás

A határolólapok az ábrán láthatók.



A tető területéhez meg kell határozni a b oldalt.



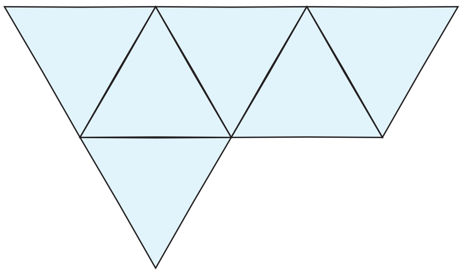
$\frac{1}{2}\cdot a=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ $\frac{2}{3}\cdot a=\frac{2}{3}\cdot 6=4$

A két befogó hossza 3cm és 4 cm. Ekkor az átfogó b=5 cm, a Pitagorász tétel miatt.
A tető területe: T= 2 · 6 · 5 = 60 (cm²)
Az élváz hossza: L= 7 · 6 + 4 · 2 + 4 · 5 = 70 (cm)

5. Két egybevágó szabályos tetraédert egyik lapjuknál összeragasztunk, így egy kettős gúlát kapunk. Rajzold le az új test hálóját!

Megoldás

Például:

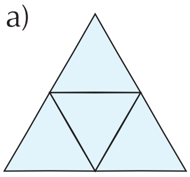


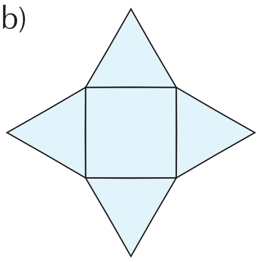
Lásd 10. feladatot.

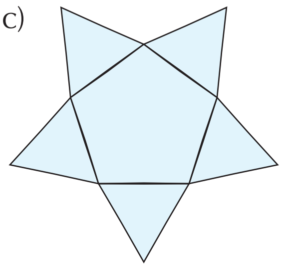
6. Készítsd el olyan egyenlő élű szabályos gúláknak a hálóját, melyek alaplapja
a) szabályos háromszög
b) négyzet
c) szabályos ötszög
d) szabályos hatszög!

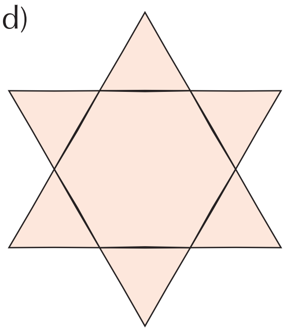
Vizsgáld meg lehet-e mindegyikből gúlát készíteni!

Megoldás

a)


b)


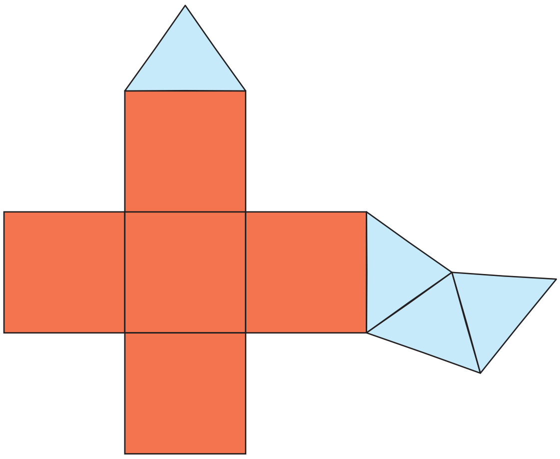
c)


d)


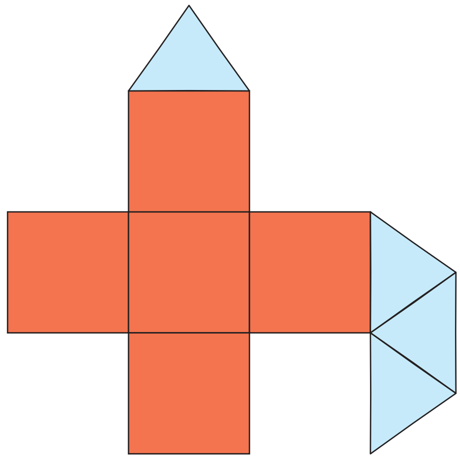
Az a), b), c) hálókból készíthető gúla, a d) - ből nem.

7. Az ábrán látható alakzatokból válaszd ki azt, amelyből testet lehet építeni! Jellemezd a testet! Hány éle van az elkészített testnek? Azonos színnel jelöld meg a test hálóján azokat a szakaszokat, amelyek mentén összeragasztva, valóban az általad mondott testet kapjuk!

a)



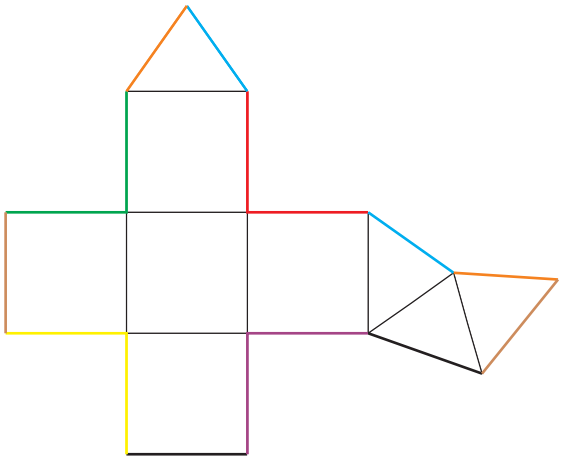
b)



Megoldás

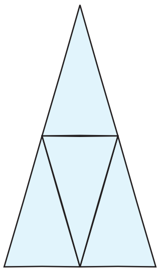
a) Kockán egy négyoldalú szabályos gúla hálója. A testnek 16 éle van.

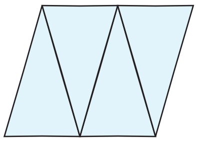
b) Semmilyen testet nem lehet készíteni az alakzatból.

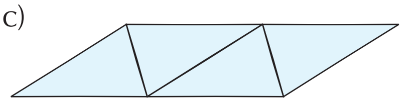


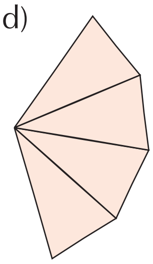
8. Négy darab egybevágó egyenlőszárú háromszögből készítsd el egy háromszög alapú gúla különböző hálóit! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba. Keress olyan 4 db egyenlő szárú háromszögből álló sokszögeket is, amelyekből nem készíthető háromszög alapú gúla!

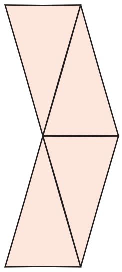
Megoldás

a)


b)


c)


d)


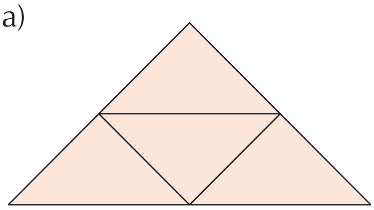
e)


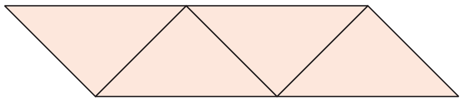
Gúla hálója: a) b) c)

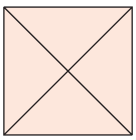
Nem lehet gúla hálója: d) e)

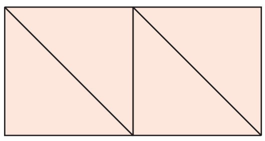
9. Négy darab egybevágó egyenlőszárú, derékszögű háromszögből készítsd el egy háromszög alapú gúla különböző hálóit! Azokat a hálókat tekintjük különbözőnek, amelyek semmilyen mozgatással nem vihetők egymásba.

Megoldás

a)


b)


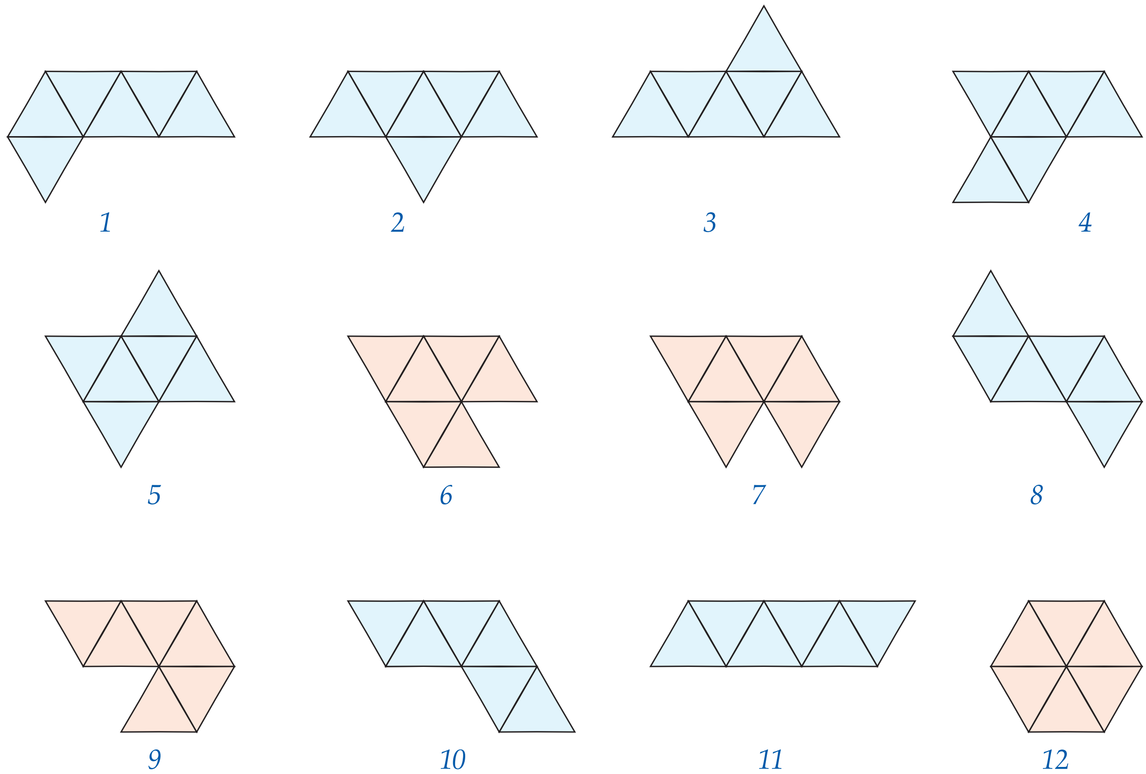
c)


d)


Az ábrán látható alakzatok egyikéből sem lehet gúlát készíteni. Általában igaz, hogy négy derékszögű háromszögből nem lehet gúlát készíteni.

10. Hat darab egybevágó szabályos háromszögből, egy-egy oldaluk egymáshoz illesztésével sokszögeket készítünk. Hány különböző sokszög létezik? Ezek közül hány olyan van, amely kettős gúla hálója? (Azokat tekintjük különböző sokszögeknek, amelyek semmilyen mozgatással nem hozhatók fedésbe.)

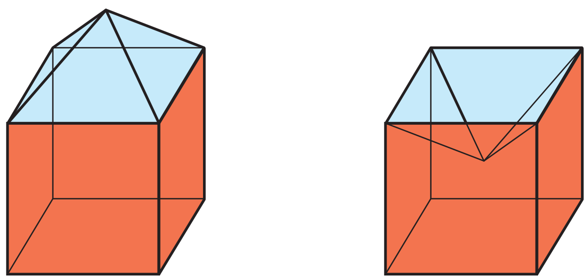
Megoldás



Tizenkét különböző sokszöget lehet készíteni.
Ezek közül kettős gúla hálója lehet: 1,2,3,4,5,8,10,11.

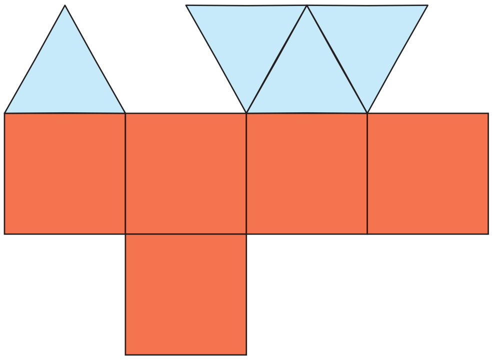
11. Egy 10 cm élű tömör kocka egyik lapjára kétféleképpen illesztünk egy 5 cm magasságú szabályos négyoldalú gúlát. Az egyik esetben hozzáragasztjuk, másikban pedig kivágjuk belőle a gúlát.

a) Rajzold le a keletkezett új testek hálóját!
b) Hasonlítsd össze a két új test felszínét!
c) Mindkét esetben számítsd ki az új test és a kocka térfogatának arányát!



Megoldás

d) *Mindkét testnek ugyanaz a hálója.*



e) *A két test felszíne azonos, mert ugyanazok a határolólapjaik.*

f) *Az első esetben a térfogat:*

$$V_1 = 10^3 + \frac{10^3}{6} = \frac{7}{6}\cdot 10^3 = \frac{7}{6}V_k \quad \text{tehát} \quad \frac{V_1}{V_k} = \frac{7}{6}$$

A második esetben a térfogat:

$$V_2 = 10^3 - \frac{10^3}{6} = \frac{5}{6}\cdot 10^3 = \frac{5}{6}V_k \quad \text{tehát} \quad \frac{V_2}{V_k} = \frac{5}{6}$$

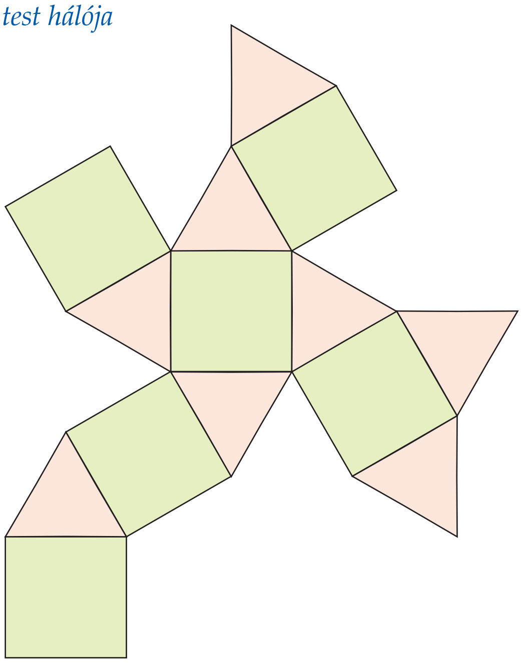
12. Kösd össze egy 8 cm élű fakocka szomszédos éleinek felezőpontjait, és ezekre a pontokra fektetett síkkal vágd le a kocka sarkait! Milyen sokszögek határolják az új testet? Hány csúcsa, éle és lapja van? Rajzold le a hálóját! Rajzold le egy levágott gúla hálóját is!

Megoldás

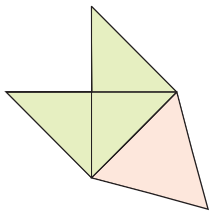
Az új testet 8 szabályos háromszög és 6 négyzet határolja, mert minden levágott csúcsnál egy-egy szabályos háromszög, és minden lapnál egy-egy négyzet keletkezik.

Az új testnek, 12 csúcsa, 24 éle és 14 lapja van.

A test hálója



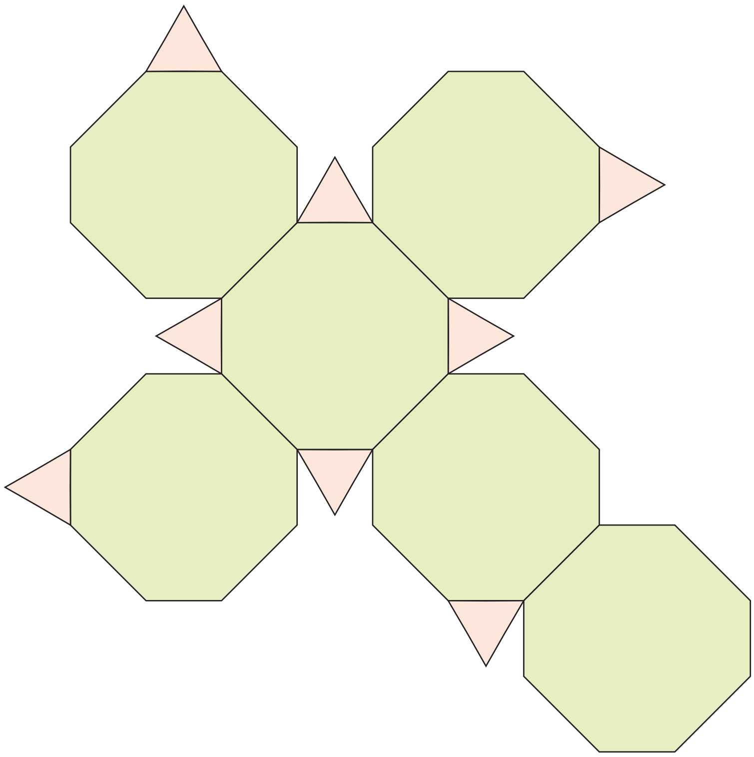
A levágott gúla hálója



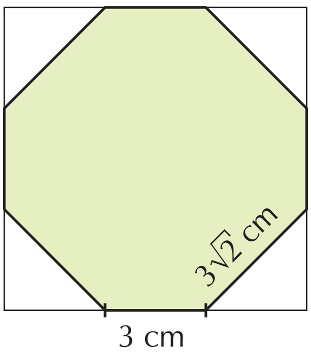
13. Egy 9 cm élű tömör kocka éleinek harmadoló pontjait megjelöljük. Egy csúcsába összefutó éleinek, a nevezett csúcshoz közelebbi harmadoló pontjaira fektetett síkkal kocka sarkait levágjuk. Milyen határoló lapjai lesznek a megmaradt testnek? Rajzold le a hálóját! Igaz-e, hogy az új testet is szabályos sokszögek határolják?

Megoldás

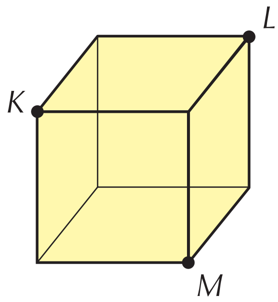
Az új testet 8 szabályos háromszög és 6 nyolcszög határolja, mert minden levágott csúcsnál egy-egy háromszög, és minden lapnál egy-egy nyolcszög keletkezik.



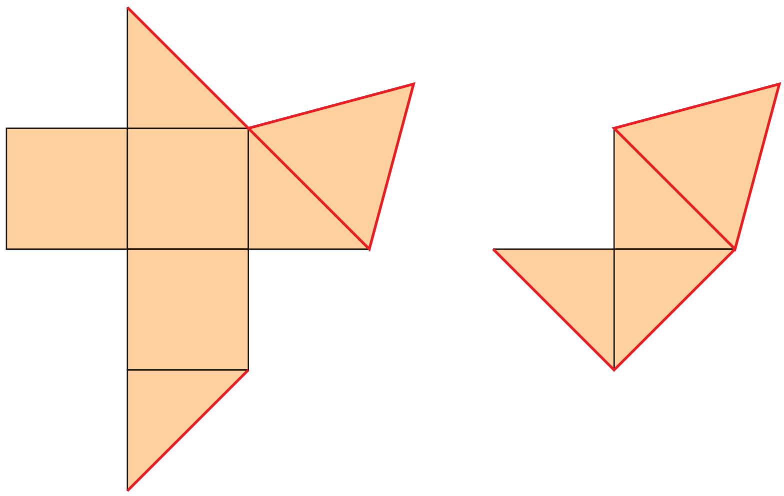
A határolólapok között a háromszögek szabályosak, mert oldalaik $3 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszúak. A nyolcszögek viszont nem szabályosak. Az ábrán megjelölt négy szakasz a négyzet oldalának harmada: 3 cm, a másik négy szakasz pedig $3 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszú.



14. Egy fából készült kockát az ábrán megjelölt három csúcspontjára fektetett síkkal két részre vágjuk. Rajzold le a keletkezett két test hálóját, majd a hálón a vágás menti éleket jelöld meg színessel!

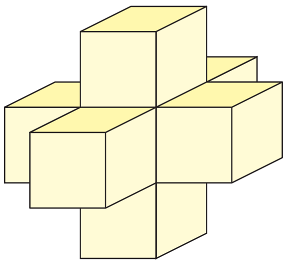


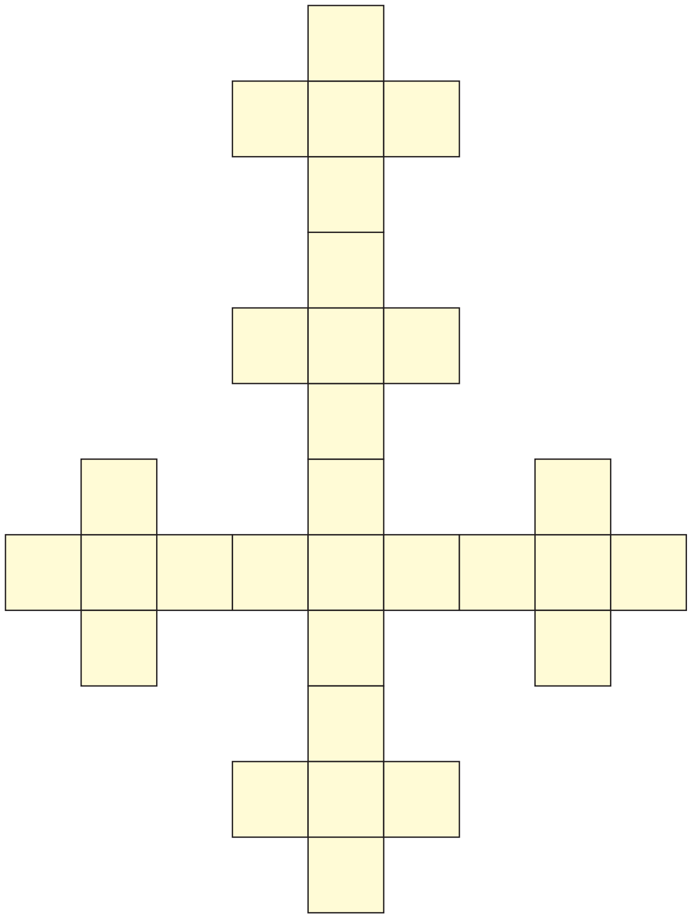
Megoldás



15. Tükrözzük a kockát kifelé minden lapjára! Hány határolólapja lesz az így keletkezett testnek? Az új test térfogata hányszorosa az eredeti kocka térfogatának? Rajzold le a hálóját! Az új test felszíne hányszorosa az eredeti kocka felszínének?

Megoldás

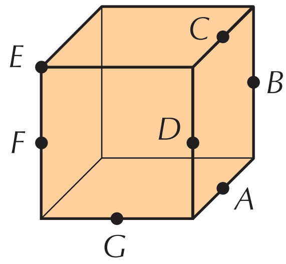




Az új testet térbeli keresztnek is nevezik. Olyan test, amelynek minden határolólapja négyzet, mégsem kocka. Ha a kocka élét a-val jelöljük, akkor térfogata $V = 7a^3$, tehát hétszerese az eredeti kocka térfogatának. Felszíne pedig $A = 30a^2$, ami 30-szorosa az eredeti kocka felszínének.
Vesd össze 11–12. évfolyam feladatával!

9–10. ÉVFOLYAM

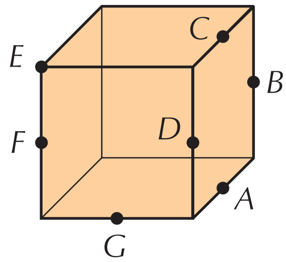
1. Egy kocka élein megjelöltünk néhány pontot.
b) Keress olyan pontnégyeseket, amelyek egy síkban vannak!
c) Keress olyan pontnégyeseket, amelyek nincsenek egy síkban!



Megoldás

a) Egy síkban vannak: ABCD, EFGD, FGCB.
b) Nincsenek egy síkban: GADB, GADC, FGDB, ABDF stb.

2. Egy kocka élein megjelöltünk néhány pontot. Milyen háromszöget határoznak meg a felsorolt ponthármasok: *BCD, BFD, FGC, ACE, GBE?* Határozd meg a háromszögek oldalait!



Megoldás

Az oldalak hosszát Pitagorasz tétellel számolhatjuk ki. A kocka élét a-val jelöljük.

BCD háromszög egyenlőszárú derékszögű, oldalai: a, $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

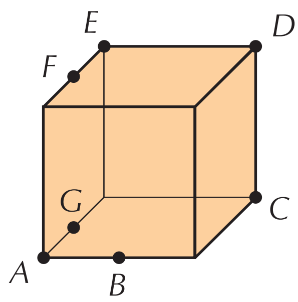
BFD háromszög egyenlőszárú derékszögű, oldalai: $a, a, a\sqrt{2}$.

FGC háromszög egyenlő szárú, oldalai: $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

ACE háromszög derékszögű háromszög, oldalai: a, $\frac{a}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}a$.

GBE háromszög „általános” háromszög, oldalai: $\frac{3}{2}a$, $\frac{a}{2}\sqrt{5}$, $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

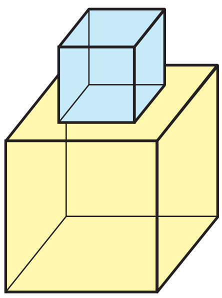
3. Egy kocka élein megjelöltünk néhány pontot. Válaszd ki azokat a pontokat, amelyek téglalapot, paralelogrammát, trapézt, illetve deltoidot, határoznak meg!



Megoldás

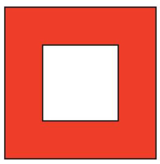
Téglalap: GCDF
Paralelogramma: AGEF
Trapéz: ABDE (természetesen az előző kettő is jó itt)
Deltoid: ABCG

4. Egy 8 cm kockára, az ábrán látható módon, egy 4cm élűt ragasztunk. Állapítsd meg, hogy a kapott testnek milyen új határolólapjai keletkeztek! Hány lapja éle és csúcsa van az új testnek? Érvényes-e erre az új testre az Euler tétel? (lap+csúcs=él+2)



Megoldás

A kis kockának egy lapja eltűnik. A nagy kockának egy lapja helyett az ábrán látható lap keletkezett.

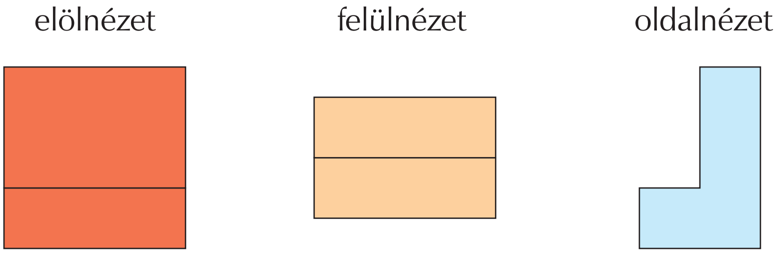


A lapok metszeténél élek, az élek metszeténél csúcsok keletkeznek.

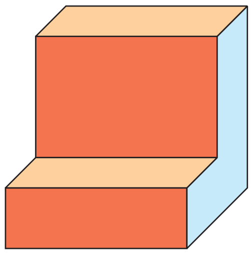
LAP	ÉL	CSÚCS
11	**24**	**16**

$11 + 16 = 27 \neq 24 + 2$, tehát nem érvényes az Euler tétel.

5. Rajzold le azt a testet, amelynek elölnézete, felülnézete és oldalnézete az ábrán látható!



Megoldás

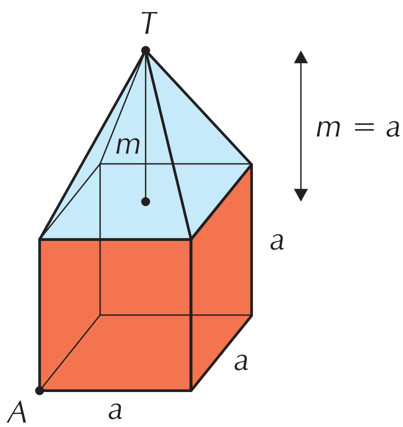


6. Egységkockákból 3 cm élű tömör kockát építünk. Mennyivel változik a kocka felszíne, ha
a) Minden csúcsánál kiemelünk egy-egy egységkockát,
b) Minden élének középső egységkockáját emeljük ki,
c) Minden lapjának középső egységkockáját emeljük ki.

Megoldás

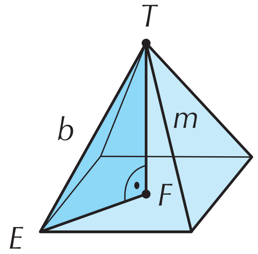
a) A kocka felszíne nem változik, mert minden csúcsnál egy - egy kis kocka három lapját veszítjük el, és mindenütt ugyanennyit nyerünk.
b) Minden él közepén két egységnégyzet területet veszítünk, és helyette négyet nyerünk. A kocka 12 élénél összeszámolva ezeket összesen $12 \cdot 2 = 24$ területegységgel nő a felszín.
c) Minden lap közepénél elveszítünk egy egységnégyzet terület, és helyette ötöt nyerünk. A kocka 6 lapjánál összeszámolva ezeket $6 \cdot 4 = 24$ területegységgel nő a felszín.

7. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára olyan 10 cm magasságú szabályos négyoldalú gúlát ragasztunk, amelynek alaplapja egybevágó a kocka lapjával. Keresd meg a T csúcsból az A csúcsba vezető legrövidebb utat, ha a test
a) élein,
b) belsejében haladhatunk!



Megoldás

a)

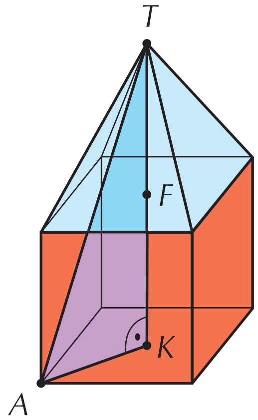


Éleken haladva a legrövidebb út az egy kockaélnek (a), és az ahhoz csatlakozó gúlaélnek (b) az összege. A gúlaél az ábrán látható EFT derékszögű háromszögből határozható meg Pitagorasz tétellel.

$EF = 5 \cdot \sqrt{2}$ *(cm)* $\quad b = \sqrt{\left(5 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 10^2} \approx 12{,}2$ *(cm)*

A legrövidebb út hossza: a+b=10 + 12,2 ~ 22,2 (cm)

b)



A test belsejében haladva a legrövidebb út az A,T pontokat összekötő szakasz. Ez a szakasz átfogója az AKT derékszögű háromszögnek.

A befogók ismeretében az átfogó Pitagorasz tétellel számolható.

$AK = 5 \cdot \sqrt{2}$ *(cm)* $\quad KT = a + m$ *(cm)* $\quad AT = \sqrt{\left(5 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 20^2} \approx 21{,}2$ *(cm)*

8. a) Egy a élű kocka minden lapjára kifelé egy-egy a/2 magasságú szabályos négyoldalú gúlát ragasztunk. A gúla alaplapja egybevágó a kocka lapjával. Hányszorosára változik a kocka térfogata?

b) Hányszorosára változik a kocka térfogata, ha ilyen gúlákat vágunk ki a kocka minden lapjánál?

Megoldás

a) *Egy ilyen gúla térfogata* $V_g = \dfrac{a^2 \dfrac{a}{2}}{3} = \dfrac{a^3}{6}$. *Hat ilyen gúla térfogata éppen a kocka térfogatával egyenlő. Az új test a kocka térfogatának kétszerese.*

b) *Ha a feltételeknek megfelelő gúlákat kivágjuk a kockából, akkor a test teljesen eltűnik, vagyis a térfogat 0 lesz.*

9. Megrajzoltuk a kocka szemközti lapjainak középpontján átmenő egyik forgástengelyét. Mekkora az a szög, amely a kockát, a megjelölt tengely körül elforgatva önmagába viszi át? ($0° < \alpha < 360°$)

Megoldás

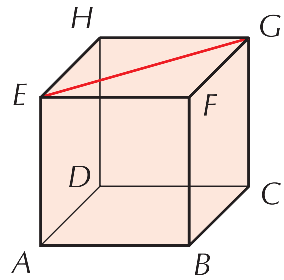
90°, 180°, 270°, mert a négyzet lapközéppontjára nézve ezekkel a forgásszimmetriákkal rendelkezik.

10. Megrajzoltuk a kocka egyik lapátlóját. A végpontok megjelölésével sorold fel

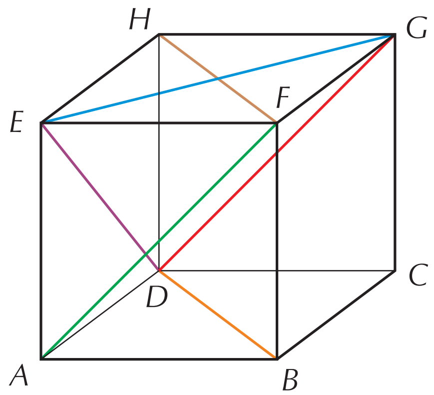
a) az ezt metsző lapátlókat,

b) az ezzel kitérő lapátlókat!

Mekkora szöget zárnak be ezek a lapátlók az eredetivel?



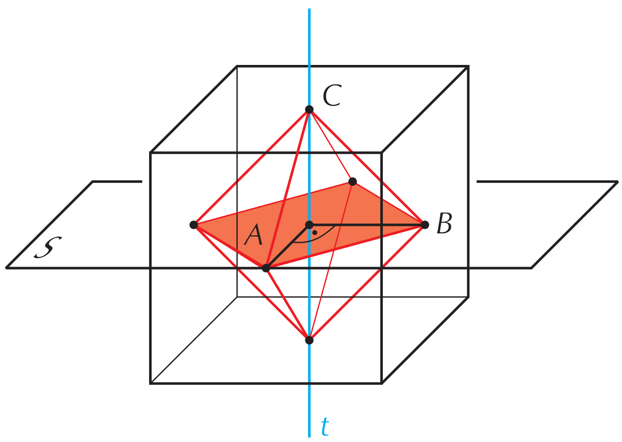
Megoldás



a) Metsző átlók:
FH, GB, EB, GD, ED
EG és FH szöge 90°, mert ezek egy négyzet átlói.
EG és GB, EG és EB, EG és GD, EG és ED által bezárt szögek 60°-osak, mert az EGB és az EGD háromszögek szabályosak.

b) Kitérő átlók: BD, AF, CH, FC, és AH.
EG és BD szöge 90°, mert BD párhuzamos FH-val.
EG és AF szöge egyenlő EG és GD szögével, mert AF párhuzamos GD-vel. Ez a szög pedig 60°-os.
CH, FC és AH átlók eltolással az eredeti átlóval metsző helyzetbe hozhatók, ezért ezek is 60°-os szöget zárnak be EG-vel.

11. Jelöljük meg a kocka lapközéppontjait.
a) Milyen test csúcspontjai ezek a pontok?
b) Állítását igazold!

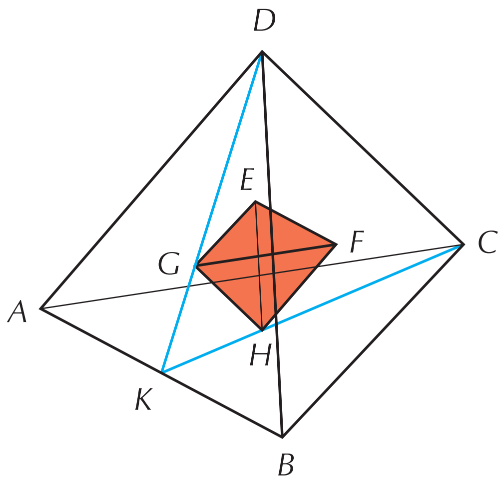


Megoldás

Az **a** *élű kocka három, egymásra merőleges lapjának középpontja szabályos háromszöget határoz meg. (A háromszög minden oldala* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *hosszú). A kockának bármely két szemközti lapközéppontján áthaladó* ***t*** *forgástengelyére nézve 90°-os forgásszimmetriája van. Az új test csúcsai éppen a lapközéppontokban vannak, ezért az is rendelkezik ezzel a forgásszimmetriával. A hat kijelölt pont mindkét testen, szimmetrikus a kocka középpárhuzamos S síkjára is. Ezért ezek a pontok két, egymással egybevágó szabályos,* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *élű négyoldalú gúlát határoznak meg, négyzetlapjuknál összeillesztve. A síkszimmetria és a forgásszimmetria miatt a test minden lapszöge egyenlő. Tehát a kapott test egy szabályos oktaéder.*

12. Milyen testet határoznak meg a szabályos tetraéder lapközéppontjai?
Állításodat igazold!

Megoldás

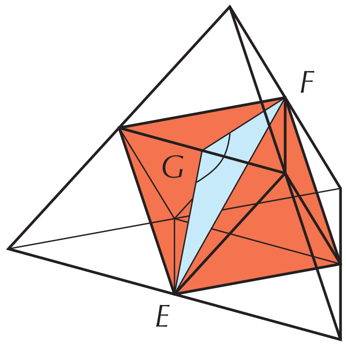


Az E,F,G,H pontok a szabályos tetraéder lapjainak súlypontjai. A négy súlypontból bárhogyan kiválasztva kettőt, és azokat összekötve, olyan testet kapunk, amelynek $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ *éle van. Vizsgáljuk az ábrán kiemelt részletet. Az ABC lap egyik súlyvonala CK, az ABD lapé pedig DK. Ekkor az új test GH oldala, a súlypont osztási aránya, valamint a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt párhuzamos DC oldallal, és annak harmada. Hasonlóan belátható ez, a keletkezett test mind a hat éléről. Tehát a testet 4 db szabályos háromszög határolja. Az eredeti tetraéder 120°-os forgásszimmetriája, lapjainak súlypontjaira is érvényes, ezért az új test hasonló az eredetihez, így az is egy szabályos tetraéder.*

Érdemes megjegyezni, hogy a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$*, a két test felszínének aránya* $\frac{1}{9}$*, térfogatának aránya pedig* $\frac{1}{27}$*.*

13. Milyen testet határoznak meg a szabályos tetraéder élfelező pontjai?

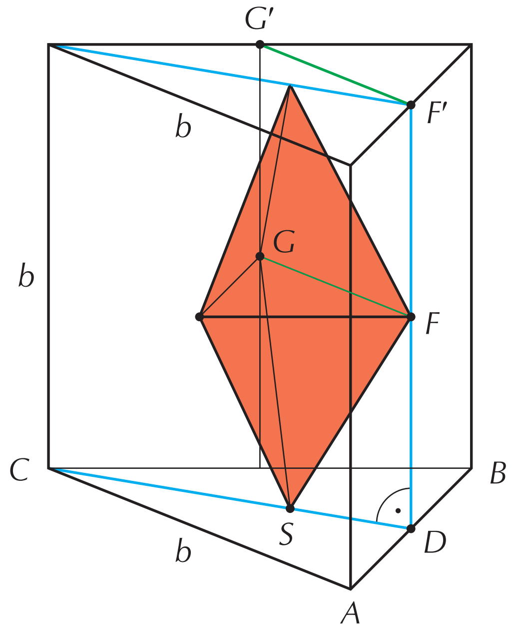
Megoldás



Az élfelező pontok által határolt szakaszok a szabályos tetraéder határoló- lapjainak középvonalai, ezek egyenlők. Minden oldallapon, és minden csúcsnál keletkezik egy-egy szabályos háromszög. Az új testet tehát 4+4=8 szabályos háromszög határolja. A lapszög meghatározásához az ábrán berajzolt EGF egyenlő szárú háromszög G csúcsnál lévő szögét kell vizsgálni. Az új test bármely két szomszédos lapjánál, evvel egybevágó háromszöget találunk, mert e háromszögek szárai az új test egy oldallapjának a magasságaival egyenlők, alapjai pedig a szabályos tetraéder két szemközti élének a távolságával. Így az új test minden lapszöge egyenlő. Tehát a szabályos tetraéderen kijelölt hat pont egy szabályos oktaéder hat csúcsa.

14. Szabályos háromszög alapú egyenlő élű egyenes hasáb lapközéppontjai milyen testet határoznak meg? Szabályos-e ez a test?

Megoldás



Az ábrán látható, hogy az öt pont összekötésével egy háromszög alapú kettős gúlát nyerünk. Az új test éleit határozzuk meg.

A GF él fedőlapra eső merőleges vetülete G′F′. Ez utóbbi a fedőlap háromszög középvonala, ami $\frac{b}{2}$*-vel egyenlő, és mivel a GF él párhuzamos a fedőlappal, ezért* $GF = G'F' = \frac{b}{2}$.

Az SF él hosszát az SDF derékszögű háromszögből határozzuk meg. SD az alapháromszög magasságának $\frac{1}{3}$*-a, DF pedig az a négyzet oldalának fele:* $\frac{b}{2}$.

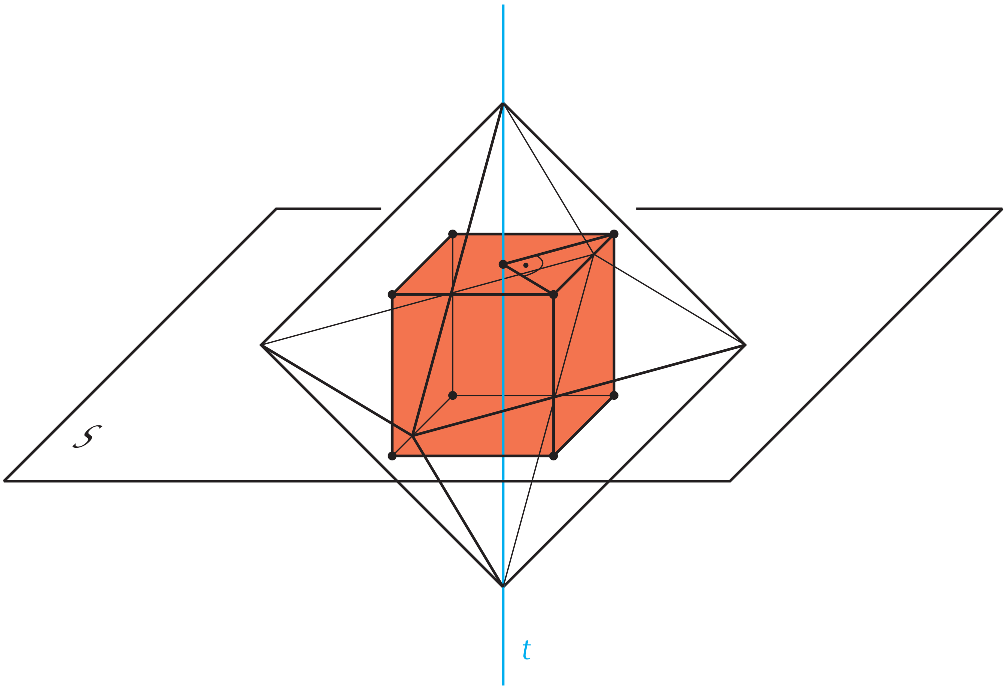
$$SF = \sqrt{SD^2 + DF^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{b \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right]^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3b^2}{36}\right) + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad SF = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Tehát GF él nem egyenlő SF éllel, ezért a test nem lehet szabályos.

15. Kösd össze a szabályos oktaéder szomszédos lapjainak középpontjait! Milyen testet határoznak meg ezek az élek?

Megoldás

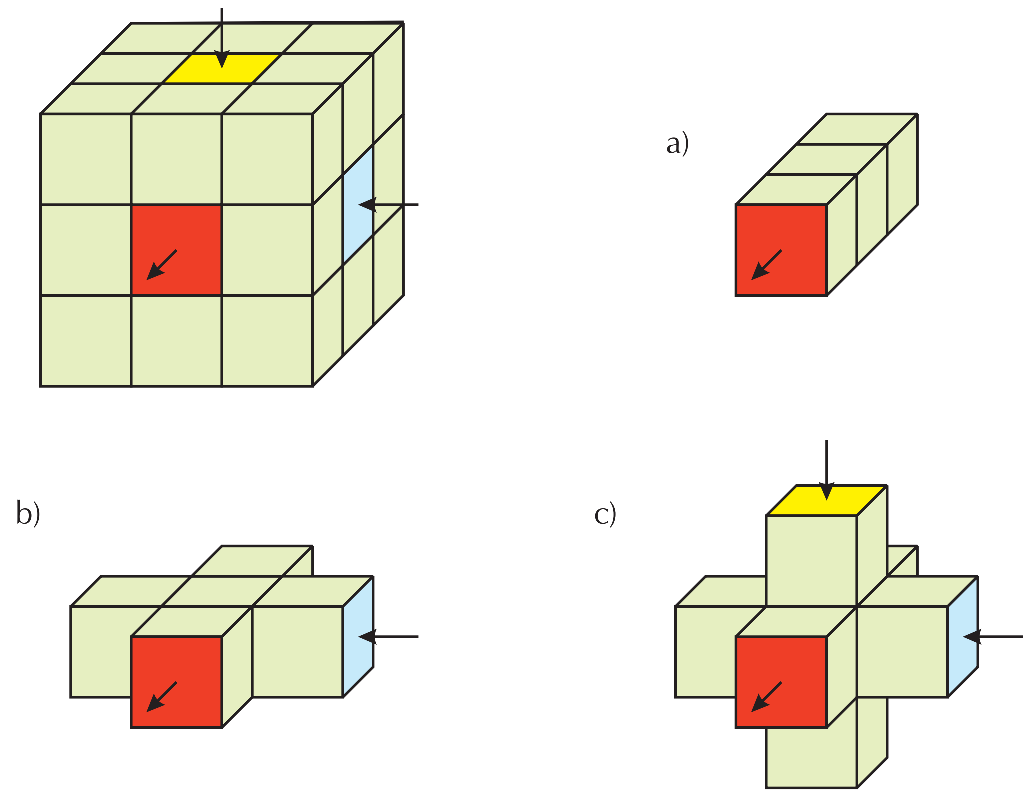


A szabályos oktaéder nyolc lapközéppontja van, ezek lesznek az új test csúcsai. Az oktaéder szimmetria tulajdonságai alapján bizonyítható, hogy ez az új test egy kocka.

11–12. ÉVFOLYAM

1. Egységkockákból 3 cm élű tömör kockát építünk. Mennyivel változik a kocka felszíne, ha
a) egy szemközti lappárjának középső kockáinál, a lapra merőlegesen a kockát kifúrjuk?
b) két szemközti lappárjának középső kockáinál, a lapra merőlegesen a kockát kifúrjuk?
c) három szemközti lappárjának középső kockáinál, a lapra merőlegesen a kockát kifúrjuk?

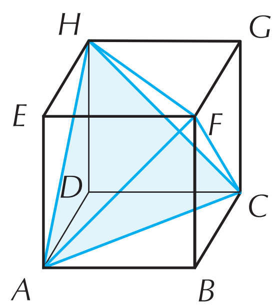
Megoldás



a) Ha kivágjuk a kockából az a) ábrán lévő 3 kockából álló alakzatot, akkor a kocka felszíne $2 \cdot 1cm^2 = 2\ cm^2$-rel csökken, és a kocka belsejében keletkezik egy $3 \cdot 4\ cm^2 = 12\ cm^2$ nagyságú új felület. Így a kocka felszíne $12\ cm^2 - 2\ cm^2 = 10\ cm^2$-rel növekszik.
b) Ha kivágjuk a kockából a b) ábrán lévő 5 kockából álló alakzatot, akkor a kocka felszíne $4 \cdot 1cm^2 = 4\ cm^2$-rel csökken, és a kocka belsejében keletkezik egy $4 \cdot 4\ cm^2 = 16\ cm^2$ nagyságú új felület. Így a kocka felszíne $16\ cm^2 - 4cm^2 = 12\ cm^2$-rel növekszik.
c) Ha kivágjuk a kockából a c) ábrán lévő 7 kockából álló alakzatot, akkor a kocka felszíne $6 \cdot 1\ cm^2 = 6\ cm^2$-rel csökken, és a kocka belsejében keletkezik egy $6 \cdot 4\ cm^2 = 24\ cm^2$ nagyságú új felület. Így a kocka felszíne $24\ cm^2 - 6\ cm^2 = 18\ cm^2$-rel növekszik.

2. Egy kocka csúcsain hány olyan sík fektethető, amely pontosan három kockacsúcson halad át? Sorold fel a különböző ponthármasokat! Milyen síkidomot metszenek ki ezek a síkok a kockából?

Megoldás

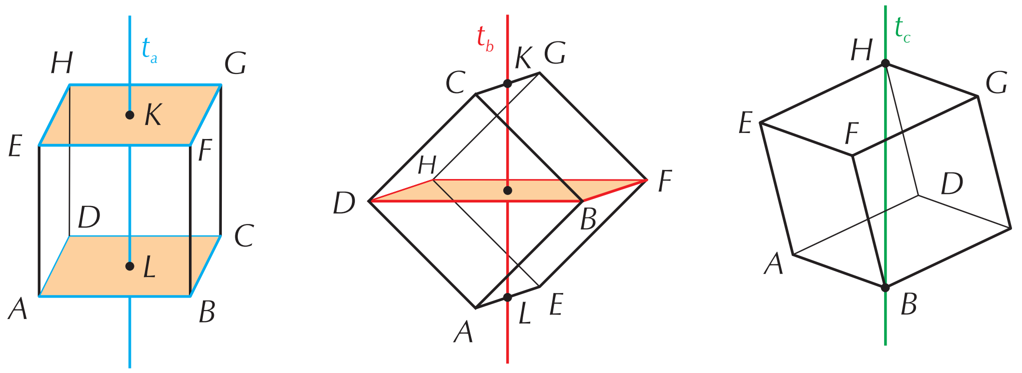


Az ábrán megjelölt csúcsokat vizsgálva az A csúccsal három különböző ponthármas áll elő. Az ACH, az AFC és az AFH. Minden kockacsúcshoz három ponthármas tartozik, de így minden ponthármast éppen háromszor számoltunk. Ezért összesen (8 · 3) : 3 = 8 különböző ponthármas létezik.
ACH, AFC, AFH, BGD, BEG, BDE, CHF, DGH.
Ezek a ponthármasok szabályos háromszöget határoznak meg, mert minden háromszögoldal a kocka egy lapátlója.

3. Hány forgástengelye van egy kockának? A forgástengelyek típusai szerint állapítsd meg, hogy a kockának arra a tengelyre nézve hány fokos forgásszimmetriája van! ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)

Megoldás

a) b) c)



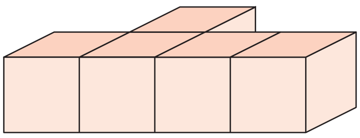
A szemközti lapok középpontján átmenő egyenesre (t_a) a kockának 90°-,180°-, 270°-os forgásszimmetriája van. A három pár lapközépponton, három t_a típusú tengely halad át. Így a kocka 3 · 3 = 9-féleképpen hozható önmagával azonos helyzetbe.

A szemközti élek felező pontján átmenő egyenesre (t_b) a kockának 180°-os forgásszimmetriája van, mert pl.: az ábrán megjelölt DBCHFG derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb a t_b tengely körül forgatva 180°-ra forgásszimmetrikus. A hat pár élfelező ponton, hat t_b típusú tengely halad át. Így a kocka 6 · 1 = 6-féleképpen hozható önmagával azonos helyzetbe.

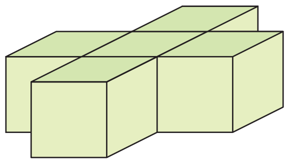
Az átellenes csúcsokon átmenő egyenesre (t_c) a kockának 120°-os, 240°-os forgásszimmetriája van, mert a t_c szimmetria tengely az EDG és ACF szabályos háromszögek középpontján halad át, és ezek a háromszögek 120°-ra, és 240°-ra forgás-szimmetrikusak. A négy pár átellenes csúcson, négy t_c típusú tengely halad át. Így a kocka 4 · 2=8-féleképpen hozható önmagával azonos helyzetbe.

4. Öt-öt egységkockából készítettük az ábrán látható két különböző építményt.
Ilyenek felhasználásával készítsd el a lehető legkisebb tömör kockát!

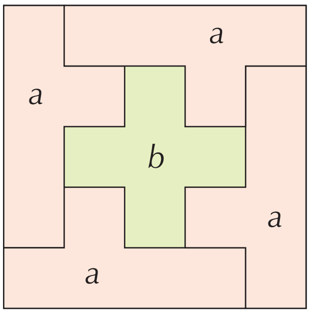
a)



b)



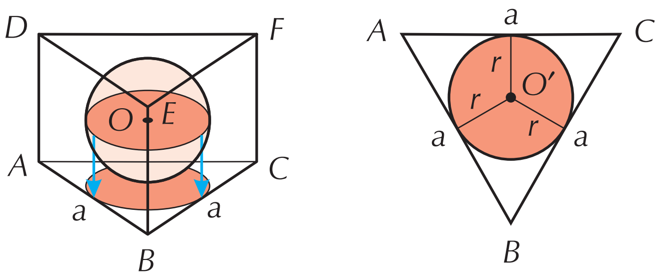
Megoldás



Egy olyan 5x5x5-ös kockát készíthetünk, amelynek az alaprajza az ábrán látható. A kocka első rétegében a) építményből négyet, a b) -ből egyet használtunk fel. A fölötte lévő négy réteg ugyanígy készülhet.

5. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle a. A hasábba gömb írható. Mekkora a beírt gömb sugara?

Megoldás

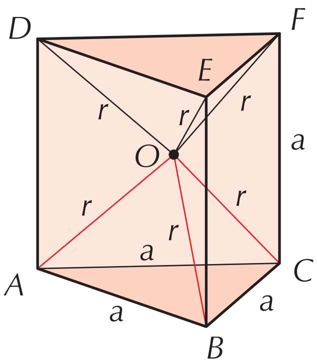


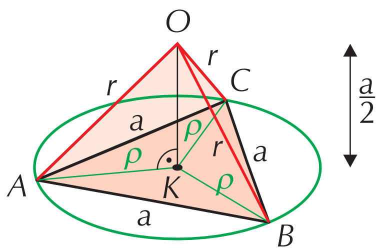
Ha egy egyenes hasábba gömb írható, akkor magassága kétszerese a gömb sugarának. Lerajzoltuk a gömb alapháromszögre eső merőleges vetületét, így a gömb főköre az ABC szabályos háromszög beírt köre lesz. (Ezt látjuk, ha a gömbre fölülről merőlegesen ránézünk.)

A főkör sugara: $r=\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}$

6. Egy háromszög alapú egyenes hasáb minden éle egyenlő, a köréírható gömb sugara ***r***. Mekkora a hasáb magassága?

Megoldás





Mivel az egyenes hasáb minden éle egyenlő, az a élhossz egyenlő a test **m** *magasságával. Az ábrán megrajzoltuk a gömb középpontjából a hasáb csúcsaihoz vezető sugarakat (r). Az ABCO szabályos háromoldalú gúlán OK=* $\frac{a}{2}$*, OA=OB=OC=r és KA=KB=KC=ρ. Ez utóbbi a szabályos háromszög tulajdonságai miatt*

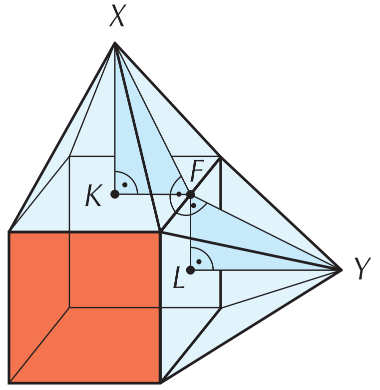
$\frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}$-dal egyenlő. Az AKO derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz tételt: $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=r^2$

Innen $a=2r\sqrt{\frac{3}{7}}$, ami egyenlő a hasáb magasságával.

7. Egy a élű kocka minden lapjára kifelé egy – a kocka lapjával egybevágó alapú – négyoldalú szabályos gúlát illesztünk. Mekkora lehet a gúlák magassága, ha kapott új test

a) konvex   b) konkáv?

Megoldás

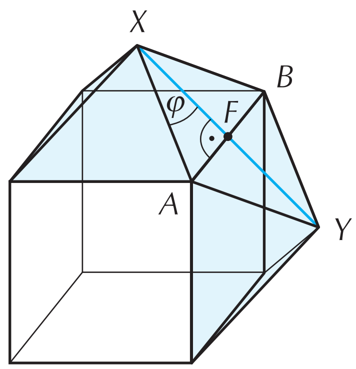


Az ábrán jelölt XFY szög pontosan akkor egyenesszög, ha KFX szög és LFY szög 45°-os. Ezért a az ábrán berajzolt KFX és LFY derékszögű háromszögek egyenlő szárúak. Így KF=KX = $\frac{a}{2}$, és FL=LY= $\frac{a}{2}$. Ha a gúlák magassága ezzel egyenlő, vagy ennél kisebb, akkor a test konvex, ha nagyobb, akkor konkáv.

8. Egy a élű kocka minden lapjára kifelé egy – a kocka lapjával egybevágó alapú – négyoldalú szabályos gúlát illesztünk. A gúla oldallapjának az alaplappal bezárt szöge 45°. Jellemezd az így kapott testet!

Milyen határolólapjai vannak?
Hány éle, lapja csúcsa van?
Mekkora a test egy éle?
Mekkora a szomszédos élek szöge?

Megoldás



Ha a gúla oldallapjának az alaplappal bezárt szöge 45°, akkor XFY szög 180° (90°+2 · 45°). Ezért az AYBX pontok egy síkban vannak. Mivel a kockára illesztett gúlák élei azonosak az AYBX négyszög rombusz, és

ezt a kocka minden élénél megkapjuk. A testet tehát 12 egybevágó rombusz határolja, amit rombikus dodekaédernek neveznek.
Az új testnek 24 éle, 12 lapja és 14 csúcsa van. (Érvényes az Euler-tétel)

Az AFX derékszögű háromszögben a feladat feltételei miatt

$XF=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $AF=\frac{a}{2}$. *Alkalmazva a Pitagorasz tételt, a test egyik éle:*

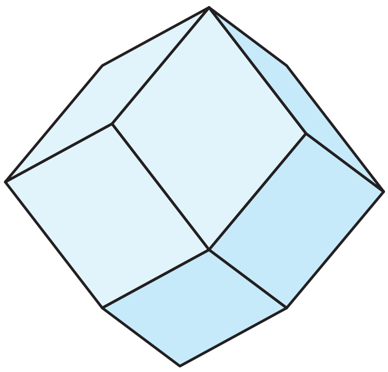
$$AX=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Vesd össze a 9. feladat megoldásával: azzal a gondolatmenettel a rombikus dodekaéder egy éle éppen a kocka testátlójának fele, azaz $\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$

Az AFX derékszögű háromszögben

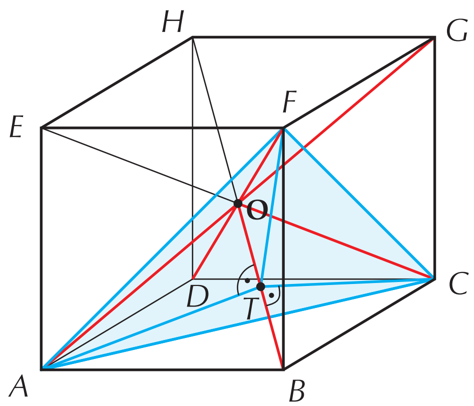
$tg\varphi=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, *innen* $\varphi = 35{,}26°$. *A rombusz hegyes szöge 70,53°, tompaszöge pedig 109,47°.*

Tehát az AXB szög 70,53°, az XAY szög pedig 109,47°. A új test élszögei mindenütt ilyenek.



9. Határozd meg az előző feladatban előállított rombikus dodekaéder lapszögét!

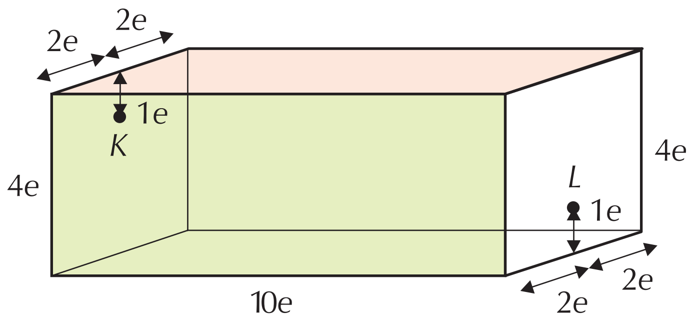
Megoldás



Az előző feladat ábráján látható $\frac{a}{2}$ *magasságú gúlát tükrözzük az alaplapjukra mind a hat kockalapon.*

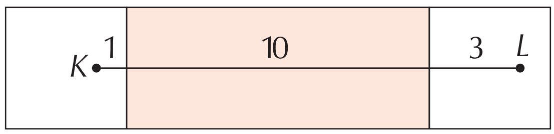
Így a hat gúla éppen kitölti a kockát, és a gúla élei együtt a kocka négy testátlóját alkotják. A tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt a gúlák lapszöge nem változik, így két O csúcsú négyoldalú gúla szomszédos oldallapjának szögét keressük. Az ábrán megjelölt ABO és BCO lapok szögének meghatározásához húzzuk *meg az AT és a CT merőleges szakaszokat a két háromszög síkjának OB metszésvonalára. E két szakasz szöge adja a lapok szögét. Ez a T pont éppen a kocka A,F,C csúcsai által meghatározott szabályos háromszög középpontja, ugyanis a kocka a HB testátlóra forgásszimmetrikus, és e tengely körüli 120°- os elforgatással az A,C,F pontok egymásra kerülnek. (Lásd a 11–12. évfolyam 3. feladatát) Ugyanezért az ACF háromszög síkja merőleges OB-re, és az OB szakasz T pontja éppen e háromszög forgáscentruma. Tehát* $FTC\angle = FTA\angle = ATC\angle = 120°$ *Ezek a szögek gúláink oldallapjának szögei, közülük az* $ATC\angle$ *az általunk keresett szög. Mivel ez a gondolatmenet bármely két lapnál elvégezhető, ezért a rombikus dodekaéder lapszögei 120°-osak.*

10. Egy téglatest élei 4, 4, és 10 egység hosszúak. Két lapján, az ábra szerint megjelöltük a K és az L pontokat. A téglatest felületén mozogva, a megjelölt pontokat összekötő utak között létezik-e 14 egységnél rövidebb?

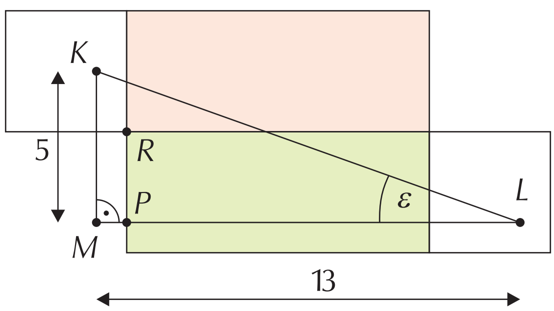


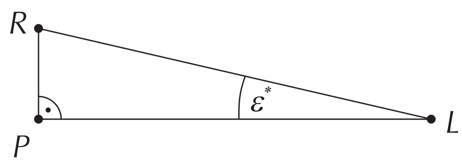
Megoldás

a)



b)





Ha a K és az L pontokat tartalmazó lapokat az a) ábra szerint terítjük ki, akkor a KL távolság valóban 14 egység, de ha a lapokat a b) ábra szerint terítjük ki, akkor a keletkezett LKM derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz tételt :

$KL = \sqrt{13^2 + 5^2} \approx 13{,}93 < 14$ *Tehát létezik 14 egységnél rövidebb út.*

Meg kell még vizsgálni, hogy a KL szakasz teljes egészében a téglatest hálójára esik-e.

Az LRP derékszögű háromszögben:

$tg\varepsilon^* = \dfrac{3}{12}$ $\qquad \varepsilon^* \approx 14{,}04^\circ$

Ha KLM szög kisebb ε-nál, akkor KL szakasz nem felel meg a feltételeknek, ha ennél nagyobb, akkor igen.*

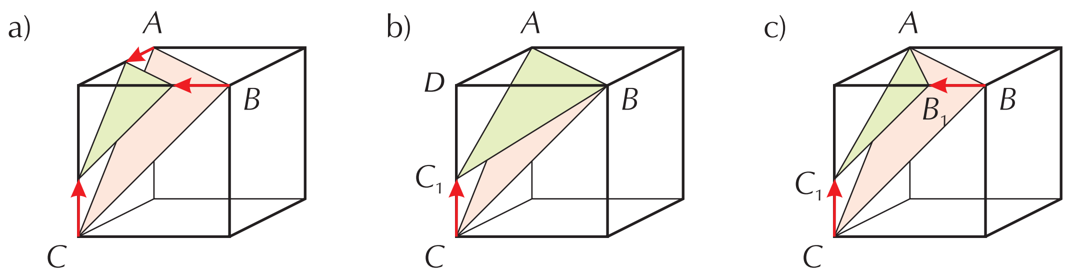
A b) ábrán az LKM derékszögű háromszögben:

$tg\varepsilon = \dfrac{5}{13}$ $\qquad \varepsilon \approx 21{,}04^\circ$*, tehát a KL szakasz a téglapest hálójának négy lapján megy át, így a 14 egységnél rövidebb út a téglatest felületén halad.*

11. Igazold, hogy a kocka síkmetszete lehet

a) szabályos háromszög,
b) egyenlőszárú, de nem szabályos háromszög,
c) nem speciális háromszög!

Megoldás



a) Ha a háromszög mindhárom oldala a kocka egy lapátlója, akkor azok szabályos háromszöget határoznak meg. Ha a síkot három ilyen pontra fektetjük, akkor a síkmetszet szabályos háromszög lesz.
Ábrán: ABC háromszög. Ha a metsző síkot ezzel párhuzamosan, a nyíl irányában eltoljuk, további szabályos háromszögmetszeteket kapunk.

b) Ha az ABC háromszög C csúcsát, a nyíl irányában eltoljuk, az A és a B csúcs helyét nem változtatjuk, akkor egyenlőszárú háromszögeket kapunk. Ilyen az ABC_1 *háromszög.* $BC_1=AC_1$*, mert ezek a szakaszok az* ADC_1 *és a* BDC_1 *egybevágó derékszögű háromszögek átfogói.*

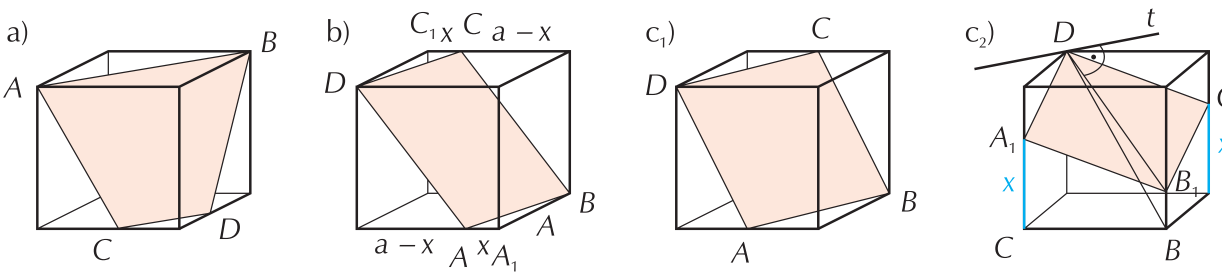
c) Ha az ABC háromszög C és B csúcsát különböző nagyságú vektorral toljuk el, az A csúcs helyét nem változtatjuk, akkor olyan háromszögeket kapunk, amelyeknek semmilyen speciális tulajdonsága sincs. Ilyen az AB_1C_1 *háromszög.*

12. Igazold, hogy egy kocka síkmetszete lehet

a) trapéz,
b) paralelogramma
c) deltoid!

Mindhárom esetben speciálistól különböző négyszögeket keresünk.

Megoldás



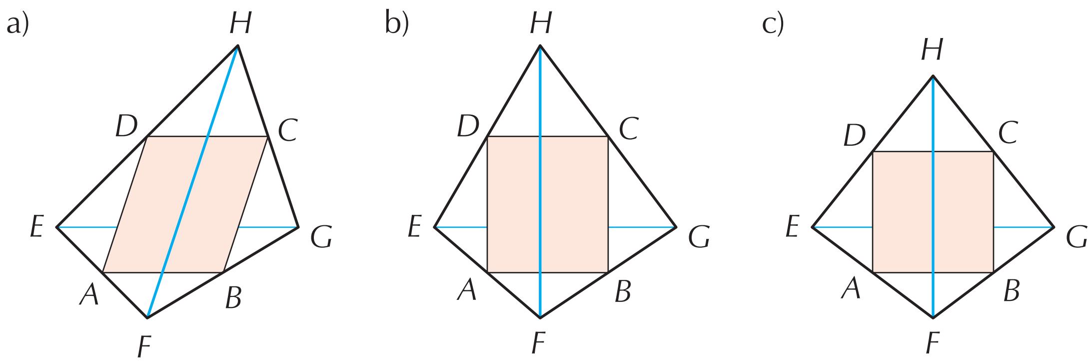
a) Az AB párhuzamos CD-vel, mert ha egy párhuzamos síkpárt metszünk egy síkkal, akkor a metszésvonalak párhuzamosak. Tehát ABCD négyszög trapéz.

b) *Az AB=CD, mivel ezek, két egybevágó derékszögű háromszög átfogói. Továbbá az AB párhuzamos CD-vel, mert ha egy párhuzamos síkpárt metszünk egy síkkal, akkor a metszésvonalak párhuzamosak. Tehát az ABCD négyszög paralelogramma.*

c) *Speciális deltoid pl.: a (c_1 ábrán) látható rombusz metszet, ami a b) megoldásnak is speciális esete. Deltoidot kapunk, (c_2 ábra) ha az előbbi rombusz metszetet tartalmazó síkot, a DB-re merőleges t tengely körül elforgatjuk úgy, hogy az a kocka éleit A_1, B_1 és C_1 pontban metssze. A kocka átlós síkra vonatkozó síkszimmetriája miatt a keletkezett A_1 B_1C_1D négyszög valóban deltoid.*

13. Igazold, hogy a tetraédert lehet paralelogrammában metszeni!
Különböző tetraéderek esetén milyen lehet ez a paralelogramma?

Megoldás



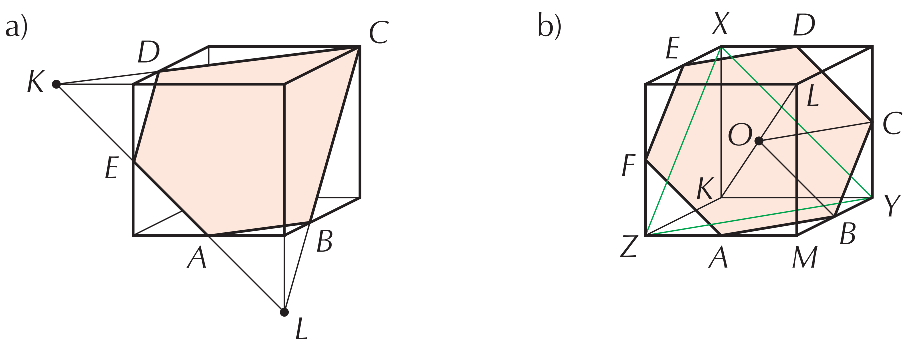
a) *ábra:Tetszőleges tetraéder esetében az ABCD négyszög paralelogramma, mivel a háromszög középvonalának tétele miatt DC párhuzamos EG-vel, és AB is párhuzamos EG-vel, továbbá mindkettő fele EG-nek. Tehát AB párhuzamos és egyenlő DC-vel. Ez mindhárom kitérő élpárnál belátható. (Megmutatható az is, hogy a tetraéder végtelen sok paralelogrammában metszhető.)*

b) *ábra:ha az EFGH tetraéder HF éle merőleges EG-re, akkor az ábrán látható síkmetszet téglalap. Ha bármely két szemközti, kitérő él merőleges, akkor a paralelogramma síkmetszetek téglalapok.*

c) *ábra: ha az EFGH tetraéder szabályos, akkor a paralelogramma síkmetszetek négyzetek, mert ilyenkor minden él egyenlő, és a szemközti élek merőlegesek egymásra.*

14.  Lehet-e egy kocka síkmetszete ötszög vagy hatszög? Hatszög esetében bizonyítsd be, hogy mikor kaphatunk szabályos hatszöget!

Megoldás



a) *A kocka ötszögmetszete az ábrán látható. Az A,B,C,D,E pontok a KLC háromszög síkjában vannak. A kapott ötszög nem szabályos.*

b) *A kocka XYZ háromszögmetszete a KL testátlóra merőleges, az X,Y,Z csúcsokon áthaladó síkkal állítható elő. Ha ezt a síkot a KL testátló O felezőpontjába toljuk, akkor kapjuk a kocka egyik hatszög metszetét.*

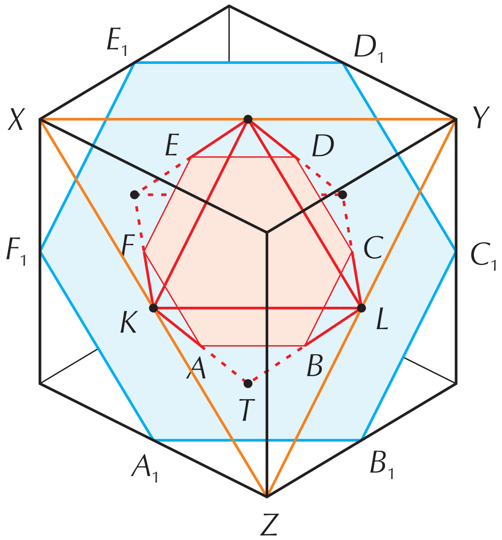
– *Először belátjuk, hogy az A,B,C,D,E,F pontok a KL testátló felezőmerőleges síkjában vannak.*

Legyen pl. a B csúcs az MY szakasz felezőpontja. BL= BK, mivel ezek a szakaszok két egybevágó, **a,** *illetve* $\frac{a}{2}$ *befogójú derékszögű háromszög átfogói. Tehát B egyenlő távolságra van K-tól és L-től, így rajta van KL felezőmerőleges síkján. Ez a hatszög minden csúcsára igaz.*

– *Másodszor belátjuk, hogy a hatszög egyenlő oldalú.*
  A hatszög minden oldala az XYZ szabályos háromszög oldalának felével egyenlő, háromszögek középvonal tétele miatt.
– *Végül belátjuk, hogy a hatszög szögei egyenlők.*
  Az OAB és az OBC háromszögek szabályosak, mert miden oldaluk egyenlő a kocka lapátlójának felével, ezért a B csúcsnál lévő szög 120°-os.Ez a hatszög minden csúcsánál ugyanígy belátható.

15. Lehet-e egy szabályos oktaédert szabályos hatszögben metszeni?

Megoldás



A szabályos oktaédert duális párjával, a kockával rajzoltuk fel.
A szabályos oktaéderen bejelölt A,B,C,D,E,F élfelező pontok egy szabályos hatszöget határoznak meg. Vizsgáljuk a hatszög AB oldalát. Az XYZ szabályos háromszög XY-nal párhuzamos középvonala KL, és a TKL háromszög KL-lel párhuzamos középvonala, pedig AB, ezért AB párhuzamos XY-nal, és annak negyede. Ez, hatszögünk minden oldalára hasonlóan belátható. Az előző feladatban kaptuk, hogy a kockába írt A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1 *hatszög is szabályos, ezért annak szemközti oldalai párhuzamosak, vagyis* E_1D_1 *párhuzamos* A_1B_1*-gyel, ugyanakkor* E_1D_1 *párhuzamos XY-nal is, amiből következik, hogy XY párhuzamos* A_1B_1*-gyel. Azt kaptuk, hogy AB párhuzamos* A_1B_1*-gyel. Vagyis a két hatszög megfelelő oldalai párhuzamosak, tehát a szögei egyenlők. Tehát az ABCDEF hatszög szabályos.*